

# La coloración circular de gráficas. Una aplicación al problema de cruces vehiculares

Ma. Guadalupe Rodríguez Sánchez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

rsmg@correo.azc.uam.mx

Silvia Herrera Cortés

Universidad Autónoma de Tlaxcala

## Resumen

Se define el número cromático circular  $\chi_c(G)$  de una gráfica  $G$ , el cual es un refinamiento del número cromático  $\chi(G)$ . Se hace una revisión de las familias de gráficas para las cuales  $\chi_c$  es conocido. Se presenta la aplicación del número cromático circular al estudio y resolución de un problema de tráfico, que consiste en minimizar el tiempo de avance de vehículos y personas en un cruce de calles, presentando un análisis minucioso de algunos cruces particulares.

## 1. Introducción

Se define una gráfica como una pareja  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es un conjunto de parejas no ordenadas de elementos de  $V$ , a los elementos de  $V$  se las llama vértices y a los elementos de  $E$ , aristas. Los vértices son representados por puntos y las aristas por líneas que unen pares de vértices. Para mayor claridad, se usa  $V(G)$  y  $E(G)$  en lugar de  $V$  y  $E$  respectivamente, cuando esto sea conveniente.

Se entiende por una *coloración propia* de una gráfica  $G = (V, E)$  a una función  $c : V \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de colores, tal que  $c(v) \neq c(w)$  si  $v$  y  $w$  son vértices adyacentes. El entero más pequeño  $k$ , para el cual existe una coloración propia con  $k$  colores de  $G$ , se denomina *número cromático de  $G$*  y se denota por  $\chi(G)$ . En 1988, Vince

[12] introduce una generalización del concepto de coloración propia de una gráfica, a esta se le denomina *coloración circular*. Aplicando este concepto se tiene el número cromático circular  $\chi_c(G)$  como una generalización del número cromático  $\chi(G)$  para una gráfica  $G$ .

En las secciones 2 y 3 de este trabajo, se define el número cromático circular  $\chi_c(G)$  de una gráfica  $G$  y se hace un resumen de las familias de gráficas para las cuales se conoce su coloración circular, así como cotas que permiten una aproximación al cálculo de  $\chi_c(G)$ , en vista de que hallar el número cromático circular de una gráfica es un problema NP-completo. Si bien no se dan demostraciones, se indica la bibliografía en la que pueden encontrarse estas [14, 8], incluyendo la tesis de Herrera [6]. En dicha bibliografía las demostraciones se exponen con gran detalle.

La coloración propia de una gráfica se puede aplicar en la asignación de tiempos a los semáforos de un cruce vehicular, al construir una gráfica  $G(V_M, E_M)$  como modelo de un cruce. En la gráfica  $G(V_M, E_M)$ ,  $V_M$  contiene todos los movimientos permitidos en el cruce y  $E_M$  está formado por pares de vértices de  $V_M$  tales que sus movimientos correspondientes no pueden efectuarse en el cruce simultáneamente. Suponiendo que cada movimiento tiene el mismo intervalo de tiempo para avanzar en el cruce, una solución al problema es asignar una coloración propia a la gráfica  $G(V_M, E_M)$ . Cada clase cromática de la gráfica contendrá movimientos que pueden avanzar por el cruce de manera simultánea sin ningún riesgo; sin embargo, para algunas gráficas de este tipo es posible mejorar el tiempo de avance de los movimientos si se aplica el concepto de coloración circular a la gráfica  $G(V_M, E_M)$ . La aplicación es tratada en la sección 4.

## 2. Conceptos fundamentales

En este trabajo se consideran gráficas simples (sin lazos ni aristas múltiples). Cuando una gráfica  $G$  tiene lazos no es posible definir una coloración circular apropiada, si la gráfica  $G$  tiene aristas múltiples, la coloración circular de la gráfica simple subyacente se mantiene para la gráfica  $G$ .

### 2.1 Definiciones

En esta sección se define el *número cromático circular* de una gráfica en dos formas equivalentes. También se mencionan algunas propiedades fundamentales de este parámetro. La primera se basa en el concepto de una  $(k, d)$ -coloración de una gráfica.

Para dos enteros positivos  $k, d, k \geq 2d$ . Una  $(k, d)$ -coloración de una gráfica  $G$  es una asignación  $c$  de un color, tomado del conjunto de colores  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , a cada vértice de  $G$  tal que para cualesquiera dos vértices adyacentes  $x, y$  en  $G$ , se cumple que  $d \leq |c(x) - c(y)| \leq k-d$ .

El número cromático circular  $\chi_c(G)$  de una gráfica  $G$ , se define como:

$$\chi_c(G) = \inf\left\{\frac{k}{d} : \text{existe una } (k, d)\text{-coloración de } G\right\}. \quad (1)$$

Otra forma de definir el número cromático circular de una gráfica  $G$ , es usando el concepto de una  $r$ -coloración circular de  $G$ .

Sea  $r \geq 2$  un número real, y sea  $C^r$  un círculo de perímetro  $r$ . Una  $r$ -coloración circular de una gráfica  $G$  es una función  $c_r$ , que asigna a cada vértice de  $G$  un intervalo abierto de longitud 1 en  $C^r$ , tal que para cualesquiera dos vértices adyacentes  $x, y$  en  $G$ ,  $c_r(x) \cap c_r(y) = \emptyset$ . Se dice que  $G$ , es  $r$ -circular coloreable si existe una  $r$ -coloración circular de  $G$ . Usando el concepto anterior, se puede definir el número cromático circular de una gráfica como:

$$\chi_c(G) = \inf\{r : \text{existe una } r\text{-coloración circular de } G\}. \quad (2)$$

En [1] se demuestra que el ínfimo en 1 y 2 siempre es alcanzado, luego ínfimo puede ser reemplazado por mínimo. Además, en [14] se demuestra que  $\chi_c(G)$  es siempre un número racional.

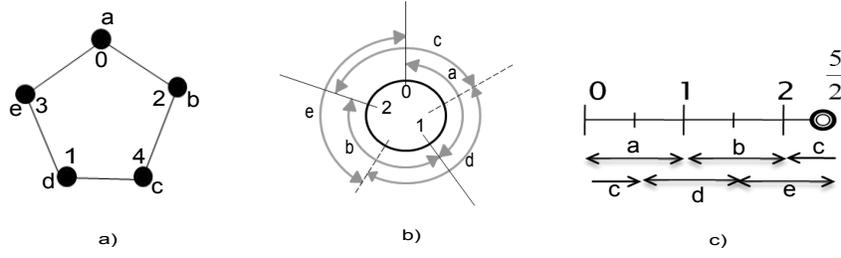
Si se corta la circunferencia de  $C^r$  en cualquier punto se obtendrá un intervalo de longitud  $r$  isomorfo a  $[0, r)$ . Se considera la circunferencia orientada de acuerdo con las manecillas del reloj y se asocia 0 con el punto de corte. Si  $G$  es una gráfica que tiene una  $r$ -coloración circular, se define una función biyectiva  $c'_r : V(G) \rightarrow [0, r)$ . Para cada intervalo  $c_r(x)$  que corresponde a un vértice  $x$  de  $G$  en la  $r$ -coloración circular, se asigna  $c'_r(x)$  al punto inicial del intervalo  $c_r(x)$ , entonces para cualquier arista  $(x, y)$  de  $G$ , se cumple que  $1 \leq |c'_r(x) - c'_r(y)| \leq r-1$ .

