

Coreografías para ballet de estrellas

Martin Celli

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina,
México, D.F. 09340, México
celli@xanum.uam.mx

Alegres coreografías hermosas y caprichosas, minuciosas y misteriosas, puestas en escena en demostraciones matemáticas o como movimientos armoniosos en la pantalla de una computadora que simula un sistema de planetas. Fascinantes coreografías ordenadas e imprevisibles, cuyos secretos inspiraron y resistieron a los matemáticos desde Lagrange y nos regalaron un resultado tan simple como espectacular de la mecánica celeste: el poderoso teorema de Marchal, que nos asegura que siempre se puede juntar dos configuraciones dadas de un conjunto de estrellas por una solución de las ecuaciones de Newton.

1. Problemas “más o menos resueltos”

Con esta expresión que quiere decir lo que quiere decir, Henri Poincaré resume, en *La Ciencia y el Método* [11], la imposibilidad de encontrar, en general, una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial dada. Se puede decir también que la mayor parte de las ecuaciones diferenciales no son integrables. Para un físico, esto quiere decir que conocer las leyes que rigen un sistema mecánico y conocer los parámetros que lo caracterizan no es suficiente para determinar su evolución en función del tiempo.

Tal afirmación puede sorprender a primera vista, ya que los cursos y libros de análisis y física casi siempre empiezan con ecuaciones y problemas integrables, y a veces se dedican exclusivamente a ellos. Este es el caso, por ejemplo, de la ecuación de Newton:

$$P'' = m \frac{\overrightarrow{PO}}{\|\overrightarrow{PO}\|^3},$$

que caracteriza el movimiento de un cuerpo puntual de posición P , que depende del tiempo t , atraído por un planeta fijo de masa m ubicado en O , según las leyes de la gravitación. Se puede resolver esta ecuación sacando partido de su invariancia por las rotaciones de centro O y la conservación de la energía y del momento angular, y obtener una fórmula matemática que expresa P en función de t , m , y de las condiciones iniciales $P(0)$ y $P'(0)$. De esta fórmula se deduce que el movimiento es una cónica: elipse, parábola, hipérbola, según el signo de la energía. Este razonamiento también permite calcular el movimiento de un sistema de dos planetas, usando el hecho de que su centro de inercia tenga un movimiento rectilíneo uniforme.

Desgraciadamente, para la mayor parte de las ecuaciones diferenciales, no disponemos de un número suficiente de simetrías y de leyes de conservación, y no existen tales fórmulas. En mecánica celeste, esto ocurre tan pronto como consideremos un sistema de $N \geq 3$ cuerpos en interacción gravitacional [4]. En este caso, hay que tomar en cuenta N ecuaciones de Newton, cada una expresando la aceleración P_i'' de un cuerpo i en función de las posiciones P_j y de las masas m_j de los demás cuerpos ($j \neq i$):

$$P_i'' = \sum_{j \neq i} m_j \frac{\overrightarrow{P_i P_j}}{\|\overrightarrow{P_i P_j}\|^3}.$$

Se puede demostrar que no existe una fórmula que exprese cada P_i en función de t , de las masas y de las posiciones y de las velocidades iniciales. Por supuesto, usando una computadora, se puede calcular, para cada valor de estos parámetros, una aproximación de los $P_i(t)$. También se puede calcular la solución como una serie de potencias que converge más o menos rápido. Por eso, el problema está *más o menos resuelto*. Pero esto no contestaría algunas preguntas cualitativas [6] tales como la existencia de órbitas periódicas o la estabilidad del sistema solar [9]. Si queremos *comprender* las soluciones de las ecuaciones de Newton, tenemos que resignarnos a buscar, con toda humildad, soluciones “simples” o “simétricas” del problema de los $N \geq 3$ cuerpos, y luego intentar comprender cómo las demás soluciones se organizan alrededor de las soluciones simétricas, por ejemplo preguntándonos qué propiedades de estas soluciones se conservan cuando modificamos un poco los valores de las masas o de las posiciones o de las velocidades iniciales.

