Sobre algunas cotas generales para el número de Ramsey de un árbol

Joaquín Tey
jtey@xanum.uam.mx
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

A penny for your thoughts my dear...
Marillion

1. Introducción

El libro *Ramsey Theory* de Graham, Rothschild y Spencer es el texto básico para introducirse a la Teoría de Ramsey y es considerado todo un clásico del tema. Al analizar lo que allí se dice sobre algunas cotas generales para el número de Ramsey de un árbol, me asaltaron una serie de dudas que pretendo aclarar en este trabajo. Resulta instructivo y un tanto sorprendente llegar a resultados algo mejores, considerando esencialmente los mismos argumentos usados por los autores de este gran libro.

2. Preliminares

El par $G = (V, E)$ denota a la *gráfica* G donde $V = V(G)$ es el conjunto de *vértices* de G y $E = E(G) \subset \binom{V}{2}$ es el conjunto de *aristas* de G. El *orden* de G es $v(G) = |V(G)|$ y $e(G) = |E(G)|$ es el *tamaño* de G. En este trabajo solo consideraremos gráficas *simples* (sin lazos ni aristas múltiples). La *gráfica completa de orden n* es aquella de tamaño $\binom{n}{2}$ y la denotaremos como $\mathbb{K}_n$.

El *grado* de un vértice x es el número de vértices adyacentes a él y lo denotaremos como $gr(x)$; $\delta(G)$ y $\Delta(G)$ denotarán el *grado mínimo* y el *grado máximo* de G respectivamente.

La *distancia* entre dos vértices x e y es la longitud de la trayectoria más corta entre ellos y se denota como $dist\,(x,y)$. El *diámetro* de una gráfica G, denotado por $d\,(G)$ se define como $d\,(G) = \text{máx}\{\text{dist}(x,y) : \{x,y\} \in E(G)\}$.

Sea $V = \{1,2,...,v\}$; un $(v,n,1)$-RBIBD (del inglés Resolvable Balanced Incomplete Block Design) es una colección B de subconjuntos de tamaño n de V, llamados *bloques*, tales que todo par de elementos en V está contenido exactamente en un bloque y B puede ser particionado en $k = (v-1)\,/\,(n-1)$ partes, llamadas *clases paralelas*, cada una de ellas compuesta por v/n bloques disjuntos dos a dos que naturalmente, determinan una partición de V.

Una 1-*factorización* de la gráfica completa $\mathbb{K}_{2n}$ es la partición de las aristas de $\mathbb{K}_{2n}$ en $2n-1$ partes, determinadas de manera natural por las clases paralelas de un $(2n,2,1)$-RBIBD. En tal caso una parte (clase paralela), es un conjunto de n aristas de $\mathbb{K}_{2n}$ sin vértices en común, a la que llamaremos 1-*factor*.

Dadas las gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, la *suma* de G_1 con G_2 es la gráfica definida como

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2 \cup \{\{x,y\} : x \in V_1,\ y \in V_2\})\,.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, una *k-coloración* de un conjunto S es una función $\Phi : S \to \{1,2,...,k\}$, aquí $\{1,2,...,k\}$ es el conjunto de colores. A una k-coloración de las aristas de una gráfica G la llamaremos simplemente k-coloración de G.

El *número de Ramsey* de la gráfica G, $r\,(G;k)$ se define como el mínimo r tal que para toda k-coloración de las aristas de la gráfica completa $\mathbb{K}_r$, al menos una de las subgráficas monocromáticas inducidas contiene una copia de G.

Decimos que $G = (V,E)$ es *conexa* si para toda 2-coloración sobreyectiva f de V, existe $\{x,y\} \in E$ tal que $|\{f\,(x)\,, f\,(y)\}| = 2$. Un *árbol* es una gráfica conexa de tamaño mínimo.

El número de Ramsey de un árbol T_m de tamaño m para los casos $m = 1$ ó $k = 1$ es trivial; $r\,(T_1;k) = 2$ y $r\,(T_m;1) = m+1$ por lo que en la discusión que sigue supondremos que $m,k > 1$.

3. Cotas inferiores

En [**3**] se afirma que $r\,(T_m;k) > \left\lfloor \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor (m-1)$ para todo árbol T_m de tamaño m, desafortunadamente la prueba es defectuosa. Para rescatar la idea que subyace en esa demostración proponemos una cota inferior de $r(T_m;k)$, esta vez más comprometida con la estructura del árbol en cuestión.