En la figura 1 se presenta una  $(5, 2)$ -coloración para el ciclo  $C_5$  con sus vértices etiquetados como  $a, b, c, d, e$ , así como una  $2.5$ -coloración circular con los intervalos señalados en gris y la  $2.5$ -coloración circular en el intervalo  $[0, 2.5)$ .

### Observación 2.1.

Si  $\chi_c(G) = \frac{k}{d}$ ,  $G$  tiene una  $(k, d)$ -coloración. Sea  $c(x)$  el color de  $x$ , tal que  $x \in V(G)$ . A la  $(k, d)$ -coloración de  $G$  le corresponde una  $\frac{k}{d}$ -coloración circular y se tiene que:  $c'_{\frac{k}{d}}(x) = \frac{c(x)}{d}$ . Si se tiene la  $\frac{k}{d}$ -coloración circular, de la misma igualdad se puede obtener  $c(x)$ , pues en ese caso se conocerá  $c'_{\frac{k}{d}}(x)$ , ver la figura 1.

### Observación 2.2.



**Figura 1.** (a)  $(5, 2)$ -coloración de  $C_5$ . (b)  $2.5$ -coloración circular de  $C_5$  vista en la circunferencia  $C^{2.5}$ . (c)  $2.5$ -coloración circular de  $C_5$  vista en el intervalo  $[0, 2.5)$ .

- 1: Una forma de calcular el número cromático circular  $\chi_c(G)$  para una gráfica  $G$ , es hallar el menor número racional  $k/d$ , para el cual existe una  $(k, d)$ -coloración de  $G$ .
- 2: Para cualquier gráfica  $G$ , una  $(k, 1)$ -coloración es una  $k$ -coloración propia de  $G$ .

## 2.2 Cotas principales para el número cromático circular

Dada una gráfica  $G$ , se sabe que el cálculo de  $\chi_c(G)$  es un problema NP-duro, ver [8]. Por ello es tan importante poder determinar cotas para  $\chi_c(G)$  y para los enteros  $k$  y  $d$  que lo forman.

El número cromático circular es un refinamiento del número cromático de una gráfica, luego  $\chi(G)$  es una cota superior para  $\chi_c(G)$ . En [8] se demuestra que para toda gráfica  $G$  se tiene que  $\chi(G) - 1 < \chi_c(G)$ . Resumiendo lo anterior:

$$\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G). \quad (3)$$

Una subgráfica completa de una gráfica  $G$  es llamada un *clan de  $G$* . Un subconjunto  $S \subset V(G)$  de una gráfica  $G$ , es llamado *conjunto independiente* si para cualesquiera dos vértices  $x, y \in S$ ,  $(x, y) \notin E(G)$ . Se denota por  $\omega(G)$  al *número clánico de  $G$*  y por  $\alpha(G)$  al *número de independencia de  $G$* , definidos a continuación:

$$\omega(G) = \max\{|S| : S \text{ es un clan de } G\},$$

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente de } G\}.$$

Si  $G$  es una gráfica completa,  $\omega(G) = \chi_c(G)$ . Si  $G$  no es completa, todos los vértices de cualquier clan de  $G$ , deben ser enviados a intervalos distintos sobre el círculo  $C$  que define su número cromático circular, así  $\omega(G) \leq \chi_c(G)$ . Luego:

$$\omega(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G). \quad (4)$$

Si  $\chi_c(G) = \frac{k}{d}$ , se tiene que:

- i.  $d \leq \alpha(G)$ , pues en la  $\frac{k}{d}$ -coloración circular, todo vértice es cubierto por un conjunto independiente de tamaño  $\alpha(G)$ , dado que los intervalos de longitud 1 rodean a la circunferencia de longitud  $\frac{k}{d}$  en a lo más  $d$  veces.
- ii.  $k \leq |V(G)|$ , pues el máximo número de asignaciones necesario para colorear los vértices de una gráfica es a lo más el número de vértices de la misma, tal como ocurre con las gráficas completas.

Respecto al ejemplo que se ilustra en la figura 1, donde se asigna a  $C_5$  una  $\frac{k}{d}$ -coloración circular, se tiene que  $\alpha(C_5) = 2$  luego  $d \leq 2$ , y  $k \leq 5 = |V(G)|$ . En el inciso  $b$  de la figura 1, los intervalos de longitud 1 se representan como un arco limitado por cabezas de flechas y se colocan fuera de la circunferencia, para mayor claridad. Se puede observar que los vértices que forman un conjunto independiente pueden intersectarse, como es el caso de los intervalos correspondientes a los vértices  $a$ ,  $c$  y  $d$ . El hecho de que  $\alpha(C_5) = 2$  corresponde en la figura 1 a las dos capas de intervalos que circundan a la circunferencia.

**Observación 2.3.** Si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , se tiene que  $\chi_c(H) \leq \chi_c(G)$ .

### 2.3 Complejidad Computacional

Determinar el valor de  $\chi_c(G)$  para una gráfica dada  $G$ , es un problema NP-duro [8]. En [1] se demuestra que para cualesquiera dos enteros positivos  $k, d$  con  $k \geq 2d$ , decidir cuando  $\chi_c(G) \leq k/d$  para una gráfica  $G$ , es un problema NP-completo.

Una *gráfica planar*, es una gráfica que se puede dibujar en el plano de forma que ningún par de aristas se corten geoméricamente, excepto en un vértice en el que ambas incidan. En [9] se menciona que calcular el número cromático circular de una gráfica planar dada, es un problema NP-completo.

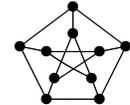
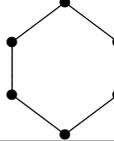
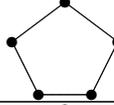
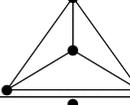
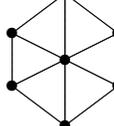
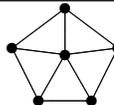
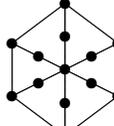
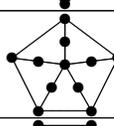
Otro problema de interés, es decidir cuando  $\chi_c(G) = \chi(G)$ , para una gráfica  $G$ . Guichard [4] mostró que es NP-duro determinar cuando una gráfica arbitraria  $G$ , satisface  $\chi_c(G) = \chi(G)$ , ver también [14]. Aun para casos especiales de gráficas, tales como gráficas planas, gráficas de líneas, el problema de determinar si  $\chi_c(G) = \chi(G)$  también es un problema NP-duro.

