Miscelánea Matemática **33** (2001) 31–41 SMM

Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares

Eugenio P. Balanzario
Instituto de Matemáticas, UNAM-Morelia
Apartado Postal 61-3 (Xangari)
58089 Morelia Michoacán
MÉXICO
ebg@matmor.unam.mx

1. Introducción.

En esta nota vamos primero a repasar brevemente la historia inicial de la función zeta de Riemann. Esta historia está muy estrechamente ligada al trabajo matemático de L. Euler y en nuestra exposición, nosotros seguimos de cerca a R. Ayoub [3]. Este es el contenido de la segunda sección §2. Como segundo objetivo, vamos a exponer un método elemental para establecer la bien conocida fórmula

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \tag{1}$$

así como otras fórmulas del mismo tipo. Esto es, nosotros vamos a evaluar la función zeta de Riemann en los enteros positivos pares. El término elemental significa que no usamos ningún concepto más avanzado que el cálculo integral. Este segundo objetivo es la parte técnica de la nota, en donde el lector tendrá que trabajar con esmero para poder seguir nuestros cálculos. En la última sección §7, retomamos el carácter narrativo de la nota al exponer los problemas relacionados con el título de nuestro trabajo, que aún hoy en día todavía permanecen sin solución.

2. La función zeta.

Las series infinitas ocurren en matemáticas desde hace siglos. Así por ejemplo, Arquímides (287–212 a.C.) pudo probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

es convergente. El lector reconocerá por supuesto, que éste es un caso de lo que hoy llamamos "la serie geométrica". Por otro lado, N. Oresme (1323-1382) probó que la así llamada serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente. En 1650, P. Mengoli planteó el problema de evaluar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

en caso de que ésta fuera convergente. En la actualidad, nostros diriamos que el problema consiste en la evaluación de $\zeta(2)$, ya que según explicaremos más adelante, ésta es la notación moderna para designar la serie que le interesó a Mengoli. En 1655, J. Wallis calculó el valor de $\zeta(2)$ con tres cifras decimales. ¡Usando la suma que define a $\zeta(2)$, esto requiere considerar los primeros 1071 términos! Uno se pregunta entonces si no hay formas más eficientes de proceder para evaluar $\zeta(2)$.

También se ocuparon del problema de evaluar $\zeta(2)$ matemáticos como G.W. Leibniz, James Bernoulli, John Bernoulli y C. Goldbach entre otros.

En 1730, L. Euler comenzó su trabajo sobre la función zeta de Riemann. Esta función está definida para aquellos valores de la variable real $x > 1$ mediante la ecuación

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \qquad (2)$$

Antes de seguir el hilo de nuestra historia, hagamos un paréntesis, para explicar el porqué la función zeta recibe el apelativo de Riemann y no el de Euler. Según veremos, las contribuciones de Euler al estudio de $\zeta(x)$ son interesantes, profundas e importantes. En el artículo [3], R. Ayoub examina estas contibuciones con detalle. Por otra parte, a mediados del siglo XIX, B. Riemann consideró la función zeta como una función de variable compleja, sin restringir a que su argumento tomara sólo valores reales, como lo había hecho Euler en su tiempo y lo haremos nosotros en esta nota. Al permitir Riemann que el argumento de la función zeta tomara valores complejos, se abrió un mundo de posibilidades que la capacidad visionaria de Riemann pudo vislumbrar con claridad y que aún hoy en día, 150 años después, todavía no acabamos de explorar. Esta es la razón por la cual el nombre completo de la función zeta es: "la función zeta de Riemann".

Continuemos ahora nuestro relato sobre Euler y $\zeta(2)$. En 1731, Euler probó que

$$\zeta(2) \;=\; \big(\log 2\big)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n^2}\,.$$

(Nota muy al margen: ¡en esta fórmula aparece el 2 seis veces!) Esta expresión para $\zeta(2)$, es decir, la suma que aparece en el lado derecho, es una serie que converge mucho más rapidamente que la serie original que define a $\zeta(2)$. En efecto, los términos de dicha serie decrecen exponencialmente a cero. Con esta expresión para $\zeta(2)$, es posible obtener las tres primeras cifras decimales de $\zeta(3)$ usando sólo 6 términos. ¡Compárese esto, con los 1071 términos de antes! De esta forma, Euler dedujo que $\zeta(2)$ es aproximadamente 1,644934, para lo cual es necesario considerar sólo 17 términos en esta nueva expresión para $\zeta(2)$.