Proposición 3.1. *Sea T_m un árbol de tamaño m y $d(T_m)$ su diámetro. Entonces*

$$r(T_m;k) > (k+1)\left\lfloor \frac{d(T_m)-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Demostración. Sean $r = \left\lfloor \frac{d(T_m)-1}{2} \right\rfloor$ y $t = (k+1)r + 1$. Consideremos $\mathbb{K}_t$ como la suma de k copias de $\mathbb{K}_r$ y una de $\mathbb{K}_{r+1}$, etiquetadas como $\mathbb{K}_r^{(1)}$, $\mathbb{K}_r^{(2)}, ..., \mathbb{K}_{r+1}^{(k+1)}$ respectivamente. A continuación construiremos una k-coloración $\Phi : E(\mathbb{K}_t) \to \{1,2,...,k\}$ de $\mathbb{K}_t$ libre de copias de T_m monocromáticas. Asignemos el color i a las aristas en $\mathbb{K}_r^{(i)}$, $1 \leq i \leq k$, el color k a las aristas en $\mathbb{K}_{r+1}^{(k+1)}$ y el color i a todas las aristas entre $\mathbb{K}_r^{(i)}$ y $\mathbb{K}_r^{(j)}$, $1 \leq i < j \leq k+1$. Observe que para $1 \leq i < k$, la subgráfica $\Phi^{-1}(i)$ generada por el color i tiene diámetro a lo más $2r < d(T_m)$, garantizándose así que $\Phi^{-1}(i)$ no contiene a T_m. Finalmente $|V(\Phi^{-1}(k))| = 2r + 1 \leq d(T_m) < |V(T_m)|$ luego, T_m no está contenido en $\Phi^{-1}(k)$. $\square$

En una extensa y complicada prueba, Bierbrauer y Brandis (ver [**1**]) encontraron una cota inferior para $r(T_m;k)$ similar a la propuesta en [**3**]. Ellos demostraron que $r(T_m;k) > 2\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$. Aquí daremos una sencilla prueba de esta cota pero antes necesitaremos de un resultado bien conocido.

Lema 3.2. *La gráfica completa $\mathbb{K}_{2r}$ es 1-factorizable.*

Demostración. Sea $V = \mathbb{Z}_{2r-1} \cup \{*\}$ el conjunto de vértices de $\mathbb{K}_{2r}$. Considerando la suma en $\mathbb{Z}_{2r-1}$, definamos las gráficas $F_i = (V, E_i)$, $i \in \mathbb{Z}_{2r-1}$ donde

$$E_i = \{\{*, i\}, \{i+1, i-1\}, \{i+2, i-2\}, \ldots,$$
$$\{i+m-1, i-(m-1)\}\}.$$

No es difícil comprobar que F_i es un 1-factor de $\mathbb{K}_{2r}$, $\forall i \in \mathbb{Z}_{2r-1}$ y que la colección de 1-factores $\{F_0, F_1, ..., F_{2r-2}\}$ determinan una 1-factorización de $\mathbb{K}_{2r}$. $\square$

Proposición 3.3 (Bierbrauer y Brandis, [**1**])**.** *Para todo árbol T_m de tamaño m se tiene que*

$$r(T_m;k) > 2\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Sean $r = \left\lfloor \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor$, $s = \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor$ y $t = 2rs$. Consideremos $\mathbb{K}_t$ como la suma de $2r$ copias de $\mathbb{K}_s$ etiquetadas como $\mathbb{K}_s^{(1)}$, $\mathbb{K}_s^{(2)}, ..., \mathbb{K}_s^{(2r)}$ respectivamente. Por el lema 3.2 sabemos que $\mathbb{K}_{2r}$ es 1-factorizable, denotemos por $F_1, F_2, ..., F_{2r-1}$ a los 1-factores de dicha 1-factorización. Una $(2r-1)$-coloración de $\mathbb{K}_{2r}$ resulta de asignar el color i a las aristas del 1-factor F_i, $i = 1, ..., 2r-1$. De manera natural, esta $(2r-1)$-coloración de $\mathbb{K}_{2r}$ determina una $(2r-1)$-coloración de $\mathbb{K}_t$ como sigue. Sea $V_{2r} = \{1, 2, ..., 2r\}$ el conjunto de vértices de $\mathbb{K}_{2r}$, entonces las aristas entre $\mathbb{K}_s^{(i)}$ y $\mathbb{K}_s^{(j)}$ en $\mathbb{K}_t$ tendrán el color de la arista $\{i, j\}$ en $\mathbb{K}_{2r}$; al resto de las aristas de $\mathbb{K}_t$ le asignamos cualquier color. Claramente, el número de vértices en una componente conexa monocromática no excede m, lo cual nos garantiza que dicha coloración de $\mathbb{K}_t$ es libre de copias de T_m monocromáticas, como se quería probar. □