De cierto modo, la solución más “simple” del problema de los dos cuerpos es la solución circular: para velocidades iniciales convenientes, la distancia entre los dos cuerpos queda constante a lo largo del mo-

vimiento. Soluciones parecidas existen para $N \geq 3$ cuerpos, llamadas equilibrios relativos. Un movimiento es un equilibrio relativo si las distancias mutuas $\|\overrightarrow{P_i P_j}\|$ son constantes. Esto equivale a decir que la configuración es constante módulo las rotaciones. Los equilibrios relativos sólo se pueden obtener para configuraciones particulares. Estas configuraciones son conocidas para $N = 3$ cuerpos. Debemos a Leonhard Euler el cálculo de las configuraciones de equilibrio relativo de tres cuerpos en una misma recta que se mueve a lo largo del tiempo [5]. A estas soluciones tenemos que añadir otro equilibrio relativo de tres cuerpos, descubierto en 1772 por Joseph-Louis Lagrange, en el cual los tres cuerpos forman un triángulo equilátero. Observemos que, para $N \geq 4$, la determinación de los equilibrios relativos es un problema clásico y difícil, que aparece en varios temas de la mecánica celeste [10]. Hasta ahora, los equilibrios relativos de cuatro masas sólo pudieron ser calculados en casos muy particulares (masas todas iguales, algunas masas iguales a cero, dos masas iguales y una hipótesis de convexidad, masas $(x, -x, y, -y)$, tres masas iguales y una hipótesis de simetría, etc.). De hecho, sólo en 2004, M. Hampton y R. Moeckel pudieron mostrar, gracias a una computadora, pero rigurosamente, que los equilibrios relativos asociados a cualquier sistema de $N = 4$ masas positivas no es infinito. Este resultado resuelve, en el caso $N = 4$, un problema planteado por J. Chazy desde 1918 y propuesto de nuevo por el medallista Fields, S. Smale, en su lista de problemas para el siglo 21 [13]: ¿es finito el número de equilibrios relativos asociados a un conjunto de masas dado?

Fijémonos ahora en la solución de Lagrange para $N = 3$, cuando las masas son iguales. En esta solución, los tres cuerpos se mueven en una misma curva: el círculo circunscrito al triángulo equilátero formado por los tres cuerpos. Esta propiedad nos va a guiar en nuestra investigación de soluciones “simples” del problema de los N cuerpos, pero un poco menos simples que los equilibrios relativos. Llamemos coreografías a las soluciones de las ecuaciones de Newton, donde los N cuerpos se siguen en una misma curva, con desfases iguales entre los cuerpos. En otros términos, existe T tal que, si en un instante t , los cuerpos $1, \dots, N$ tienen las posiciones P_1, \dots, P_N , entonces en el instante $t + T$ el cuerpo 1 está en P_2 , el cuerpo 2 está en P_3 , etc. La solución de Lagrange es una coreografía. De hecho, si cambiamos el triángulo por un polígono regular de $N \geq 4$ masas iguales, seguimos teniendo una coreografía. Pero ¿existen otras coreografías?

Sólo más de dos siglos después del descubrimiento de la solución de Lagrange en 1772 fue encontrada una segunda coreografía de tres cuerpos. En esta coreografía, tres cuerpos de masas iguales se siguen en una curva parecida a un “ocho” [1] (figura 1). El “ocho” fue descubierto primero numéricamente, gracias a una computadora, por C. Moore en 1993. En 1999, A. Chenciner y R. Montgomery encontraron una demostración matemática rigurosa de su existencia. Después, varias coreografías de masas iguales fueron puestas en evidencia, arbitrariamente complejas [1] [12] [8] (figuras 2 y 3), ¡a veces con centenas de cuerpos! Algunas de estas soluciones fueron obtenidas analíticamente. Las demás sólo fueron encontradas numéricamente, en particular gracias a los trabajos de C. Simó, autor del término “coreografía”.