En 1734, Euler descubrió la fórmula de factorización para la función seno:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2\right\}.$$

Al desarrollar en serie de Taylor ambos lados de la identidad anterior y comparar los coeficientes correspondientes, Euler pudo resolver el problema que Mengoli planteara 84 años atrás. ¡Y más! Euler había determinado los valores exactos de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc. En efecto,

$$\zeta(2) \;=\; \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) \;=\; \frac{\pi^4}{90}, \qquad \text{etc.}$$

En general, Euler había descubierto que

$$\zeta(2\ell) \;=\; (-1)^{\ell+1}\,\frac{(2\pi)^{2\ell} B_{2\ell}}{2(2\ell)!}, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

en donde $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y $B_{2\ell}$ son ciertos números racionales, los así llamados números de Bernoulli.

En 1737, Euler demostró que (ver [2, Teorema 8.56])

$$\zeta(x) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^x}\Big)^{-1}, \qquad x > 1, \tag{4}$$

en donde el producto se extiende sobre todos los números primos p. Esta factoriazación de la función zeta, le permitió a Euler dar una nueva demostración del resultado clásico de que existen infinitos primos. En efecto, puesto que la serie armónica es divergente, el resultado se sigue haciendo que $x \to 1$. El producto en el lado derecho de (4) no puede tender a infinito (cuando $x \to 1$) a menos que exista una infinidad de primos.

Los trabajos de Euler sobre $\zeta(x)$ culminan en 1749 con el descubrimiento de la ecuación funcional para la zeta de Riemann:

$$\zeta(x) = 2\,(2\pi)^{x-1}\,\Gamma(1-x)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{x\pi}{2}\Big)\,\zeta(1-x)\,.$$

Euler no aseveró el haber demostrado esta ecuación. Él sólo se limitó a verificar su validéz para distintos valores de x. Cien años después de este descubrimiento, Riemann dió dos demostraciones distintas de esta ecuación funcional.

3. Fórmula alternativa.

Desde Euler y a travez de los años, se han propuesto una variedad de pruebas distintas, tanto de la serie (1), ver por ejemplo [6], como también de la fórmula general (3) (ver [1, 4, 5], entre muchos otros).

Nosotros ahora queremos probar la siguiente fórmula

$$\zeta(2\ell) = -\frac{(-4)^\ell}{4^\ell - 2}\,(2\pi)^{2\ell}\,p_{2\ell+1}\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

en donde $p_{2\ell+1}(x)$ son ciertos polinomios definidos en forma recursiva (ver la Definición 7 que aparece más abajo). En la sección §4 vamos a probar la fórmula (5) usando un método elemental. La prueba que ofrecemos es completa. Sin embargo, hemos abreviado algunas demostraciones de lemas bien conocidos del curso de análisis básico.

En nuestro enfoque, nosotros no hacemos ninguna referencia a los números o a los polinomios de Bernoulli. En su lugar, nosotros hemos definido polinomios cuyos coeficientes de Fourier son (esencialmente) los términos de las series que queremos evaluar. En la sección §6, modificamos nuestro método de cálculo para obtener una familia de fórmulas que incluye a la fórmula de Gregory.

En [10], el lector puede encontrar un tratamiento similar al de esta nota sobre el problema de evaluar $\zeta(2\ell)$. Además, [10] contiene información interesante sobre el problema de evaluar $\zeta(2\ell+1)$ con $\ell \in \mathbb{N}$ (ver §7, al final de esta nota).

4. Demostración de (5).

Después de las consideraciones generales, pasamos ahora a demostrar la fórmula (5). Para empezar, definamos (con $x > 1$) la siguiente función auxiliar

$$\phi(x) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\, \frac{1}{j^x}\,. \tag{6}$$

Lema 1. *Si $\zeta(x)$ es como en (2) y $\phi(x)$ como en (6), entonces*

$$\zeta(x) \;=\; \frac{2^x\,\phi(x)}{2^x - 2}\,.$$

Demostración: Es suficiente observar que

$$\big(1 - \frac{2}{2^x}\big)\zeta(x) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^x} \;-\; 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^x} \;=\; \phi(x)\,.$$

□

Nuestro trabajo ahora es la evaluación de $\phi(2\ell)$ para $\ell \in \mathbb{N}$.