## 3. Familias de gráficas con número cromático circular conocido

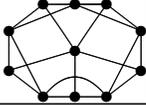
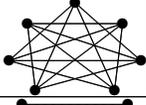
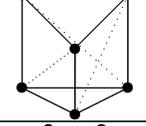
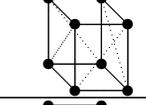
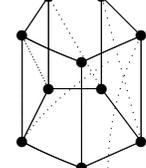
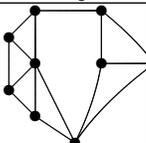
El número cromático circular de un gran número de gráficas ha sido estudiado por numerosos investigadores. En [8] aparece una tabla que

resume algunas de las familias de gráficas para las cuales se conoce  $\chi_c(G)$ , aquí se complementa con otras familias menos conocidas y con la ilustración de una gráfica que pertenece a cada una de las familias mencionadas. En particular resultan interesantes las familias de gráficas para las cuales  $\chi_c(G) < \chi(G)$ .

### 3.1 Tabla de familias de gráficas con $\chi_c(G)$ conocido

Familia de gráficas	$\chi(G)$	$\chi_c(G)$	Gráfica	Referencias
Petersen	3	3		[12]
Gráficas bipartitas	2	2		[6]
Ciclos pares $C_{2k}$	2	2		[8]
Ciclos impares $C_{2k+1}$	3	$2 + \frac{1}{k}$		[8]
Gráficas Completas $K_n$	$n$	$n$		[8]
Ruedas pares $W_{2k}$	3	3		[8]
Ruedas impares $W_{2k+1}$	4	4		[14], [8]
Ruedas rotas pares $G_{2k}$	3	$2 + \frac{1}{2}$		[8]
Ruedas rotas impares $G_{2k+1}$	3	3		[14], [10]
Aspas pares $R_{2k}$	3	3		[8]

Cuadro 1: Familias de graficas con  $\chi_c(G)$  conocido

Aspas impares $R_{2k+1}$	4	$3 + \frac{1}{k}$		[3]
Gráficas $G_k^d$	$\lceil \frac{k}{d} \rceil$	$\frac{k}{d}$		[8]
Prismas triangulares $Q_{3k}$	3	3		[3]
Prismas triangulares $Q_{3k+1}$	4	$3 + \frac{1}{k}$		[3]
Prismas triangulares $Q_{3k+2}$	4	$3 + \frac{1}{2k+1}$		[3]
Gráficas $H_{m,n}$	4	$\frac{7}{2}$		[3]

Cuadro 1: Familias de graficas con  $\chi_c(G)$  conocido

Muchas de las familias de gráficas que aparecen en la tabla han sido suficientemente tratadas en la teoría de gráficas. A continuación se presentan las definiciones para las familias menos conocidas. Para cada familia definida se exhibe una  $(k, d)$ -coloración de sus vértices, dado que  $\frac{k}{d}$  es su número cromático circular.

### 3.2 Familias menos conocidas

Sea  $W_k$  una rueda, a cada arista que une el vértice  $u$  de grado  $k$  con cada uno de los vértices del ciclo  $C_k$  etiquetados como  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ , se les denomina *rayo* de  $W_k$ . Una *rueda rota*  $G_k$  es la gráfica obtenida de  $W_k$  agregando a cada rayo  $(u, c_i)$  de  $W_k$  un vértice  $v_i$ , de tal manera que cada arista  $(u, c_i)$  queda dividida en dos aristas, para  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . En la figura 2a se muestra a  $G_6$ , con una  $(5, 2)$ -coloración de sus vértices.

Un *aspa*  $R_n$  se obtiene de un ciclo  $C_{2n}$  con vértices consecutivos etiquetados como  $c_0, c_1, \dots, c_{2n-1}$  aumentando un vértice  $u$ , el cual es adyacente a cada vértice  $c_{2i}$  para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  y  $c_{2i-1}$  es adyacente

a  $c_{2i+1(mod 2n)}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . La figura 2b muestra a  $R_5$  y a una  $(7, 2)$ -coloración asociada a sus vértices ( $n = 2k + 1$ ).

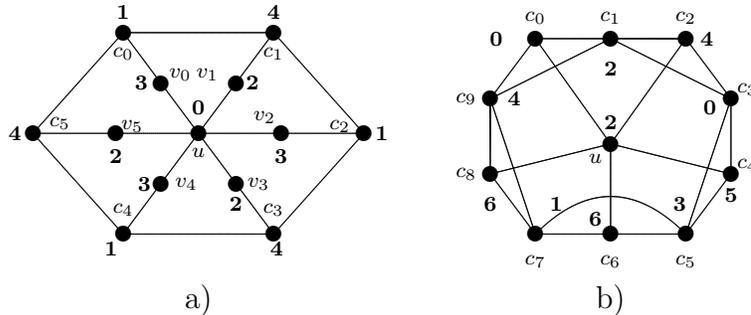


Figura 2. a)  $(5, 2)$ -coloración para  $G_6$ . b) Gráfica  $R_5$  con una  $(7, 2)$ -coloración.

Sean  $k, d$  enteros positivos, con  $k > 2d$ . La gráfica  $G_k^d$  es una gráfica con  $k$  vértices,  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ , tal que  $(v_i, v_j)$  es una arista de  $G_k^d$  si y solo si  $d \leq |i - j| \leq k - d$ . El número cromático circular de las gráficas  $G_k^d$  es justamente  $\chi_c(G_k^d) = \frac{k}{d}$ . Una  $\frac{7}{2}$ -coloración circular de  $G_7^2$  puede verse en [8, 6].

Un *prisma triangular*  $Q_n$  es una gráfica planar que se define de la siguiente manera:

$Q_n = (V_Q, E_Q)$ , donde  $V_Q = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \cup \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ , el conjunto de aristas  $E_Q$  consiste de dos  $n$ -ciclos,  $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$  y  $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  y  $2n$  aristas  $(u_i, v_i), (u_{i+1}, v_i)$  para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  ( $u_0 = u_n$ ). En la figura 3 aparece  $Q_5$  con una  $\frac{10}{3}$ -coloración circular.

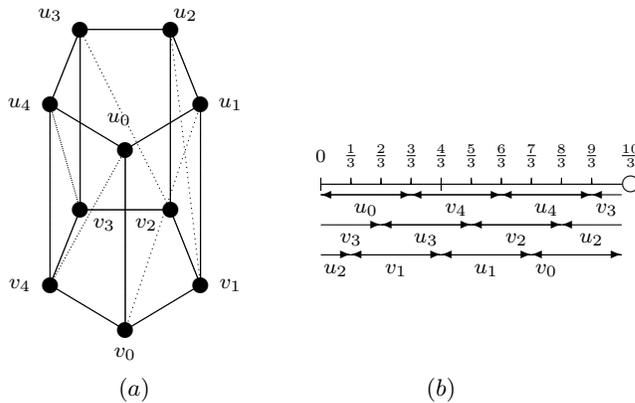


Figura 3. (a) Gráfica  $Q_5$ . (b)  $\frac{10}{3}$ -coloración circular para  $Q_5$ .

Sean  $W_{2n+1}$  y  $W_{2m+1}$  dos ruedas impares y  $(a, b)$  y  $(c, d)$  dos aristas de  $W_{2n+1}$  y  $W_{2m+1}$  respectivamente, las cuales no son incidentes a los vértices centrales correspondientes de  $W_{2n+1}$  y  $W_{2m+1}$ .

