Miscelánea Matemática **38** (2003) 33–41 SMM

Una familia de elipses*

Fernando Garibay B.
Facultad de Ingeniería Química
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Edificio M, Cd. Universitaria
58020 Morelia, Mich.
México
fgaribay@zeus.umich.mx

y

Rigoberto Vera Mendoza
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Edificio B, Cd. Universitaria
58020 Morelia, Mich.
México
rvera@zeus.umich.mx

1. Introducción.

Suponga que se tiene una familia $\mathcal{C}$ de elipses confocales (con los mismos dos focos todas) en el plano, se desea mostrar lo siguiente: Si una curva cerrada γ en el plano tiene la propiedad de que en cada uno de sus puntos es tangente a una elipse de la familia $\mathcal{C}$, entonces esta curva es necesariamene una elipse de la familia $\mathcal{C}$ (vea la figura (1)). Este resultado se sigue del teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya prueba echa mano de conocimientos especializados tales como el análisis. En el presente artículo damos una

*Trabajo apoyado por la Coordinación de la Investigación Científica de la Universidad Michoacana.

solución que usa solamente herramienta matemática accesible, incluso, a alumnos de preparatoria.

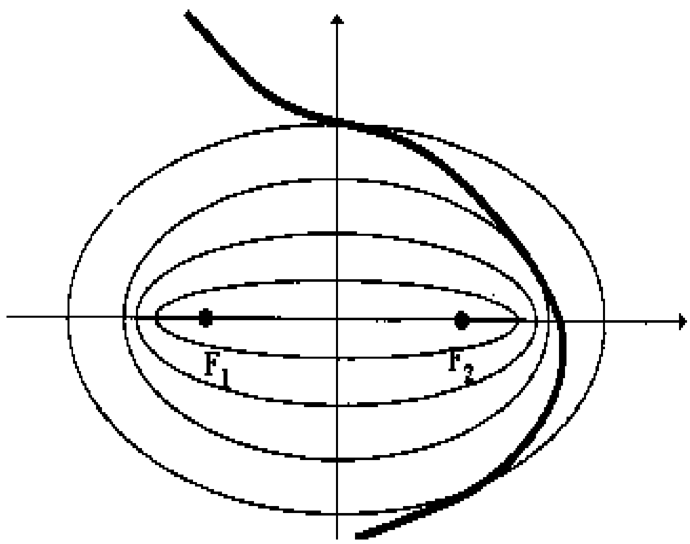

Figura 1: Elipses confocales y una curva tangente a ellas

2. La ecuación diferencial de una familia de elipses confocales

Consideremos la ecuación de la familia de elipses en el plano cuyos focos son los puntos fijos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ (por ende centro en $(0, 0)$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Con eje mayor de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$; pero sujetos a la igualdad $a^2 - b^2 = c^2$. La familia se obtiene haciendo variar el valor de a, ya que entonces b queda obligado a satisfacer $b^2 = a^2 - c^2$.

Veamos qué ecuación diferencial satisface esta familia de elipses:

Derivando con respecto a x en ambos lados de la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Quitando denominadores obtenemos

$$b^2x + a^2yy' = 0,$$

despejando a y'

$$y' = \frac{-b^2x}{a^2y} = -\frac{(a^2 - c^2)x}{a^2y} \tag{2}$$

Esta es la ecuación diferencial que satisfacen todas las elipses en el plano cartesiano con focos fijos F_1 y F_2.
Sin pérdida de generalidad supondremos que $c = 1$.

Reescribiendo a la ecuación (2) con $c = 1$ se obtiene

$$y' = \frac{(1 - a^2)x}{a^2y}. \tag{3}$$

De aquí $a^2yy' = x - a^2x$, despejando a a^2: $a^2 = \frac{x}{x+yy'}$, restando 1 a ambos lados de esta igualdad:

$$a^2 - 1 = \frac{x}{x + yy'} - 1 = \frac{yy'}{x + yy'}.$$

Por lo tanto, regresando a la ecuación (1) para sustituir a a^2 y a $a^2 - 1$ en ella, tenemos

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = \frac{x^2}{\frac{x}{x+yy'}} + \frac{y^2}{\frac{-yy'}{x+yy'}}.$$

Con un poco más de álgebra llegamos a:

$$1 = x(x + yy') - \frac{y(x + yy')}{y'}$$

o, equivalentemente,

$$(x^2 - y^2 - 1)y' - yx + xy(y')^2 = 0, \tag{4}$$

que es una ecuación diferencial (equivalente a la (2)) que satisface la familia $\mathcal{C}$ de elipses.

3. Soluciones a nuestra ecuación diferencial.

Probaremos ahora que cualquier curva cerrada del plano que satisfaga a la ecuación diferencial (4) es una elipse.

