Miscelánea Matemática **45** (2007) 55–66 SMM

Euler, El Prestidigitador de las Series

Guillermo Grabinsky
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo # 1
01080 México, D.F.
México
ggrab@itam.mx

1. Introducción

Al inicio del siglo XVII, las series infinitas eran poco comprendidas y con frecuencia el manejo libre de las series divergentes producía "resultados" inesperados. La "paradoja inelegante"

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}$$

se obtenía al sustituir $x = 1$ en la serie geométrica

$$1 - x + x^2 - x^3 ... = \frac{1}{1+x}\,.$$

A finales de ese siglo, en un artículo, Euler advertía al lector sobre el uso poco cuidadoso de las series, y ahí mismo afirmaba que

$$...\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + n + n^2 + n^3 + .. = 0,$$

obtenida al sumar la serie

$$n + n^2 + n^3 + ... = \frac{n}{1-n}$$

con la serie

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = \frac{n}{n-1}\,,$$

y también que

$$1 - 3 + 5 - 7 + ... = 0, \ \ [1], \text{ p. } 218\,.$$

Algunos avances importantes obtenidos a finales del siglo XVII lo constituyen el criterio de convergencia para series alternantes de Leibniz [2], la expansión de series en potencias de e^x (Newton, [3], pp. 48-55), y de $\ln(1+x)$ (por Newton y Mercator [3], pp. 56-59), así como la expansión de $\tan^{-1}(x)$ por Gregory y Leibniz ([3], pp. 69-73).

También Jacob Bernoulli había establecido de manera definitiva y rigurosa la divergencia de la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$.

Más temprano que tarde, Bernoulli habría de dirigir su atención a las p-series, esto es, series de la forma $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$. El problema no era nuevo, el mismo Leibniz había intentado sin éxito obtener el valor exacto de la serie cuando $p = 2$.

Jacob Bernoulli, en su oportunidad, notó que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$, por lo que la 2-serie estaba dominada por la serie teléscopica $\sum_1^\infty \frac{2}{n(n+1)}$, cuyo valor exacto, 2, conocía perfectamente, y luego de una de las primeras aplicaciones del método de comparación de series con términos positivos, concluyó que la 2-serie tenía suma y ésta no excedía a 2.

Si $p \geq 2$, la desigualdad $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ daba lugar a la misma conclusión. Pero, ¿cuál era el valor exacto si $p = 2$? El problema apareció en su texto *TRACTATUS DE SERIEBUS INFINITUS* de 1689, publicado en la ciudad de Basilea, y fue conocido desde entonces como "El problema de Basilea".

El problema fue resuelto por Leonhard Euler y estableció su fama como analista de primera magnitud.

2. El problema de Basilea, primera solución de Euler (1735)

Teorema.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{1}$$

Euler parte de la expansión en serie de $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...,$$

la cual reescribe como

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right), \tag{2}$$

e interpreta a la serie entre paréntesis en (2) como un “polinomio de grado infinito” $P(x)$. Ahora, $P(x)$ no posee una raíz en cero pues $P(0) = 1$, así que las raíces de $P(x)$ son las raíces no cero del miembro izquierdo, esto es, de $\operatorname{sen} x$, es decir, $x = \pm n\pi$ con n natural.

Así pues, factorizando a $P(x)$ como producto de sus factores simples y agrupándolos por pares obtiene

$$P(x) = (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi}) \cdot (1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi}) \cdot (1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi}) \cdot ... \tag{3}$$

Al efectuar el producto deduce la siguiente igualdad entre dos “polinomios” a saber

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... = 1 - (\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...)x^2 + ..., \tag{4}$$

por lo que igualando el coeficiente del término cuadrático de ambos lados obtiene que

$$\frac{-1}{3!} = \frac{-1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...\right),$$

es decir,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Euler no se detuvo ahí y calculó el valor exacto de $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^4}\left(= \frac{\pi^4}{90}\right)$, $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^6}\left(= \frac{\pi^6}{945}\right)$, ..., y así hasta el ridículo valor exacto de $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^{26}}$. Todas estas series quedan incluidas en la fórmula general

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2j}} = (-1)^{j-1}\frac{2^{2j}B_{2j}}{2(2j)!}(\pi^{2j}),$$

donde B_{2j} es el $2j$-ésimo número de Bernoulli ([6], pp. 773–774).