La *gráfica*  $H_{n,m}$ , es la gráfica obtenida de la unión disjunta en aristas de  $W_{2n+1}$  y  $W_{2m+1}$  identificando los vértices  $a$  y  $c$ , borrando las aristas  $(a, b)$  y  $(c, d)$  y agregando una arista de  $b$  a  $d$ . Al procedimiento anterior se le conoce como *suma de Hajós*. En la figura 4, se puede observar una gráfica  $H_{2,1}$  con una  $\frac{7}{2}$ -coloración circular.

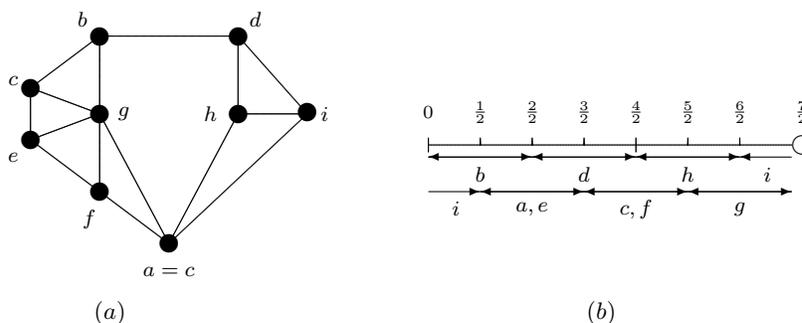


Figura 4. Gráfica  $H_{2,1}$ . (b)  $\frac{7}{2}$ -coloración circular para  $H_{2,1}$ .

### 3.3 Otras familias de gráficas

#### 3.3.1. Gráficas planas

En [14] se demuestra que para cualquier número racional  $r$  con  $2 \leq r \leq 4$ , existe una gráfica planar  $G$  con  $\chi_c(G) = r$ , ver también [13, 7]. Por el teorema de los cuatro colores, se sabe que para cualquier gráfica planar,  $\chi(G) \leq 4$ . En el otro extremo, hay gráficas planares como los ciclos pares y los árboles que tienen número cromático circular igual a 2. La gráfica *nula*  $G_0$  es aquella que no contiene aristas, dicha gráfica es planar con  $\chi_c(G_0) = 1$ . Luego  $2 \leq \chi_c(G) \leq 4$ , para  $G$  una gráfica planar con al menos una arista.

Si  $G$  es una gráfica planar que contiene uno o más triángulos se tiene que  $\chi_c(G) \geq 3$ . En [3], se estudia una familia infinita de gráficas planares libres de triángulos  $\{G_{2k+1}\}$ , con número cromático circular igual a 3, formada por las ruedas rotas impares. Una familia, tal que  $\chi_c$  alcanza la cota superior para las gráficas planares, está formada por las ruedas impares  $W_{2k+1}$ , con  $\chi_c(W_{2k+1}) = 4$ .

#### 3.3.2. Gráficas serie-paralelo

Se dice que dos aristas son *paralelas* si comparten sus dos vértices extremos. Una *gráfica serie-paralelo* es una gráfica 2-conexa que no contiene

a  $K_4$  como menor. La construcción de las gráficas serie-paralelo se comienza con un ciclo que tiene justamente dos aristas. Se reemplaza una arista por dos aristas paralelas o por dos aristas serie, en la gráfica resultante se aplica a una de sus aristas alguna de esas dos extensiones, para obtener otra gráfica, así sucesivamente se construyen las gráficas serie-paralelo, ver [11].

Si  $G$  es una gráfica serie-paralelo, se sabe que  $\chi_c(G) \leq 3$ . Si una gráfica serie-paralelo  $G$  contiene un triángulo, entonces  $\chi_c(G) = 3$ . En [5], se demuestra que para una gráfica serie-paralelo  $G$ , si  $G$  tiene cuello al menos  $2\lfloor \frac{3k-1}{2} \rfloor$ , entonces  $\chi_c(G) \leq \frac{4k}{2k-1}$ . Para  $k = 2$ , si  $G$  es una gráfica serie-paralelo libre de triángulos, ésta cumple que  $\chi(G) \leq \frac{8}{3}$ . Por lo tanto, el número cromático circular de una gráfica serie-paralelo es 3 o a lo más  $\frac{8}{3}$ .

## 4. Aplicación de coloraciones circulares al problema de intersecciones viales

### 4.1 Terminología básica y presentación del problema

En este trabajo se estudian las intersecciones viales o cruces de calles o caminos, como una aplicación del número cromático circular. Una intersección en la que ocurren congestionamientos debe ser controlada por algún dispositivo para evitar puntos de conflicto. En general los dispositivos usados son los *semáforos*.

Los semáforos se colocan en los cruces de acuerdo con ciertos lineamientos que condicionan tanto su instalación como la elección del tipo de semáforo que conviene usar [2]. Vale la pena mencionar que un semáforo está compuesto por lentes, en general tres, de colores rojo, ámbar y verde. En algunas ocasiones se usan también lentes con flechas. Las intersecciones viales más comunes son las de tres y cuatro accesos o calles que concurren en ellas, los cruces con cinco o más accesos son propios de las grandes ciudades. Se hace énfasis en semáforos de tiempo fijo, los cuales se utilizan en intersecciones donde los patrones de tránsito son relativamente estables o en las que las variaciones de intensidad de la circulación se pueden adaptar a un programa previsto. Los semáforos de tiempo fijo, se adaptan especialmente a cruces en los que se desea sincronizar su funcionamiento con los de otras instalaciones próximas siguiendo ciertos criterios que pueden ser revisados en [2]. Si se hace necesario variar la duración del ciclo y su distribución durante el día, es preferible instalar un control del tipo accionado por un agente de tránsito.

Se entiende por *movimiento de tráfico* a la maniobra o conjunto de maniobras en un mismo acceso que tienen el derecho de paso simultáneo y forman una misma fila. Un *ciclo* es el tiempo necesario para que ocurra una secuencia completa de todas las indicaciones de señales de un semáforo. Una *fase* es la parte del ciclo asignada a cualquier combinación de uno o más movimientos que reciben simultáneamente el derecho de paso durante uno o más intervalos de tiempo. Cada fase comienza con la pérdida del derecho de paso de los movimientos que entran en conflicto con los que ejercen el paso en ese momento. La duración de la longitud del ciclo y de cada fase dependen de la demanda vehicular. Se define un *periodo de tráfico completo* como el intervalo de tiempo en el que cada movimiento permitido en el cruce puede avanzar una vez.