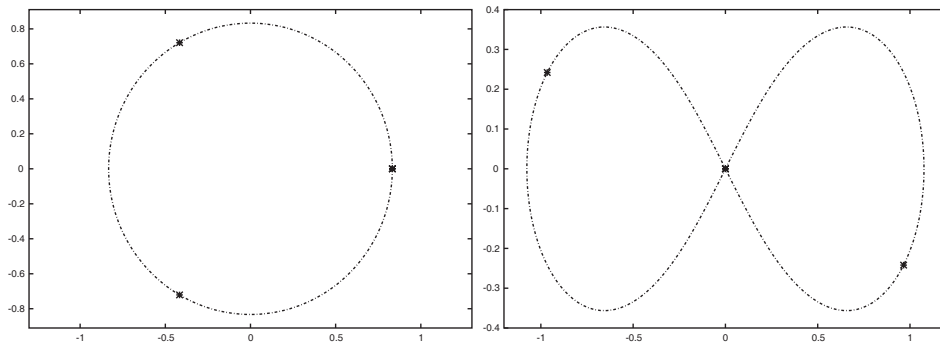


Figura 1: Las soluciones de Lagrange y Moore-Chenciner-Montgomery: tres cuerpos de masas iguales [12].

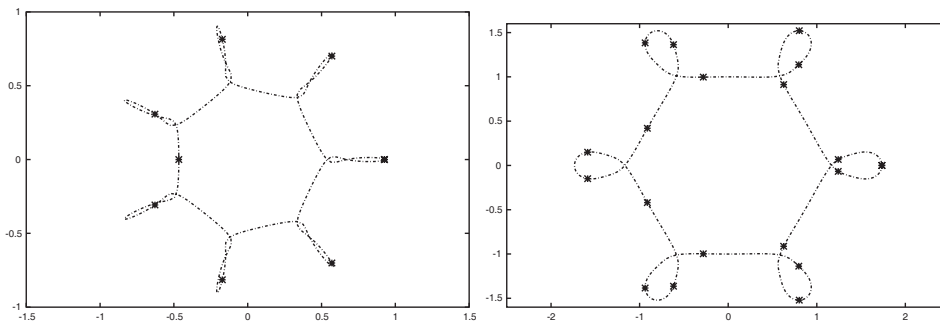


Figura 2: Dos coreografías con masas iguales, de 8 y 19 cuerpos [12].

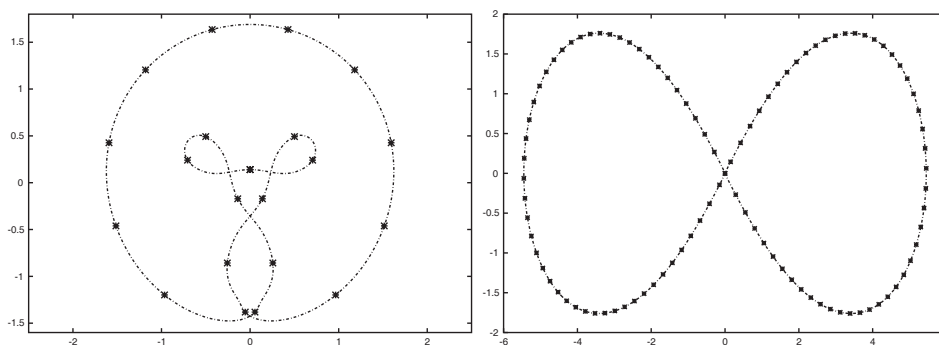


Figura 3: Dos coreografías con masas iguales, de 21 y 99 cuerpos [12].

2. La puesta en práctica de una estrategia centenaria

Sorprendentemente, la clave de la existencia de las coreografías se encuentra en una nota publicada por... ¡Poincaré, en 1896! Se trata de caracterizar soluciones particulares de las ecuaciones de Newton como mínimos de una función definida sobre el gigantesco espacio de todos los movimientos periódicos que satisfacen algunas restricciones [3].