Definición 7. En esta definición las integrales indefinidas se toman con la constante de integración igual a cero. Sea $p_2(x) = x^2/2$. Si $p_{2\ell}(x)$ ya está definido, sea

$$p_{2\ell+1}(x) \;=\; \int p_{2\ell}(x)\, dx\,.$$

Si $p_{2\ell+1}(x)$ ya está definido, sea

$$p_{2\ell+2}(x) \;=\; \int p_{2\ell+1}(x)\,dx \;-\; p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big)\cdot x^2\,.$$

En la sección §5 hemos calculado los primeros términos de la sucesión de polinomios $p_\ell(x)$. El siguiente teorema, junto con el Lema 1, producen la fórmula (5).

Teorema 1. *Sea $\phi(x)$ como en (6) y sea $p_{2\ell+1}(x)$ como en la Definición 7. Sea $\ell > 0$ un número entero. Entonces*

$$\phi(2\ell) \;=\; (-1)^{\ell+1}\,(2\pi)^{2\ell}\,p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big)\,.$$

El orden en que aparecen los siguientes lemas es el mismo orden en que los vamos a aplicar en la demostración del Teorema 1.

Lema 2. *Si $p_{2\ell}(x)$ es como en la Definición 7 entonces $p_{2\ell}(0) = 0$.*

Para el siguiente lema, sea, con $k = 2, 3, \ldots$

$$F_k(x) \;=\; 1 + 2\sum_{j=1}^{k-1}\big(1-\frac{j}{k}\big)\cos(2\pi jx) \;=\; \frac{1}{k}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi kx)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right\}^2. \qquad (8)$$

En la literatura sobre series de Fourier, los polinomios trigonométricos (8) se conocen como “el núcleo de Fejer”. Lo que es interesante sobre el núcleo de Fejer, es que aproxima a la “delta de Dirac”. Esto es precisamente el contenido del siguiente lema.

Lema 3. *Si $h(x)\colon[-1/2,1/2]\to\mathbb{R}$ es continua en $x=0$ entonces*

$$h(0) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{-1/2}^{+1/2} h(x)\;F_k(x)\,dx\,.$$

Demostración: Ver [8, capítulo 12, sección §3]. □

De la primera igualdad en (8) resulta que la integral de $F_k(x)$ es igual a uno. Decimos entonces que $F_k(x)$ tiene una masa unitaria en $[-1/2, 1/2]$. En términos intuitivos el Lema 3 se cumple ya que el núcleo de Fejer “concentra la masa unitaria en $x = 0$” cuando $k\to\infty$. La delta de Dirac es el caso límite, esto es, una masa unitaria concentrada en $x = 0$.

Lema 4. *Para* $\ell \in \mathbb{N}$ *sea* $I_{2\ell}(j) = \int_{-1/2}^{+1/2} p_{2\ell}(x)\cos(2\pi jx)\,dx$. *Entonces*

$$I_{2\ell}(j) \;=\; \frac{(-1)^{j+\ell+1}}{(2\pi j)^{2\ell}}\,.$$

Demostración: Integrando por partes, se obtiene que $I_{2\ell+2}(j)$ es igual a

$$\int_{-1/2}^{+1/2} p_{2\ell+2}(x)\cos(2\pi jx)dx = -\frac{1}{2\pi j}\int_{-1/2}^{+1/2} p'_{2\ell+2}(x)\,\mathrm{sen}(2\pi jx)dx\,. \quad (9)$$

Pero $p'_{2\ell+2}(x) = p_{2\ell+1}(x) - 2\,p_{2\ell+1}(1/2)\cdot x$. Por lo tanto se puede dividir el cálculo de la última integral en dos partes. Integrando por partes nuevamente obtenemos

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{-1/2}^{+1/2} p_{2\ell+1}(x)\,\mathrm{sen}(2\pi jx)\,dx = \frac{2(-1)^j}{(2\pi j)^2}\,p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big) - \frac{I_{2\ell}(j)}{(2\pi j)^2}\,. \quad (10)$$

Pero por otro lado

$$\frac{2\,p_{2\ell+1}(1/2)}{2\pi j}\int_{-1/2}^{+1/2} x\,\mathrm{sen}(2\pi jx)\,dx \;=\; -2\,p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big)\,\frac{(-1)^j}{(2\pi j)^2}. \qquad (11)$$