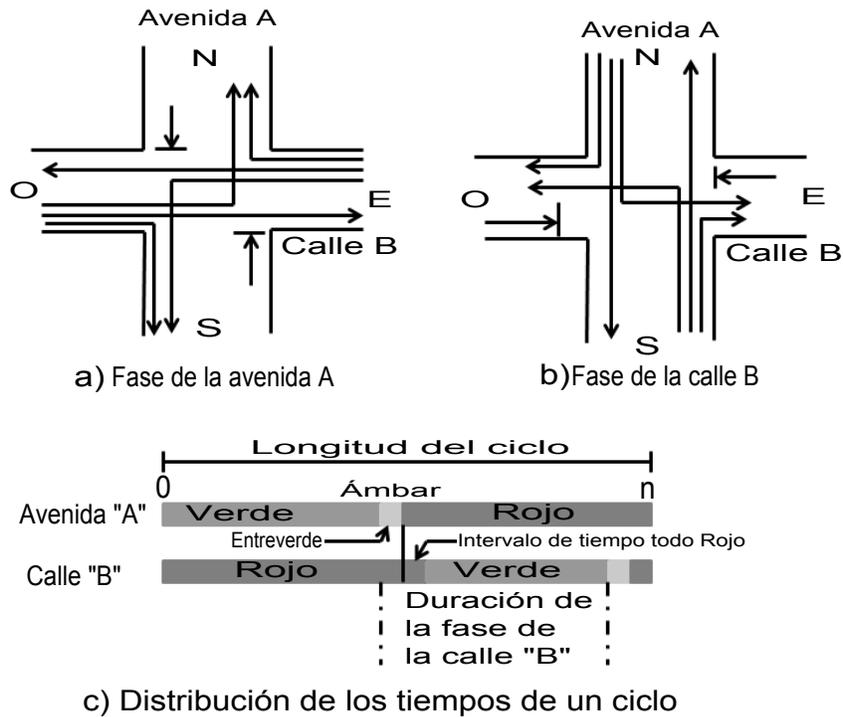
Un *diagrama* es un dibujo esquemático de un cruce por el que transitan los vehículos, mostrando cada uno de los movimientos de los flujos vehiculares permitidos, mediante líneas que terminan en flechas que indican su sentido en el cruce.

En la figura 5, se ejemplifica un diagrama que corresponde a un cruce de una avenida con una calle. Se puede observar la Avenida  $A$  que es transitada Oeste-Este-Oeste y la Calle  $B$  que es transitada Norte-Sur-Norte. El inciso  $a$ ) muestra los movimientos vehiculares que parten de la Avenida  $A$ , el inciso  $b$ ) muestra los movimientos que parten de la Calle  $B$ , el inciso  $c$ ) muestra la distribución de la longitud de un ciclo que consta de dos fases. En la primera fase los vehículos transitan por la Avenida  $A$ , cuando se enciende la luz ámbar que corresponde a dicha avenida se inicia la fase de la calle  $B$ . Con el ámbar, los vehículos que transitaban por la avenida  $A$  se detienen asegurando el despeje total del cruce y otorgando el derecho de paso a la calle  $B$ .

Considérese el problema de diseñar un sistema de control de tráfico tal que su funcionamiento sea óptimo respecto al tiempo de cruce de cada movimiento vehicular en una intersección de calles. Es decir, se pretende minimizar el tiempo de duración del periodo de tráfico completo, para un cruce vehicular.

## 4.2 Planteamiento matemático

Dado un cruce vehicular, denótese por  $\varphi_{xy}$  al movimiento vehicular que va de la posición  $x$  a la posición  $y$  en el diagrama de intersección de calles, por  $|\varphi_{xy}|$  al tiempo que requiere el movimiento  $\varphi_{xy}$  y por  $|T|$  a la duración del periodo de tráfico completo. El problema consiste en minimizar  $|T|$ .



**Figura 5.** Figura que muestra un diagrama de fases (incisos a y b) y la distribución de tiempos de un ciclo (inciso c).

Este problema puede ser modelado utilizando teoría de gráficas: dado el diagrama de intersección de calles, sea  $G_T = (V(G_T), E(G_T))$  su gráfica asociada, donde  $V(G_T)$  representa el conjunto de vértices y  $E(G_T)$  representa el conjunto de aristas de  $G_T$ , definidos de la siguiente manera:

$\varphi_{xy} \in V(G_T)$ , si hay un movimiento vehicular que va de la posición  $x$  a la posición  $y$  en el diagrama de intersección de calles.

$\varphi_{xy}$  es adyacente a  $\varphi_{zw}$  en  $G_T$ , si los movimientos  $\varphi_{xy}$  y  $\varphi_{zw}$  entran en conflicto en el cruce de manera que no pueden avanzar al mismo tiempo.

El problema se puede resolver encontrando una coloración propia para los vértices de  $G_T$ . Ésto es equivalente a partir los vértices de  $G_T$ , en conjuntos de vértices independientes, el mínimo número de conjuntos independientes coincide con el número cromático  $\chi(G_T)$  de  $G_T$ . Sea  $k$  el número de clases cromáticas de  $G_T$ , la coloración consiste en asignar a cada clase un color  $c_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$ . A cada clase cromática le corresponde un conjunto de movimientos que pueden avanzar simultáneamente por el cruce.

Una hipótesis que se usa en este trabajo es que cada movimiento vehicular requiere la misma cantidad de tiempo (una unidad de tiempo)

para poder avanzar, se considera  $|\varphi| = 1$ . Se asigna a cada conjunto independiente un intervalo de una unidad de longitud de luz verde del semáforo, que corresponde a un color  $c_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Entonces la longitud total  $|T|$  es el número cromático de la gráfica  $G_T$ . Cada clase cromática corresponde a una fase vehicular.

Hallar el número cromático de  $G_T$  es una solución al problema de minimizar  $|T|$  para  $G_T$ . En algunos casos se puede conseguir un refinamiento de esta solución mediante la coloración circular de  $G_T$ . Ésto es, se puede ver al periodo de tráfico completo como un círculo  $C$ , y a cada vértice (cada movimiento vehicular) asignar un intervalo en  $C$  de una unidad de longitud, el cual representa el intervalo de tiempo en el que el movimiento vehicular puede avanzar (el semáforo tiene la luz verde encendida para ese movimiento). Los vértices adyacentes de la gráfica se asignarán a intervalos disjuntos de  $C$ , y el objetivo será minimizar la longitud del círculo  $C$ , esto es, se encontrará  $\chi_c(G_T)$ . Así, el problema de minimizar  $|T|$ , es equivalente a encontrar una  $r$ -coloración circular óptima para  $G_T$ .

#### Observación 4.1.

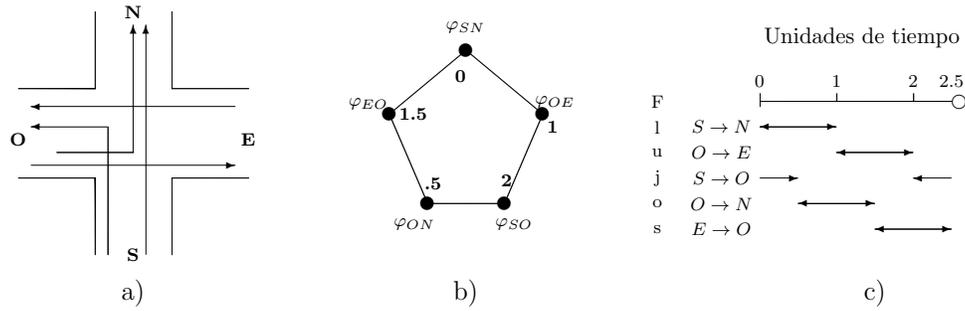
1. Si  $\chi_c(G_T) = r$ , entonces  $C^r$  denota solo un ciclo de un periodo de tráfico completo de longitud  $r$ .
2. El color de cada  $\varphi_{xy} \in V(G_T)$ , representa el intervalo de tiempo en el que cada movimiento vehicular  $\varphi_{xy}$  puede avanzar.
3. Si se requiere que la asignación de tiempo a cada movimiento vehicular sea distinta, entonces cada vértice tendrá asociado un peso igual a las unidades de tiempo requeridas en su movimiento de tráfico asociado, la solución de este problema será mediante la coloración circular para gráficas con pesos asignados [8].