La idea de caracterizar movimientos como mínimos es clásica en mecánica. Examinemos, por ejemplo, una partícula constreñida a moverse en una superficie \mathcal{S} , despreciando la gravitación. Se puede mostrar que para dos instantes t_1 y t_2 suficientemente cercanos, la curva recorrida durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ minimiza la longitud entre todas las curvas contenidas en esta superficie que tienen los mismos extremos $P(t_1)$ y $P(t_2)$ que esta trayectoria. En otros términos, deformando un poco esta curva, pero de modo que la nueva curva obtenida siga contenida en la superficie y tenga los mismos extremos, siempre obtendremos una curva de mayor longitud. Tal trayectoria que minimiza localmente la longitud se llama geodésica.

Más generalmente, existe toda una clase de sistemas mecánicos llamados conservativos cuyos movimientos se puede caracterizar como los puntos críticos (que son los puntos donde las derivadas parciales se anulan, y que incluyen los mínimos) de una función llamada funcional de acción. Un funcional de acción no está definido en un conjunto de números tal como el conjunto \mathbb{R} de los reales o en un espacio vectorial como el plano o el espacio físico de dimensión 3 donde vivimos, sino en un conjunto mucho más grande: ¡el conjunto de todas las trayectorias

posibles para este sistema! De modo general, el término de funcional se refiere a una función definida en un espacio de dimensión infinita. Así, mientras que un punto del plano tiene dos coordenadas (abscisa y ordenada), no se puede caracterizar los elementos de un espacio de trayectorias por un número finito de coordenadas.

Las ecuaciones de Newton en particular son conservativas, y todas las coreografías conocidas fueron obtenidas como mínimos de su funcional de acción. Por eso vamos a definir de modo un poco más técnico el espacio de las trayectorias en el caso de movimientos periódicos de N cuerpos, y el funcional de acción asociado a las ecuaciones de Newton. Sea X el conjunto de las configuraciones de N partículas sin colisiones. Los elementos de X son los sistemas de N puntos distintos del espacio físico de dimensión 3, que podemos identificar con \mathbb{R}^3 . Formalmente:

$$X = \{(P_1, \dots, P_N) \in (\mathbb{R}^3)^N, \forall i \neq j \in \{1, \dots, N\}, P_i \neq P_j\}.$$

Este conjunto permite definir el espacio E de los movimientos periódicos de periodo T de un sistema de N cuerpos:

$$E = \{R : \mathbb{R} \rightarrow X, \forall t \in \mathbb{R}, R(t) = R(t + T)\}.$$

Así, el funcional de acción asociado a las ecuaciones de Newton es formalmente la función $S: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$S(R) = S(P_1, \dots, P_N) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2=t_1+T} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|P'_i(t)\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|P_i(t) - P_j(t)\|} \right) dt.$$

A pesar de su apariencia austera, esta expresión es el promedio, en un periodo, de magnitudes físicas concretas que se prestan bastante bien al cálculo. El primer término de la integral no es otro que la energía cinética del sistema, suma de las energías cinéticas de los N cuerpos. Y el segundo término es menos la energía potencial, suma de las energías potenciales de todos los conjuntos de dos cuerpos. Podemos caracterizar simplemente la energía potencial de un sistema de dos cuerpos como una magnitud proporcional a las dos masas e inversamente proporcional a la distancia. Así, con estas definiciones, se puede definir técnicamente una coreografía como un elemento del espacio E que minimiza el funcional S .

Una función continua y positiva en un intervalo de \mathbb{R} tiene al menos un mínimo, que la función alcanza en el interior de este intervalo, o en sus extremos. Vamos a aplicar una propiedad análoga a nuestro funcional S , cuya positividad es fácil de obtener, y cuya continuidad (una noción más delicada en dimensión infinita) vamos a admitir, siguiendo a Poincaré y Marchal. ¿A qué se parecen posibles mínimos en los extremos para nuestro problema? A movimientos donde las distancias entre algunos cuerpos son infinitas o a movimientos donde unos cuerpos chocan contra otros. Por supuesto, estos mínimos en el infinito o con colisiones no describen movimientos periódicos físicos de los N cuerpos. Por lo tanto, tenemos que encontrar un modo de evitarlos.