Pero ¿qué hay con las potencias impares?; por ejemplo ¿cuál es el valor exacto de la 3-serie $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^3}$?

Uno esperaría que tal valor fuese de la forma $\frac{\pi^3}{m}$ con m número natural. El mismo Euler lo pensó y probó que no es el caso, pues obtuvo un valor aproximado para m de 25.79435. Más aún, no sabía si el valor de la 3-serie era un número racional o irracional. No fue hasta 1978 cuando R. Apery finalmente probó que la serie converge a un número irracional [7].

El método empleado por Euler da para más; por ejemplo, partiendo de la expansión en serie de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

e interpretando el lado derecho otra vez como un polinomio de grado infinito, localizando sus raíces y reescribiéndolo como el producto de sus factores simples, luego de igualar los coeficientes del término cuadrático se obtiene

$$\frac{-1}{2!} = \frac{-4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right),$$

o bien,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{5}$$

Este resultado no es precisamente la solución del problema de Basilea, pero ésta se deduce fácilmente de (5) ya que:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

de donde

$$\frac{3}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

y, nuevamente,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Es igualmente sencillo obtener (5) a partir de (1), así como obtener

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

que el mismo Euler dedujo al restar de (1) dos veces la suma en (5).

Volviendo a las ecuaciones (2) y (3), pero reescritas en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\dots,$$

Euler obtiene, luego de sustituir $x = \frac{\pi}{2}$, la siguiente identidad

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{64}\right)...,$$

o bien (ver [4]),

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9...}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8...},$$

con lo que redescubre la muy famosa fórmula de John Wallis obtenida por éste en 1655, y la cual es la primera expresión que contiene a π en un producto infinito.

3. El problema de Basilea, segunda solución de Euler

Esta segunda solución es más elaborada y requiere de diversos hechos del Cálculo Integral que muestran a Euler en total dominio de su materia.

Lema 1.

$$\frac{(\mathrm{sen}^{-1}(x))^2}{2} = \int_0^x \frac{\mathrm{sen}^{-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

La prueba es inmediata si se considera la sustitución $u = \mathrm{sen}^{-1}(t)$, pues $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. □

El segundo resultado es más delicado, y en el espíritu de la época hace caso omiso del problema de integrar término a término una serie de funciones; sin embargo, es perfectamente correcto y proporciona la expansión en serie del seno inverso.

Lema 2.

$$\mathrm{sen}^{-1}(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + ...$$

Demostración:

$$\mathrm{sen}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{-1}{2}} dt.$$

Ahora bien, la serie binomial (de Newton [2], pp. 541-542) de $(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}$ está dada por

$$(1-t^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + ...,$$

por lo que, sustituyéndola e integrando término a término se obtiene

$$\operatorname{sen}^{-1}(x) = t + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^7}{7} + ...|_0^x,$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Por último, la tercera pieza del rompecabezas no presta demasiada atención a que se trata de una igualdad entre integrales impropias, a saber:

Lema 3.

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt, \ \ n = 1, 2, ...$$

Demostración: Sea $u = t^{n+1}$ y $dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; al integrar por partes la integral del miembro izquierdo en el enunciado, obtenemos

$$(-t^{n+1}\sqrt{1-t^2})|_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

por lo que

$$(n+2)\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

y de ahí el resultado. $\square$

A continuación, la cereza del pastel.

Teorema.

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$$

Demostración:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}(1)\right)^2 = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

por el Lema 1, y por el Lema 2, lo anterior es igual a

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}}dt+...$$

y como $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 1$, del Lema 3 se sigue que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\frac{6}{7}+... = 1+\frac{1}{9}++\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+... =$$

$$= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+... \, .$$

$\square$

La solución al Problema de Basilea se deduce de este teorema como se indicó anteriormente.

4. Euclides redescubierto, variaciones sobre el sin sentido $\infty = \infty$

En un teorema celebérrimo (Proposición 20 del libro IX de los *Elementos*), Euclides demuestra que hay una infinidad de números primos. A continuación presentamos el argumento que permitió a Euler llegar a la misma conclusión a partir de la divergencia de la serie armónica.