### 4.3 Estudio de cruces

#### 4.3.1. Ejemplo de un cruce estudiado

El siguiente ejemplo fue tomado de [8], donde se presenta la aplicación del número cromático circular al problema de cruces vehiculares. En este artículo el problema es analizado con todo detalle, esperando que sirva de modelo para el estudio de otros problemas que se presentan en esta sección. El diagrama del cruce con sus movimientos permitidos, la gráfica correspondiente  $G_T$  y su coloración circular se muestran en la figura 6.

En el ejemplo, se consideran 2 calles perpendiculares, orientadas respecto a los puntos cardinales  $N$ ,  $E$ ,  $O$  y  $S$ . La  $\frac{5}{2}$ -coloración circular se puede interpretar como sigue: en el intervalo de tiempo  $(0, 1)$  avanza el



**Figura 6.** a) Diagrama de intersección de calles. b) Gráfica  $G_T$  con su  $\frac{5}{2}$ -coloración circular c) Intervalos de tiempo para cada movimiento en el cruce.

movimiento de  $S$  a  $N$ ; en el intervalo de  $(1, 2)$  le corresponde avanzar al movimiento que va de  $O$  a  $E$ ; el movimiento de  $S$  a  $O$  podrá avanzar en los intervalos  $(0, 1/2)$  y  $(2, 5/2)$ ; al movimiento de  $O$  a  $N$  le corresponde el intervalo de avance  $(1/2, 3/2)$  y finalmente, el movimiento de  $E$  a  $O$  podrá avanzar dentro del intervalo  $(3/2, 5/2)$ . En el inciso b) de la figura 6, aparece en cada vértice el punto inicial de los intervalos de tiempo mencionados. Se puede verificar que todas las asignaciones de los movimientos son posibles, dado que no existe ningún movimiento en conflicto con esta distribución de tiempos.

Por otra parte, el cruce de la figura 6 tiene un sistema de tres fases, este es equivalente a una coloración propia por vértices de  $G_T$ . En un primer intervalo de tiempo pueden efectuarse los movimientos de  $S$  a  $N$  y de  $S$  a  $O$ , en el segundo intervalo los movimientos de  $O$  a  $E$  y de  $O$  a  $N$  y en el tercer intervalo los movimientos de  $O$  a  $E$  y de  $E$  a  $O$ . Esto es equivalente a colorear los vértices de la gráfica  $G_T$  con 3 colores, es decir  $\chi(G_T) = 3$ . La solución anterior  $|T| = 2,5$  corresponde a  $\chi_c(G_T) = 2,5$ , es una solución mejor que la anterior, permitiendo despejar las calles que conforman la intersección en forma más rápida.

#### 4.3.2. Observaciones sobre cruces vehiculares básicos

En vista a un panorama general de cruces vehiculares, podemos partir de la consideración de los cruces básicos que se dan a continuación:

1. Cruce de dos calles cada una con un solo sentido.
2. Cruce de dos calles una con dos sentidos y la otra con un solo sentido.
3. Cruce de dos calles cada una con dos sentidos.

Los diagramas de los cruce anteriores se muestran en la figura 7, así como su gráficas correspondientes, denotadas como  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  respectivamente. Para estas gráficas  $\chi_c(G_i) = 2$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

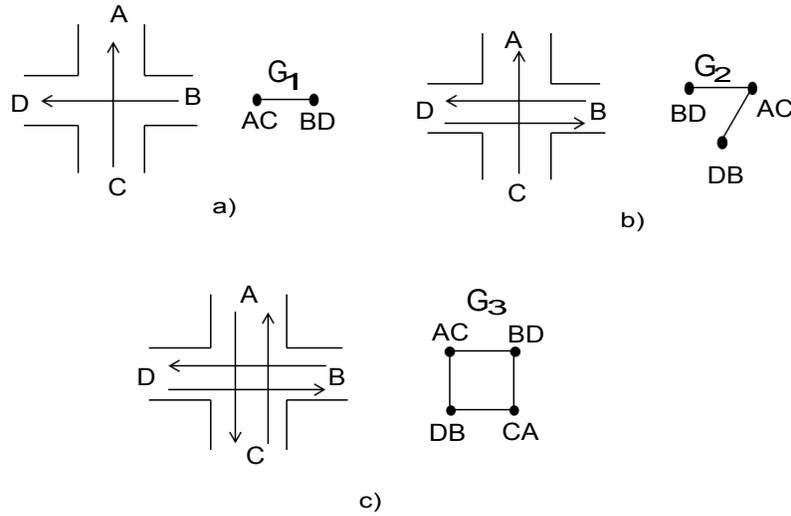


Figura 7. Cruces básicos.

Con base en los diagramas de los cruces básicos de la figura 7, es interesante estudiar a partir de los movimientos considerados, las posibles vueltas para tomar otra calle vecina. Dado que las vueltas a la derecha se consideran compatibles con todos los movimientos vehiculares, se analizan solo las vueltas a la izquierda.

**Caso I.** Partiendo del diagrama de la figura 7a, la única vuelta a la izquierda que se puede considerar es el movimiento  $\varphi_{CD}$ . La gráfica que se obtiene es isomorfa a  $G_2$ , la cual puede verse en 7b. Si se denota la gráfica con la vuelta  $\varphi_{CD}$  como  $G_4$ , se tiene que  $\chi_c(G_4) = 2$ .

**Caso II.** Partiendo del diagrama de la figura 7b, se pueden considerar las siguientes vueltas a la izquierda:  $\varphi_{CD}$  y  $\varphi_{DA}$ . Tomando cada vuelta por separado, cada una da origen a una gráfica isomorfa a  $G_2$  más una arista colgante, sean estas gráficas  $G_5$  y  $G_6$  respectivamente,  $\chi_c(G_j) = 2$ ;  $j = 5, 6$ . Si se consideran los dos movimientos simultáneos entonces se obtiene una gráfica isomorfa a la gráfica de la figura 6b, sea esta  $G_7$ . Este caso se estudió con todo detalle en la sección 4.3.1. y se obtuvo que  $\chi_c(G_7) = 2,5$ .

**Caso III.** Partiendo del diagrama de la figura 7c, se pueden considerar las siguientes vueltas a la izquierda:  $\varphi_{DA}$ ,  $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{AB}$  y  $\varphi_{CD}$ . Si se consideran una de las vueltas mencionadas o dos de ellas, se tiene que  $\chi_c = 3$ , pues en todas las gráficas obtenidas aparecen gráficas  $C_3$  como subgráficas. Si se usan tres movimientos que son vuelta a la izquierda

o las cuatro vueltas a la izquierda, se tiene que  $\chi_c = 4$  para las gráficas obtenidas, ya que aparece en cualquier caso, un  $K_4$  como subgráfica.