Vale la pena aclarar que la prueba anterior es esencialmente la misma que la mostrada en [**1**]. La demostración que proponen Bierbrauer y Brandis depende de la complicada construcción de una familia de cuadrados latinos simétricos y unipotentes de orden par. No es difícil comprobar que toda 1-factorización de $\mathbb{K}_{2r}$ se puede interpretar como un cuadrado latino de este tipo; para más detalles ver [**4**]. Es realmente curioso que este hecho fuera pasado por alto.

Al analizar en [**3**] el comportamiento asintótico de $r(T_m; k)$, se concluye que $r(T_m; k) > k(m-1) - m^2$ para k suficientemente grande. Seguiré los pasos de la prueba allí desarrollada para demostrar que

Proposición 3.4. *Sea T_m un árbol de tamaño m. Existe k_0 tal que si $k \geq k_0$, entonces*

$$r(T_m; k) > k(m-1) - m^2 + 2m.$$

Proposición 3.5 (Ray-Chaudhuri y Wilson, [**5**])**.** *Existe una constante $C(m)$ tal que si $k \geq C(m)$ y $k \equiv 1 \bmod m$, entonces es posible construir un*
$(k(m-1)+1, m, 1)$-RBIBD.

Corolario 3.6. *Sea T_m un árbol de tamaño m. Existe una constante $C(m)$ tal que si $k \geq C(m)$ y $k \equiv 1 \bmod m$, entonces*

$$r(T_m; k) > k(m-1) + 1.$$

Demostración. Por la proposición 3.5, es posible construir un $(k(m-1)+1, m, 1)$-RBIBD $D_{k,m}$. Identificaremos los puntos de $D_{k,m}$

con los vértices de $\mathbb{K}_{k(m-1)+1}$ y dos elementos de $D_{k,m}$ en un bloque con una arista de $\mathbb{K}_{k(m-1)+1}$. Ahora asignemos el color i a las aristas correspondientes a los bloques en la i-ésima clase paralela; observe que el conjunto de bloques de $D_{k,m}$ está particionado en k clases paralelas. De esta manera hemos construido una k-coloración Φ de $\mathbb{K}_{k(m-1)+1}$. Como los bloques en cada clase paralela son disjuntos dos a dos y tienen tamaño m se tiene que toda componente conexa de $\Phi^{-1}(i)$ es isomorfa a $\mathbb{K}_m$, garantizándose así la imposibilidad de que la coloración propuesta contenga un árbol de tamaño m (orden $m+1$) monocromático. □

Demostración de la proposición 3.4. Sean T_m un árbol de tamaño m, $C(m)$ como en el corolario 3.6 y $k_0 \geq C(m)$, $k_0 \equiv 1 \bmod m$. Entonces para $k \geq k_0$ existen $k_1 \geq k_0$ y $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$ tales que $k_1 \equiv 1 \bmod m$ y $k = k_1 + j$. Por el corolario 3.6, $r(T_m; k_1) > k_1(m-1)+1$ luego

$$\begin{aligned} r(T_m; k) &\geq r(T_m; k_1) > k_1(m-1)+1 \\ &\geq (k_1 + j - (m-1))(m-1) + 1 = k(m-1) - m^2 + 2m. \end{aligned}$$

□

4. Cotas superiores

En [**3**] se demuestra que $r(T_m; k) \leq 2km + 1$ para todo árbol T_m de tamaño m. Como veremos a continuación, un cuidadoso examen de los argumentos allí expuestos nos pueden conducir a una mejor cota superior para $r(T_m; k)$.

El siguiente resultado se atribuye a Chvátal [**2**] y forma parte del folklore de la teoría de gráficas.