Para resolver la ecuación (4) [1] hagamos el siguiente cambio de variable

$$y = \sqrt{z}\,, \qquad y^2 = z\,, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'.$$

Observemos que con el cambio de variable anterior, la ecuación (3) se convierte en

$$\frac{2(1-a^2)x}{a^2} = 2yy' = z'. \tag{5}$$

La ecuación (4) con el cambio de variable queda como

$$(x^2 - z - 1)\frac{z'}{2\sqrt{z}} - x\sqrt{z} + \frac{x\sqrt{z}(z')^2}{4z} = 0$$

de donde,

$$(x^2 - z - 1)z' - 2xz + \frac{x\ (z')^2}{2} = 0. \tag{6}$$

Para continuar la resolución de la ecuación diferencial hagamos un nuevo cambio de variable: $x^2 = t$ o $x = \sqrt{t}$ en la ecuación (6).

Derivemos con respecto a x usando la regla de la cadena

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt}2x = \frac{dz}{dt}2\sqrt{t}, \tag{7}$$

y de aquí

$$\Big(t - z - 1\Big)\frac{dz}{dt}2\sqrt{t} - 2\sqrt{t}z + \frac{\sqrt{t}}{2}\Big(\frac{dz}{dt}\Big)^2 4t = 0.$$

derivando ahora con respecto a t nos queda

$$\Big(1 - \frac{dz}{dt}\Big)\frac{dz}{dt} + \Big(t - z - 1\Big)\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + 2\frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}t + \Big(\frac{dz}{dt}\Big)^2 = 0$$

resolviendo paréntesis y cancelando términos llegamos a:

$$\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\Big(t - z - 1 + 2\frac{dz}{dt}t\Big) = 0 \tag{8}$$

[1] Solución proporcionada por el matemático mexicano Petr Zhevandrov de la Universidad Michoacana

Esta última igualdad da lugar, de manera natural, a dos ecuaciones diferenciales en la variable t, a saber:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad t - z - 1 + 2\,\frac{dz}{dt}t = 0 \tag{9}$$

Es importante señalar que las soluciones de las ecuaciones diferenciales (9) no se corresponden uno a uno con las soluciones de la ecuación (4), ya que los cambios de variable utilizados ($y^2 = z$ y $y^2 = t$) no son uno a uno. Esto ocasiona que aparezcan soluciones *extrañas* como se verá a continuación.

Procedamos a resolver la primera de las ecuaciones anteriores $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, es decir,

$$\frac{dz}{dt} = k \qquad\qquad \text{k, constante}$$

De donde, usando la ecuación (7),

$$k = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2x}\frac{dz}{dx} \qquad\qquad \text{o} \qquad \frac{dz}{dx} = 2xk \tag{10}$$

Sustituyendo esto último en (6) nos queda

$$(x^2 - z - 1)2xk - 2xz + \frac{x(2xk)^2}{2} = 0$$

dividiendo entre $2x$

$$(x^2 - z - 1)k - z + x^2k^2 = 0$$

regresando a $y^2 = z$

$$(x^2 - y^2 - 1)k - y^2 + x^2k^2 = 0$$

reagrupando términos

$$\frac{x^2}{\frac{1}{1+k}} + \frac{y^2}{\frac{k}{-1-k}} = 1. \tag{11}$$

Para que la ecuación anterior sea la de una elipse con focos en los puntos de coordenadas $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ es necesario que se cumpla que $-1 < k < 0$.

Si $k > 0$ podemos escribir a la ecuación (11) así

$$\frac{x^2}{\frac{1}{1+k}} - \frac{y^2}{\frac{k}{1+k}} = 1 \tag{12}$$

que es la ecuación de una hipérbola con focos en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. Esta solución, dicho sea de paso, no es la de una curva cerrada; pero como veremos en el punto 4, hay razones para descartarla.

Si $k < -1 < 0$ podemos escribir a la ecuación (11) así:

$$-\frac{x^2}{\frac{1}{-1-k}} - \frac{y^2}{\frac{k}{1+k}} = 1 \tag{13}$$

que no es la ecuación de curva alguna en el plano porque el lado izquierdo es, en este caso, siempre negativo y por lo tanto, estos valores de k no dan una solución a la ecuación diferencial.

Resolvamos ahora la segunda ecuación diferencial que aparece en (9)

$$t - z - 1 + 2\frac{dz}{dt}t = 0$$

o

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}.$$

Multiplicamos en ambos lados de la ecuación anterior por $\frac{1}{\sqrt{t}}$ para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\right).$$

Observemos que el lado izquierdo de la última igualdad es la derivada (con respecto a t) de $\frac{1}{\sqrt{t}}z$ y por lo tanto, la igualdad anterior queda

$$D_t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}z\right) = \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}$$

integrando obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{t}}z = -\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} + k_1,$$

de donde,

$$z(t) = -1 - t + k_1\sqrt{t}$$

Recordemos que $x^2 = t$ y por lo tanto

$$z(x) = -1 - x^2 + k_1\,x \qquad \text{de donde} \qquad z' = -2x + k_1$$

Como $z = y^2$, de la primera de las igualdades anteriores se tiene que

$$y^2 + x^2 - k_1\,x = 1$$

completando el trinomio en el lado izquierdo

$$(x - \frac{k_1}{2})^2 + y^2 = 1 + (\frac{k_1}{2})^2 \tag{14}$$

que es la ecuación de una circunferencia, con centro en el punto $(\frac{k_1}{2}, 0)$ y radio $\sqrt{1 + (\frac{k_1}{2})^2}$.