“Teorema”.

$$\prod_p \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{6}$$

Para cada número primo p se tiene la serie geométrica convergente:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1+\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{p}\right)^3+... \, . \tag{7}$$

Si ahora multiplicamos término a término las series (7) para los primeros m primos, obtenemos:

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right) = \sum^{(m)}\frac{1}{n},$$

donde la serie del lado derecho consiste de los recíprocos de aquellos números naturales que n que son divisibles por alguna potencia de p_1, p_2 hasta p_m, o bien $n = 1$; hasta aquí todo está fundamentado sólidamente, y ¿por qué no considerar el producto sobre todos los números primos?

Entonces el lado izquierdo es

$$\prod_p \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right),$$

mientras que el lado derecho es la serie de los recíprocos de todos los números naturales n que son divisibles por alguna potencia de algún primo o bien $n = 1$, esto es, $\sum \frac{1}{n}$, y de este modo se establece el resultado. $\square$

Corolario (Euler). *Hay una infinidad de números primos.*

Demostración: Si hubiera sólo un número finito de números primos, el producto del lado izquierdo de (6) tendría solamente un número finito de factores, y sería en consecuencia un número finito, lo cual contradice la divergencia de la serie armónica. $\square$

¿Cómo rescatar al "Teorema" de sus obvias debilidades? En 1876, Leopold Kroneceker [8] probó que si $s > 1$, entonces

$$\prod_p \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{8}$$

Aquí ambos lados de la igualdad representan magnitudes finitas que son el resultado de procesos convergentes (un producto infinito y una serie infinita). El "teorema" de Euler puede interpretarse como el teorema límite cuando s tiende a 1.

5. La serie de los recíprocos de los números primos o el arte de la prestidigitación

Teorema (Euler, 1737)

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty\,. \tag{9}$$

Demostración: Sea $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; ya sabemos que $M = \infty$, pero sigamos de manera formal las maniobras de Euler.

En virtud del "Teorema" anterior y luego de aplicar el logaritmo natural de ambos lados, obtenemos:

$$\ln(M) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{5}\right) - \ldots \,. \tag{10}$$

Ahora, haciendo uso de la serie

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

se sigue que

$$\ln(M) = \begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 & + & \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 & + & \ldots \\ +\frac{1}{3} & + & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 & + & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 & + & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 & + & \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 & + & \ldots \\ +\frac{1}{5} & + & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 & + & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 & + & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 & + & \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 & + & \ldots \\ +\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \end{array} \tag{11}$$

por lo que, sumando los términos por *columnas*, resulta

$$\ln(M) = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots\right] +$$

$$+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots\right] + \ldots\,,$$

es decir,

$$\ln(M) = \left[\sum_p \frac{1}{p}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_p \frac{1}{p^2}\right] + \frac{1}{3}\left(\sum_p \frac{1}{p^3}\right) + \frac{1}{4}\left[\sum_p \frac{1}{p^4}\right] + \ldots$$

o bien, en la notación de Euler,

$$\ln(M) = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \ldots\,, \tag{12}$$

donde A, B, C, D,... denotan las series en los paréntesis cuadrados.

Por otra parte, por comparación de términos,

$$\sum_p \frac{1}{p^j} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^j},$$

y comparando áreas,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^j} \le \sum_{l=1}^{\infty} \int_l^{l+1} \frac{dt}{t^j} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^j} = \frac{1}{j-1}.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+... \leq \frac{1}{2}(1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)+...<1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...$$
$$=\frac{\pi^2}{6}.$$

Finalmente, de (11) y aplicando la exponencial,

$$M = e^A \cdot e^{\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+...} \leq e^A \cdot e^{\frac{\pi^2}{6}},$$

pero $M = \infty$, por lo que $e^A = \infty$ necesariamente, de donde $A = \ln(e^A) = \infty$ también, es decir, $\sum\limits_p \frac{1}{p} = \infty$. □

Corolario. *Hay una infinidad de números primos* (2a. prueba).

Demostración: Si hubiera un número finito de números primos, la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ tendría un número finito de sumandos y en consecuencia sería un número finito, contrario a lo que afirma el teorema. □

¿Es posible rescatar el teorema de las "barbaridades" eulerianas?

He aquí una prueba moderna con todo el rigor y refinamiento debido a Iván Niven [9], pero antes algunos conceptos de interés independiente.

Llamamos a un número natural n **libre de cuadrados** si en su descomposición como producto de números primos, ninguno de ellos aparece más de una vez, como por ejemplo $n = 30$.