Lema 4.1. *Sea G una gráfica y T_m un árbol de tamaño m. Si $\delta(G) \geq m$, entonces $T_m \subset G$.*

La demostración puede hacerse mediante una inducción de rutina sobre m. Otra manera para probarlo sería la aplicación de un algoritmo ávido para la construcción de dicho árbol, iniciando en cualquier vértice de G.

Lema 4.2. *Sea G una gráfica de orden n y T_m un árbol de tamaño $m \geq 2$. Si $e(G) \geq (m-1)n$, entonces $T_m \subset G$.*

Demostración. Por inducción sobre n. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, observe que $\binom{n}{2} \geq e(G) \geq (m-1)n$ luego $n \geq 2m-1$. Para $n = 2m-1$ se tiene que $G = \mathbb{K}_{2m-1}$ y el resultado es trivial.

Sea G de orden $n+1$ con $e(G) \geq (m-1)(n+1)$. Si $\delta(G) \geq m$, entonces por el lema 4.1, G contiene a todo árbol de tamaño m. En otro caso, existe $x \in V(G)$ tal que $gr(x) \leq m-1$. Considere $\overline{G} = G - \{x\}$, entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que $\overline{G} \subset G$ contiene a todo árbol de tamaño m. $\square$

Proposición 4.3. *Sea T_m un árbol de tamaño m. Entonces*

$$r(T_m; k) \leq 2k(m-1) + 1.$$

Demostración. En una k-coloración de $\mathbb{K}_{2k(m-1)+1}$, al menos $\binom{2k(m-1)+1}{2}\frac{1}{k} = (m-1)(2k(m-1)+1)$ aristas tienen el mismo color. Entonces, por el lema 4.2 la subgráfica inducida por dicho color contiene a todo árbol de tamaño m. $\square$

Conjetura 4.4 (Erdös-Sós)**.** *Sea G una gráfica de orden n y T_m un árbol de tamaño m. Si $e(G) > \frac{(m-1)n}{2}$, entonces $T_m \subset G$.*

Esta conjetura data de los años 60´s y su veracidad tiene una notable repercusión en la determinación de $r(T_m; k)$. En [**3**] se afirma sin demostración que si la conjetura de Erdös-Sós es cierta, entonces $r(T_m; k) \leq k(m-1) + 3$ para k suficientemente grande. Resulta sorprendente contraponer este resultado con el que sigue, válido para todo k.

Proposición 4.5. *Sea T_m un árbol de tamaño m. Si la conjetura de Erdös-Sós es cierta, entonces*

$$r(T_m; k) \leq k(m-1) + 2.$$

Demostración. La desigualdad

$$k\left\lfloor\frac{(m-1)n}{2}\right\rfloor \leq k\left(\frac{(m-1)n}{2}\right) < \binom{n}{2}$$

es válida para $n > k(m-1)+1$. En tal caso, dada una k-coloración de $\mathbb{K}_n$, alguna subgráfica monocromática inducida G de orden n tendrá al menos $\left\lfloor\frac{(m-1)n}{2}\right\rfloor + 1$ aristas. Ahora bien, como estamos suponiendo la veracidad de la conjetura de Erdös-Sós, se tiene que $T_m \subset G$ para todo árbol T_m de tamaño m. Luego $r(T_m; k) \leq k(m-1) + 2$, como se quería probar. $\square$

Para finalizar, presentamos una consecuencia inmediata del corolario 3.6 y la proposición 4.5.

Corolario 4.6. *Sea* T_m *un árbol de tamaño* m. *Existe una constante* $C(m)$ *tal que si* $k \geq C(m)$ *y* $k \equiv 1 \bmod m$, *entonces*

$$r(T_m; k) = k(m-1) + 2,$$

si la conjetura de Erdös-Sós es cierta.

Bibliografía

1. J. Bierbrauer y A. Brandis, On generalized ramsey numbers for trees, *Combinatorica* **5 (2)** (1985) 95–107.
2. V. Chvátal, Tree-complete graph ramsey numbers, *J. Graph Theory* **1** (1977).
3. R. L. Graham, B. L. Rothschild, y J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley & Sons, 1990.
4. C. F. Laywine y G. L. Mullen, *Discrete Mathematics Using Latin Squares*, John Wiley & Sons, 1998.
5. D. K. Ray-Chaudhuri y R. M. Wilson, *The existence of resolvable designs, A Survey of Combinatorial Theory (editado por J. N. Srivastava et al)*, North-Holland, 1973.