¿Cómo evitar los mínimos en el infinito? En el caso de una coreografía, como cada cuerpo va a tomar el lugar del cuerpo que lo precede, se puede mostrar que si la distancia entre dos cuerpos es infinita, el primer cuerpo va a recorrer una distancia infinita antes de tomar el lugar del otro. Por eso necesitará una velocidad infinita. Así, el término de energía cinética tendrá un valor infinito. Por consiguiente, ¡el valor de S también será infinito, y S no podrá ser minimal! Además de las coreografías, muchas soluciones del problema de los N cuerpos tienen simetrías o propiedades topológicas (por ejemplo relacionadas con el número de vueltas alrededor del vector nulo que da cada vector $\overrightarrow{P_i P_j}$ a lo largo de un periodo) que les impiden ser mínimos en el infinito.

Evitar los mínimos con colisiones es mucho más difícil. El gran Poincaré sólo pudo superar esta dificultad para un problema cercano: si cambiamos la potencia 3 por una potencia 4 en los denominadores de las ecuaciones de Newton, la integral de acción S de un movimiento con colisión es infinita. Así, no puede ser minimal. En la primera demostración del resultado de Chenciner-Montgomery, se encuentra un movimiento sin colisión que no es el mínimo de S , pero cuya integral de acción es inferior a la de cualquier movimiento con al menos una colisión. Esto es suficiente para concluir que el mínimo de S no puede tener colisiones. Las colisiones también aparecen en un problema análogo a la investigación de soluciones periódicas. Sean $P_1^1, P_2^1, \dots, P_N^1$ las posiciones (elementos del plano o del espacio) en un instante t_1 de N cuerpos de masas m_1, \dots, m_N positivas dadas y sean $P_1^2, P_2^2, \dots, P_N^2$ sus posiciones en un instante t_2 . ¿Existe una solución de las ecuaciones de Newton (en el plano o en el espacio) compatible con estas masas y estas posiciones de los N cuerpos en los instantes t_1 y t_2 ? La respuesta, afirmativa, es el propósito del teorema de C. Marchal, demostrado

en 2001. Primero presentado como un mejoramiento de la prueba de Chenciner-Montgomery, este resultado, de alcance muy general, luego permitió mostrar la existencia de nuevas clases de coreografías. Su prueba es extremadamente astuta. Examinemos un posible mínimo de S que tiene colisiones. Ya que es difícil evaluar S para un movimiento cercano a este mínimo, vamos a calcular el promedio de S en un conjunto de movimientos adecuadamente escogidos, ubicados cerca de este mínimo. De hecho, este promedio es inferior al “mínimo” propuesto. Por consiguiente, podemos afirmar que al menos uno de los movimientos escogidos tiene una acción inferior... ¡aunque ni siquiera sepamos cuál puede ser este movimiento! Pero no necesitamos esta información: sabemos ahora que el mínimo de S se alcanza por un movimiento que no tiene colisiones. Así, se trata de una solución de las ecuaciones de Newton.

3. Polígonos desencadenados y coreografías perversas

Muchos trabajos fueron inspirados por el descubrimiento de las coreografías. Así, para los que no quisieran ver las coreografías como mínimos de una funcional, recientes trabajos de Marchal, y luego A. Chenciner, J. Féjoz y R. Montgomery, proponen otro enfoque para encontrarlas. Se trata, por ejemplo, de deformar y continuar la solución de Lagrange vista en un cierto sistema de coordenadas del espacio en rotación. Esto permite definir familias de soluciones periódicas y, entre ellas, el “ocho” de Moore-Chenciner-Montgomery. Esta técnica también se aplica si, en vez de considerar la coreografía de Lagrange, se considera un polígono regular con masas iguales, que recorre un círculo. En este caso, podremos obtener una coreografía formada por una cadena de varios “rizos”, mientras que el “ocho” sólo tenía un rizo. Así, algunas coreografías pueden ser vistas como “polígonos desencadenados”.