Para encontrar otros casos en que no coincidan el número cromático de la gráfica correspondiente a un cruce, con su número cromático circular se deben considerar cruces en los que participen más de cuatro calles. Como ejemplo de los casos anteriores basados en los cruces básicos que aparecen en la figura 8, se muestran en el inciso *a* de la figura 8 la gráfica  $G_6$ , que corresponde al Caso 2 con una vuelta a la izquierda, en el inciso *b* una de las gráficas correspondientes al Caso 3, con dos vueltas a la izquierda y en el inciso *c* la gráfica que corresponde al Caso 3 con las cuatro vueltas posibles a la izquierda. Cada gráfica de la figura 8 se muestra con su diagrama correspondiente.

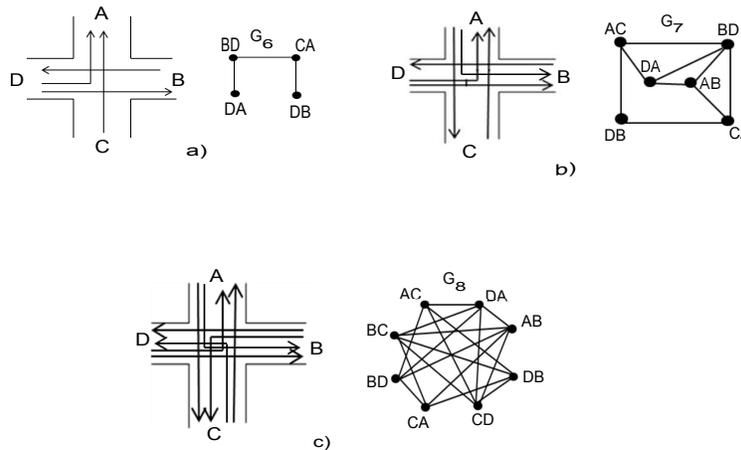


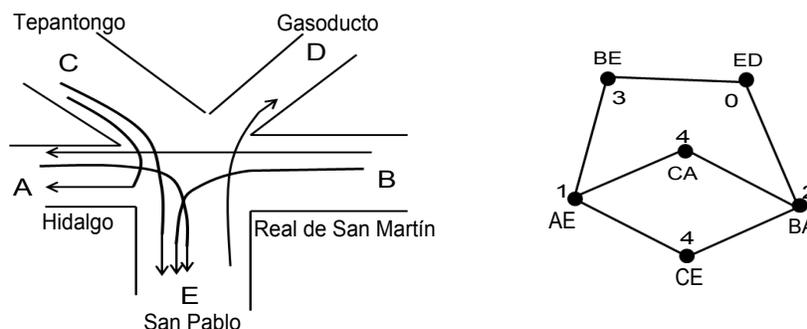
Figura 8. Cruces básicos con vueltas a la izquierda.

#### 4.3.3. Estudio de cruces reales

Esta sección está dedicada a estudiar algunas intersecciones de calles de la ciudad de México, así como una glorieta. Se presentan sus modelos correspondientes, con sus diagramas, las gráficas asociadas al modelo y el número cromático circular que les corresponde.

**Cruce en Azcapotzalco:** En la delegación Azcapotzalco de la Ciudad de México, hay una intersección de calles, cercana a la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco (UAM-A). Allí convergen las calles de *San Pablo*, *Tepantongo*, *Real de San Martín* y *Gasoducto*. Esa zona de Azcapotzalco pertenece a un barrio muy antiguo de la ciudad, anterior a las planeaciones urbanísticas modernas. Dicha

intersección es uno de los dos accesos a la UAM-A y al Deportivo Reynosa, dos centros de gran afluencia de personas y vehículos. Se analiza el cruce con sus principales movimientos vehiculares.



**Figura 9.** Diagrama del cruce de Azcapozalco y su gráfica asociada  $G_A$ .

Considérese el diagrama de la figura 9 y denótese su gráfica como  $G_A$ . Para la gráfica  $G_A$  el número cromático es 3, el cual coincide con la asignación de fases que se programa usualmente en los semáforos mediante un procedimiento propio de ingeniería de tránsito, ver [2]. Sin embargo,  $\chi_c(G_A) = 2,5$ , esto se debe a que la gráfica tiene solo un ciclo impar isomorfo a  $C_5$ , que es el que determina el número cromático circular de la gráfica, ver la tabla 1. Luego para  $G_A$ ,  $|T| = 2,5$ . Si se programan los semáforos de acuerdo con la solución  $\chi_c(G_A) = 2,5$  se puede mejorar el tiempo empleado en realizar un ciclo completo.

**Observación 4.2.** En la ciudad de México existen barrios antiguos insertados dentro de la metrópoli, cuyos cruces provocan demoras en el tránsito. Así el cruce anterior no es un caso aislado.

**Cruce en Vallejo:** Vallejo es una calle que se encuentra en la zona norte de la Ciudad de México. Las autoras de este trabajo decidimos estudiar el cruce de Vallejo con Poniente 152 y otras calles más, debido a las dificultades de tránsito que presenta y al número de calles implicadas.

Considérense el diagrama de la figura 10 y denótese su gráfica como  $G_V$ . La gráfica  $G_V$  tiene varias subgráficas isomorfas a  $K_4$ ,  $\omega(G_V)$  es 4 y  $\chi(G_V) = 4$ . En este caso  $\chi_c(G_V) = 4$  debido a que  $\omega(G_V)$  es una cota inferior de  $\chi_c(G_V)$ , así el número cromático y el número cromático circular coinciden para  $G_V$ . En la figura 10 se exhibe una coloración de los vértices de  $G_V$  con 4 colores.

**Glorieta con 7 calles adyacentes:** Considérese la glorieta que aparece en el diagrama de la figura 11. Su gráfica se denota como  $G_H$ . En este caso  $\chi_c(G_H) = 2,5$ , que mejora su número cromático que es 3. En

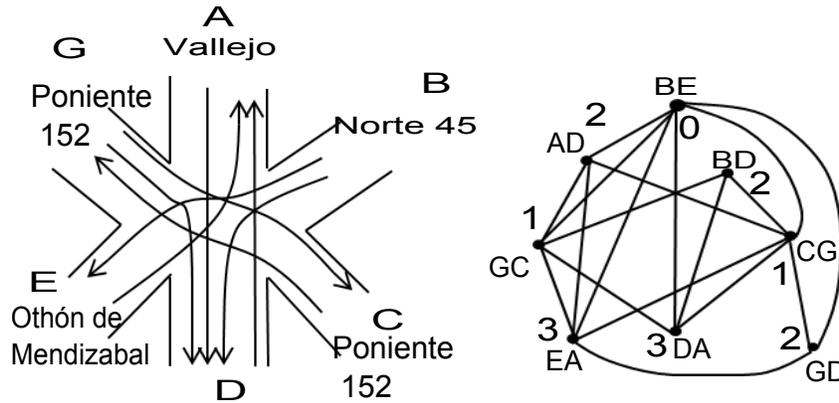
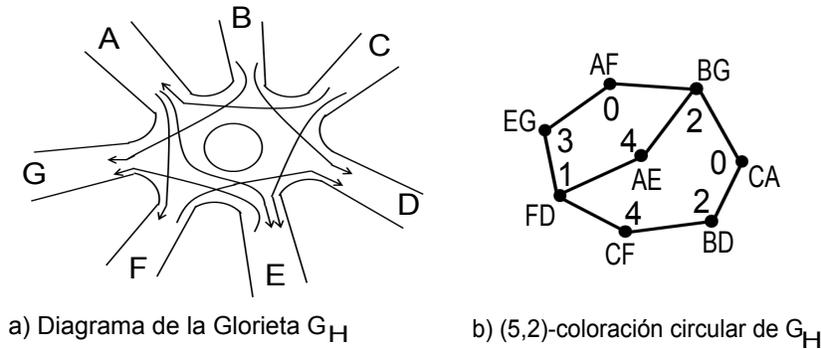