Si, por otro lado, en la ecuación (6) sustituímos a z' por $z' = -2x + k_1$, obtenemos

$$x^2 - (\frac{k_1}{2} + \frac{2}{k_1})x + y^2 = 1 \tag{15}$$

comparando las ecuaciones (14) y (15) vemos que $\frac{k_1}{2} + \frac{2}{k_1} = k_1$, de aquí, $k_1^2 + 4 = 2k_1^2$, de donde, $k_1^2 = 4$ y ya de aquí $k_1 = \pm 2$, es decir, para $k_1 = 2$ se trata de una circunferencia con centro en el punto $(1, 0)$ y radio $\sqrt{2}$ y para $k_1 = -2$ se trata de una circunferencia con centro en $(-1, 0)$ y radio $\sqrt{2}$.

Este caso presenta circunstancias mas bien raras o un tanto patológicas; aclararemos esta situación en el punto 4.

Por lo pronto diremos que buena parte de los desarrollos efectuados en la presente sección se podrían haber omitido si nuestro único interes hubiera sido probar lo enunciado en la introducción; sin embargo preferimos hacerlo sin suprimir ese análisis (inegablemente ilustrativo) ya que él nos muestra algunos aspectos geométricos interesantes por sí mismos, que de otra forma no quedarían resaltados.

4. Sólo elipses

Recordemos que hasta el momento se han encontrado las soluciones de las ecuaciones diferenciales en (9), pero como veremos a continuación no todas estas soluciones son soluciones de la ecuación diferencial (4), esto se debe a los dos cambios de variables realizados.

Descartemos soluciones extrañas en la primera ecuación diferencial:

Según la ecuación (10) $z' = 2xk$, si sustituímos a z' por su equivalente en la ecuación (5) para obtener

$$\frac{2(1 - a^2)x}{a^2} = 2xk$$

entendida esta igualdad como una identidad, es decir, válida para toda x en el intervalo $[-a, a]$. Por lo tanto, el valor de k queda obligado: $k = \frac{1-a^2}{a^2}$ (es decir, k depende del parámetro a.

Observemos primero que este valor de k es siempre mayor que -1: Supongamos que no fuera así, es decir, supongamos que para algunos valores de a, $-1 \geq \frac{1-a^2}{a^2}$, de aquí, $-a^2 \geq 1-a^2$, de donde, llegaríamos al absurdo de que $0 \geq 1$.

Lo anterior nos muestra que no teníamos que considerar la ecuación (13). Es decir, k tiene que ser mayor que -1.

Por otro lado, veamos qué necesitamos para que $k < 0$:

$$\frac{1-a^2}{a^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < a^2 \Leftrightarrow 1 < a$$

ya que $a > 0$.

Lo anterior no es de extrañar ya que al inicio de esta sección supusimos que la longitud del semi-eje focal (c) era igual a uno y por lo tanto, la longitud del semi-eje mayor (a) debe ser mayor que uno. Esto nos dice que tampoco teníamos que considerar el caso $k > 0$, es decir, la ecuación (12) tampoco tiene cabida.

Finalmente, aclaremos el *misterio* de las dos circunferencias obtenidas al resolver la segunda de las ecuaciones en (9).

Las soluciones de la segunda ecuación diferencial en (9) están dadas por las circunferencias cuyas ecuaciones estan en (14) y (15)

De la ecuación (3) tenemos que $z' = -2x + 1$, si sustituímos esto en la ecuación (5) obtenemos la siguiente identidad

$$\frac{2(1-a^2)x}{a^2} = -2x + k_1$$

de aquí, $k_1 = 0$ y $\frac{1-a^2}{a^2} = -1$ lo cual implica que $1 = 0$. Esto nos dice que, las circunferencias dadas por (14) son solución de la segunda ecuación diferencial en (9), pero no de la ecuación diferencial (4).

En resumen: Sólo las elipses

$$\frac{x^2}{\frac{1}{1+k}} + \frac{y^2}{\frac{k}{-1-k}} = 1 \qquad (-1 < k < 0)$$

dadas en la ecuación (11) son soluciones de nuestra ecuación diferencial (4).

5. Conclusiones.

Lo que aparentemente nos estaba llevando a contradecir al "Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad"de las ecuaciones diferenciales ([vea Hartman]), el punto (4) nos hace ver que sólo era eso, una apariencia, por lo que dicho teorema queda, por lo que a este trabajo respecta, sano y salvo, es decir, las únicas curvas cerradas en el plano que satisfacen a la ecuación diferencial (4) de una familia de elipses, son ellas mismas.

Lo desarrollado en este artículo muestra que hay conceptos que, por una parte, pueden ser resueltos fácilmente con herramienta matemática avanzada; mas sin embargo, es posible reescribir casos particulares de estos conceptos con herramientas elementales para hacerlos accesibles a estudiantes de preparatoria.

Referencias

[1] Philip Hartman, Ordinary Differential Equations. Second Edition. Birkhauser, 1982.