Por las ecuaciones (9), (10) y (11), vemos ahora que

$$I_{2\ell+2}(j) \;=\; -\frac{I_{2\ell}(j)}{(2\pi j)^2}\,.$$

Por último, es un cálculo fácil verificar que $I_2(j) = (-1)^j/(2\pi j)^2$. $\square$

La demostración del siguiente lema es bastante sencilla en el caso de series absolutamente convergentes. Puesto que $\phi(2\ell)$ es absolutamente convergente cuando $\ell \geq 1$, entonces sólo este caso es de interés en esta sección. En la sección §6 vamos a usar el lema para el caso de una serie condicionalmente convergente.

Lema 5. *Si* $\{a_j\}$ *es una sucesión de números, entonces se cumple que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \;=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\big(1-\frac{j}{k}\big)\,a_j$$

siempre que la serie de la izquierda converja.

Demostración: Esta prueba esta resumida. Dejamos al lector la tarea de suplir los detalles. Sean

$$A(x) \;=\; \sum_{j\le x} a_j \qquad \text{y} \qquad A \;=\; \lim_{x\to\infty} A(x)\,.$$

Sumando por partes (ver [2, Teorema 8.27]), obtenemos (ver [2, Teorema 8.48])

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,\sum_{j=1}^{k} j\cdot a_j \;=\; \lim_{k\to\infty}\Big\{A(k) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} A(j-1)\Big\} \;=\; A - A = 0\,.$$

$\square$

Demostración del Teorema 1. Por los lemas (2), (3), (4) y (5) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; p_{2\ell}(0) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{-1/2}^{+1/2} p_{2\ell}(x)\,F_k(x)\,dx \\ &=\; \lim_{k\to\infty}\Big\{\int_{-1/2}^{+1/2} p_{2\ell}(x)\,dx + 2\sum_{j=1}^{k-1}\big(1-\frac{j}{k}\big)\,\frac{(-1)^{j+\ell+1}}{(2\pi j)^{2\ell}}\Big\} \\ &=\; 2\,p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big) + 2\,\frac{(-1)^{\ell}}{(2\pi)^{2\ell}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^{2\ell}}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\phi(x) \;=\; (-1)^{\ell+1}(2\pi)^{2\ell}p_{2\ell+1}\big(\frac{1}{2}\big)\,.$$

$\square$

5. Ejemplos.

En esta sección hemos calculado los primeros términos de la sucesión de polinomios $p_\ell(x)$. También reportamos los valores de $\phi(2\ell)$ y $\zeta(2\ell)$ (para $1\le\ell\le 3$) calculados de acuerdo al Teorema 1 y fórmula (5) respectivamente.

Para el caso $\ell = 1$:

$$p_2(x) \;=\; \frac{x^2}{2}, \qquad p_3(x) \;=\; \frac{x^3}{6}\,.$$

Por lo tanto

$$\phi(2) \;=\; \frac{\pi^2}{12}, \qquad \zeta(2) \;=\; \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Para el caso $\ell = 2$:

$$p_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{48}, \qquad p_5(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{144}.$$

Por lo tanto

$$\phi(4) = \frac{7\pi^4}{720}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Para el caso $\ell = 3$:

$$p_6(x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{576} + \frac{x^2}{11520}, \qquad p_7(x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{2880} + \frac{7x^3}{34560}.$$

Por lo tanto

$$\phi(6) = \frac{31\pi^6}{30240}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

6. Otras series.

El método que hemos expuesto en el §4 se puede ajustar para el cálculo de otras series aparte de las que ya calculamos. He aquí un ejemplo. Sea $L > 1$ un número real. Es fácil ver que

$$\int_{-1/2L}^{+1/2L} \cos(2\pi j x)\, dx = \frac{1}{\pi j} \operatorname{sen}(\frac{\pi j}{L}).$$

Puesto que el núcleo de Fejer concentra la masa unitaria en el origen conforme k tiende al infinito, entonces tenemos que (se aplica el Lema 5)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k\to\infty} \int_{-1/2L}^{+1/2L} F_k(x)\, dx = \frac{1}{L} + 2 \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \big(1 - \frac{j}{k}\big) \frac{1}{\pi j} \operatorname{sen}(\frac{\pi j}{L}) \\ &= \frac{1}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \operatorname{sen}(\frac{\pi j}{L}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado que

$$\big(1 - \frac{1}{L}\big) \cdot \frac{\pi}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \operatorname{sen}(\frac{\pi j}{L}), \qquad L > 1.$$