El argumento de simetría en las pruebas de existencia de coreografías requiere masas iguales, para que las ecuaciones de Newton queden invariantes por permutación de los cuerpos. Un problema abierto consiste en determinar si pueden existir coreografías con masas distintas o, según los términos de Chenciner, “coreografías perversas”. Este calificativo viene del hecho de que una coreografía con masas distintas siga siendo una solución de las ecuaciones de Newton si cambiamos las masas m_1, \dots, m_N por masas iguales al promedio $m = (m_1 + \dots + m_N)/N$.

Así, el solo conocimiento del movimiento no es suficiente para determinar los valores de las masas. Hasta ahora, la respuesta, negativa, sólo fue encontrada, por Chenciner, para cuatro cuerpos y, en el plano, para cinco cuerpos. Trabajando en esta cuestión [2], pude encontrar un problema parecido al problema de los N cuerpos en el cual se puede demostrar que las coreografías perversas no existen para ningún valor de N . Para eso, tuve que cambiar la potencia 3 en los denominadores de las ecuaciones de Newton por una potencia 2, en vez de la potencia 4 examinada por Poincaré en la sección anterior. Sorprendentemente, este resultado se aplica a un problema físicamente diferente: ¡el movimiento de un fluido plano incompresible sin viscosidad! Tal fluido puede ser descrito como un conjunto de N remolinos o vórtices, cuyas posiciones P_1, \dots, P_N y vorticidades $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ satisfacen las ecuaciones de Helmholtz:

$$P'_i = r \left(\sum_{j \neq i} \Gamma_j \frac{\overrightarrow{P_j P_i}}{\|\overrightarrow{P_j P_i}\|^2} \right),$$

donde r es la rotación de 90 grados. Así, pude mostrar que, para todo N , no hay coreografías perversas de N vórtices. El estudio de los sistemas de N vórtices, una de las ramas más ricas de la mecánica de fluidos, tiene muchas semejanzas formales con el problema de los N cuerpos, y varias técnicas matemáticas se aplican a estos dos problemas con el mismo éxito. Pero esto es otra historia [7].

Referencias

- [1] B. Casselman. *A new solution to the three-body problem and more*. <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/orbits1.html>
- [2] M. Celli. *Sur les distances mutuelles d'une chorégraphie à masses distinctes*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I **337**, 715-720 (2003).
- [3] A. Chenciner. *Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem: from homology to symmetry*. Proceedings of the ICM (Beijing, agosto de 2002), vol. 3, 279-294. Higher Education Press of China (2002).
- [4] A. Chenciner. Artículo *Three-body problem* de la enciclopedia virtual Scholarpedia. http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem

- [5] A. García. *Euler y la mecánica celeste*. Miscelánea Matemática **45**, 67-86 (2007).
- [6] E. A. Lacomba. *Los sistemas dinámicos. ¿Qué son y para qué sirven?* Miscelánea Matemática **32**, 39-50 (2000).
- [7] E. A. Lacomba. *Vórtices en fluidos y variable compleja*. Carta informativa de la SMM **57**, 1-5 (2008).
- [8] C. Mc Dowell. *Applet for displaying animations of n-body orbits*. <http://www.soe.ucsc.edu/~charlie/3body>
- [9] E. Pérez-Chavela. *Caos en el sistema solar*. Miscelánea Matemática **26**, 59-70 (1997).
- [10] E. Pérez-Chavela. *La conjetura de Saari, una nota histórica y algo más*. Miscelánea Matemática **41**, 1-10 (2005).
- [11] H. Poincaré. *La Ciencia y el Método*. Gutemberg de José Ruiz, Madrid (1910). Espasa Calpe, Madrid (1963).
- [12] C. Simó. *Choreographies of the planar three-body problem*. <http://www.maia.ub.es/dsg/3body.html>
N-body choreographies.
<http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>
- [13] S. Smale. *Mathematical Problems for the Next Century*. Math. Intelligencer **20**, no 2, 7-15 (1998).