Figura 10. Diagrama del cruce de Vallejo y su gráfica  $G_V$ .

la gráfica  $G_H$  hay dos ciclos impares  $C_5$  y  $C_7$  y como no hay triángulos, entonces basta analizar la coloración circular que corresponde a los ciclos impares;  $\chi_c(C_7) = 2,3$  y  $\chi_c(C_5) = 2,5$ , es imposible asignar una  $\frac{7}{3}$  coloración circular a  $C_5$ , pero la  $\frac{5}{2}$  coloración circular de  $C_5$  se puede extender a  $C_7$ . Este último ejemplo no corresponde a una glorieta específica.



a) Diagrama de la Glorieta  $G_H$       b)  $(5,2)$ -coloración circular de  $G_H$

Figura 11. a) Diagrama de la glorieta. b)  $G_H$  y su  $(5, 2)$ -coloración circular.

**Observación 4.3.** Sean  $D$  el diagrama de un cruce vehicular dado y  $G_D$  su gráfica asociada.

1. El número de movimientos vehiculares en  $D$  coincide con el número de vértices en  $G_D$  y el número de cruces de los movimientos vehiculares en  $D$  coincide con el número de aristas en  $G_D$ .
2. El grado de un vértice  $\varphi_{xy}$  en  $G_D$  depende del número de movimientos vehiculares con los que el movimiento de  $x$  a  $y$  entra en conflicto en el cruce.

3. Todo polígono  $C_m$  que se forme en  $D$  debido a las flechas asignadas a los movimientos vehiculares corresponde a un ciclo  $C_m$  en  $G_D$ .

## Conclusiones

Un gran número de matemáticos estudian coloraciones de gráficas, en particular el número cromático  $\chi$  de una gráfica, es decir las coloraciones óptimas en cuanto al número de colores usados para colorear propiamente los vértices de una gráfica. Más recientes son los trabajos sobre el número cromático circular  $\chi_c$ , como un refinamiento del número cromático.

Aquí se han presentado las definiciones y conceptos básicos para estudiar  $\chi_c$ . Como calcular  $\chi_c$  para una gráfica dada es un problema NP-completo, es importante el estudio de las familias de gráficas para las cuales se sabe cómo calcular su número cromático circular. Por ello resulta interesante presentar un resumen de tales familias.

En este trabajo se estudió una aplicación del número cromático circular al problema del diseño del control de tráfico para intersecciones vehiculares que cuentan con un semáforo de tiempo fijo. Se tienen dos métodos para encarar el problema de minimizar el tiempo de avance de vehículos y personas durante un período de tráfico completo, el primero usado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y el segundo que utiliza el número cromático circular. El primer método consiste en construir un diagrama de fases, que se puede interpretar en teoría de gráficas como formar conjuntos independientes de movimientos vehiculares, que pueden transitar por el cruce simultáneamente sin ningún problema. Si se construye la gráfica  $G_T$  definida en la sección 5.2, el periodo de tráfico completo coincide con el número cromático de  $G_T$ .

El segundo método para modelar y estudiar un cruce vial, considera cada movimiento vehicular en un diagrama, a partir del cual se construye la gráfica  $G_T$ , como se explica en la sección 5.2. Una solución a la minimización del periodo de tráfico completo es equivalente a calcular  $\chi_c(G_T)$ . Si  $\chi_c(G_T) \leq \chi(G_T)$ , es posible ajustar los tiempos de encendido de cada lente del semáforo para que algunos movimientos pueden transitar simultáneamente por el cruce en pequeños intervalos de tiempo, con ello la longitud del ciclo disminuye, mejorando los tiempos obtenidos con el primer método. Resumiendo, la coloración de los vértices de la gráfica  $G_T$  puede mejorarse, en relación al tiempo que corresponde a un período de tráfico completo, si para la gráfica  $G_T$  no coinciden sus números cromático y cromático circular.

Por último, es importante destacar que el estudio del número cromático circular tiene un creciente interés teórico, que viene reforzado por el

estudio de sus aplicaciones como es la del control de tráfico en cruces vehiculares. Esta aplicación tiene gran importancia en la actualidad y su resolución es fundamental, sobre todo en las grandes ciudades.

## Bibliografía

- [1] J. A. Bondy y P. Hell, «A note on the star chromatic number», *Journal of Graph Theory*, vol. 14, 1990, 479–482.
- [2] R. Caly, M. Reyes y J. Cárdenas, *Ingeniería de tránsito, fundamentos y aplicaciones*, 7.<sup>a</sup> ed., Alfaomega, 1998.
- [3] G. Gao, Y. Wang y H. Zhou, «Star chromatic numbers of some planar graphs», *Journal of Graph Theory*, vol. 27, 1998, 33–42.
- [4] D. R. Guichard, «Acyclic graph coloring and complexity of the star chromatic number», *Journal of Graph Theory*, vol. 16, 1993, 129–134.
- [5] P. Hell y X. Zhu, «The circular chromatic number of series-parallel graphs», *Journal of Graph Theory*, vol. 33, 2000, 14–24.
- [6] C. S. Herrera, *Coloración circular de gráficas, tesis de licenciatura*, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 2007.
- [7] D. Moser, «The star chromatic number of planar graphs», *Journal of Graph Theory*, vol. 24, 1997, 33–43.
- [8] A. Nadolski, «Circular coloring of graphs», *Contemporary Mathematics, American Mathematical Society*, vol. 352, 2004, 123–137.
- [9] A. Pêcher, «A note on the circular chromatic number of circular perfect planar graphs», 2003, preprint submitted to Elsevier Science.
- [10] E. Steffen y X. Zhu, «Star chromatic numbers of graphs», *Combinatorica*, vol. 16, 1996, 439–448.
- [11] K. Truemper, *Matroid decomposition*, Academic Press Inc., 1992.
- [12] A. Vince, «Star chromatic number», *Journal of Graph Theory*, vol. 12, 1988, 551–559.
- [13] X. Zhu, «Planar graphs with circular chromatic numbers between 3 and 4», *Journal of Combinatorial Theory, Series*, vol. B 76, 1999, 170–200.
- [14] ———, «Circular chromatic number: a survey.», *Discrete Mathematics*, vol. 229, 2001, 371–410.