Poniendo $L = 2$ se obtiene la fórmula de Gregory

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots.$$

7. Zeta en los impares.

Después de que Euler pudo evaluar $\zeta(2\ell)$ para $\ell \in \mathbb{N}$, él también intentó la evaluación de zeta en los enteros impares $2\ell+1$ con $\ell \in \mathbb{N}$. Aquí sin embargo, Euler no tuvo el éxito que antes. Nadie hasta la fecha ha podido evaluar las constantes $\zeta(2\ell+1)$ para ningún $\ell \in \mathbb{N}$.

En [10], E. L. Stark muestra que

$$\zeta(3) \;=\; \frac{2}{9}\Big\{\pi^2 \log 2 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{t^4}{\big(\operatorname{sen} t\big)^2}\, dt\Big\}$$

y observa que esta última integral pertenece a la clase de integrales que no se pueden evaluar en términos de funciones elementales, ver [9].

En 1978, R. Apéry demostró que (ver la nota 4 pie de página, en [11, pag. 197])

$$\zeta(3) \;=\; -\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{n^3\,(2n)!}. \tag{12}$$

Puesto que existe una constante positiva k tal que

$$\frac{4^n}{\sqrt{n}}\,k \;<\; \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

entonces la serie en el lado derecho de (12) converge más rapidamente que la serie que define a $\zeta(3)$. Con esto, Apéry demostró que $\zeta(3)$ es un número irracional. Ver [11]. Para conmemorar este resultado, a la constante $\zeta(3)$ se le conoce ahora como la constante de Apéry. A la fecha, no es sabido si $\zeta(2\ell+1)$ es o no irracional, para ningún valor entero de $\ell > 1$.

Existen en la literatura muchas representaciones de $\zeta(3)$ en términos de series que convergen rapidamente. Aparte del ejemplo (12) mencionemos solamente otro ejemplo debido a Ewell en 1990:

$$\zeta(3) \;=\; -\frac{4\pi^2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{(2n+1)\,(2n+2)\,4^n}\,.$$

Aparte del problema de evaluar en forma cerrada las cantidades $\zeta(2\ell+1)$ con $\ell \in \mathbb{N}$, existen muchos otros problemas de naturaleza similar. Por ejemplo, si denotamos

$$S(\ell) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^{\ell}}$$

entonces existen fórmulas que dan los valores exactos de $S(2\ell+1)$ para cada $\ell \in \mathbb{N}$, pero nadie ha podido encontrar una fórmula para las constantes $S(2\ell)$ para ningún $\ell \in \mathbb{N}$. Para el caso de que $\ell = 2$, la constante $\mathrm{G} = S(2)$ se denomina la constante de Catalan.

Referencias

[1] T. M. Apostol, *Another elementary proof of Euler's formula for* $\zeta(2n)$, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 425–431.

[2] T.M. Apostol, Análisis matemático, Segunda edición. *Reverté*, España, 1988.

[3] R. Ayoub, *Euler and the zeta function*, Amer. Math. Monthly **81** (1974) 1067–1086.

[4] B.C. Berndt, *Elementary evaluation of* $\zeta(2n)$, Math. Magazine **48** (1975) 148–154.

[5] F. Beukers, J.A.C. Kolk & E. Calabi, *Sums of generalized harmonic series and volumes*, Nieuw Arch. Wisk. **11** (1993) 217–224.

[6] R. C. Boo, *An Elementary proof of* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, Amer. Math. Monthly **94** (1987) 662–663.

[7] J. Ewell, *A new series representation for* $\zeta(3)$, Amer. Math. Monthly **97** (3), (1990) 219–220.

[8] S. Lang, Undergraduate analysis, Springer-Verlag, 1983.

[9] M. Rosenlicht, *Integration in finite terms*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 963–972.

[10] E. L. Stark, *The series* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$, $s = 2, 3, 4, \ldots$ *once more*, Math. Magazine **47** (1974) 197–202.

[11] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1** (4) (1978/79) 195–203.