Siguiendo a Niven, denotamos por $\sum' \frac{1}{n}$ la serie de los recíprocos de los naturales que son libres de cuadrados; entonces tenemos el

Teorema.

$$\sum{}' \frac{1}{n} = \infty.$$

Demostración: Todo número natural puede escribirse como un producto de la forma $j^2 n$ donde j es un número natural y n es un número natural libre de cuadrados. Así pues, para $m \geq 1$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m} \leq \left(\sum_{j\leq m}\frac{1}{j^2}\right)\left(\sum_{n\leq m}{}'\frac{1}{n}\right).$$

La estimación anterior es ciertamente muy "gruesa", pues al realizar el producto de los términos del lado derecho aparece cada uno de los términos del lado izquierdo exactamente una vez, pero también aparecen muchos otros términos. Pasando al límite y usando la suma (1), obtenemos

$$\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \leq \left(\frac{\pi^2}{6}\right) \left(\sum {}' \frac{1}{n}\right),$$

de donde $\sum' \frac{1}{n} = \infty$. □

Y una vez más tenemos el

Teorema.

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

Demostración: Partimos de la bien conocida desigualdad $e^x \geq 1 + x$ si $x \geq 0$ (la cual se establece de manera muy sencilla usando métodos de Cálculo elemental), y procedemos por reducción al absurdo. Llamamos $A = \sum\limits_p \frac{1}{p}$; si A fuera finito, entonces

$$\infty > e^A = \prod_p e^{\frac{1}{p}} \geq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \sum {}' \frac{1}{n} = \infty,$$

una contradicción evidente. □

6. Epílogo

Los inventores del Cálculo, Newton y Leibniz, sintieron la necesidad de investigar sobre la convergencia de series infinitas. El mismo Leibniz descubrió un criterio muy útil de convergencia para series alternantes; sin embargo, ninguno poseía un criterio más general. Euler y algunos de sus contemporáneos manipularon de manera formal a las series obteniendo en ocasiones resultados válidos y muy hermosos, pero en otros casos igualdades que no pueden menos que clasificarse como tonterías.

Uno de los méritos de Euler es el haber rescatado del bote de la basura algunas series divergentes. Tomemos por ejemplo la serie $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ Examinando las sumas parciales, que son 1, 0, 1, 0, ..., Leibniz concluyó argumentando de manera probabilística que el valor $\frac{1}{2}$ debería ser asignado a la suma, pues $\frac{1}{2}$ es el promedio. Euler se apoyó en la serie geométrica $1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{1}{1+x}$ y sustituyó $x = 1$.

Muchos años después (1880), G. Frobenius probó un resultado sobre series que reivindicó a ambos, a saber:

Dada una serie $u_0 + u_1 + u_2 + ...$, si el límite de la sucesión de promedios $\frac{u_0+u_1+...+u_{n-1}}{n}$ existe y es igual a L, entonces

$$\lim_{x\to 1^-}(u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + ...)$$

existe y es igual a L.

En muchas ocasiones se ha acusado a Euler del manejo poco "aseado" de las series; ésta es una acusación muy injusta. No podemos exigirle a un pionero y conquistador que vista de traje y corbata.

Referencias

[1] Florian Cajori, History of Mathematics, Chelsea Publishing Co., 3a. ed., 1980.

[2] Tom M. Apostol, Calculus, Vol. I, Reverté, 2a. ed. 1982.

[3] Heinrich Dörrie, 100 Great Problems of Mathematics: Their History and Solution,(anteriormente, Triumph der Mathematik), Dover Publishing Company, 5a. ed., 1980.

[4] Petr Beckman, A History of π, St. Martin Press, New York. 3a. ed., 1974.

[5] William Dunham, *Euler, The Master of All Us*, The Dolciani Mathematical Expositions **22**, The Mathematical Asociations of America,1999.

[6] Erwing Kreyszig, Matemáticas avanzadas para ingeniería. Vol III, Limusa, México, 3a. reimpresión, 1981.

[7] "A PROOF THAT EULER MISSED", Alfred van der Poorten, *The Mathematical Intelligencer, Vol I*, **4** (1978), 195–203.

[8] Leonard Eugene Smith, History of the Theory of Numbers, Vol. I, Chelsea Publishing Co., 1971.

[9] Ivan Niven, A Proof of the Divergence of $\sum \frac{1}{p}$, The American Mathematical Monthly, Vol. 78, **3** (1971), 272–273.