

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8102>

# El espacio de triángulos circulares en la esfera de Riemann

Francisco Espinosa

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM - UMSNH

fespinosa@matmor.unam.mx

y

Ahtziri González

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

ahtziri.lemus@umich.mx

## 1. Introducción

En los cursos de geometría euclidiana se muestra la relevancia que tienen los triángulos para el estudio de la geometría en general, ya que a través de ellos se deducen muchas propiedades de otras figuras geométricas planas y de dimensiones mayores. Una pregunta que nace al estudiar triángulos es: *¿cuántos triángulos diferentes hay?* Si pensamos a los triángulos semejantes como iguales y a los triángulos no semejantes como diferentes, entonces una respuesta inmediata es: «existen una infinidad de triángulos diferentes». Analizando la pregunta con más profundidad, una respuesta más completa consistiría en describir qué triángulos son vecinos o están cercanos entre sí. Un *espacio de parámetros de triángulos euclidianos* es un espacio topológico en el que cada punto representa una clase de semejanza de triángulos, de manera que en él se formaliza la noción de cercanía entre triángulos y de vecindades de un triángulo. Una manera de construir el espacio de parámetros de triángulos es utilizando el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo y la condición de que la suma de ángulos interiores de un triángulo es igual a  $\pi$ . Este espacio de triángulos resulta ser muy interesante y ha sido estudiado desde distintos enfoques [3, 6].

Es conocido que además de la euclidiana, existen las geometrías hiperbólica y esférica. De manera natural uno puede preguntarse por los

correspondientes espacios de parámetros de triángulos hiperbólicos y esféricos. En este artículo estudiamos los triángulos circulares en la esfera de Riemann, los cuales tienen como casos particulares a los triángulos de las geometrías euclidiana, hiperbólica y esférica. El objetivo principal de este trabajo es *describir un espacio de parámetros de triángulos circulares en la esfera de Riemann*. Para lograrlo comenzamos definiendo los triángulos circulares y una relación de equivalencia entre ellos (similar a la semejanza entre triángulos euclidianos). Después, demostramos el criterio de equivalencia ángulo-ángulo-ángulo para este tipo de triángulos. Finalmente, utilizamos los ángulos internos para describir un espacio de parámetros de triángulos circulares y las regiones en él que corresponden a los espacios de triángulos hiperbólicos, euclidianos, esféricos y geométricos. Estos últimos son triángulos circulares que no pertenecen a ninguna de las tres geometrías antes mencionadas.

Los autores no conocemos una referencia en la que se demuestre el criterio ángulo-ángulo-ángulo para triángulos circulares en la esfera de Riemann (teorema 4.1), por lo que consideramos que este trabajo es original. La idea de escribir este artículo comenzó con un minicurso que realizamos con Yesenia Villicaña, Atenea Carreón, Manuel Alejandro (Prima) y Manuel Sedano. Agradecemos a todos ellos por las interesantes discusiones durante el curso. Posteriormente, el primer autor realizó su trabajo de tesis de licenciatura sobre el tema en la Facultad de Físico-Matemáticas, UMSNH, bajo la dirección del segundo autor. Agradecemos mucho al sinodal Dr. Jorge L. López López por su excelente revisión de la tesis. Expresamos nuestra gratitud a los revisores anónimos que ayudaron a mejorar significativamente el documento.

## 2. La esfera de Riemann

Comenzamos introduciendo las definiciones de la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , los círculos en  $\hat{\mathbb{C}}$  y las funciones de Möbius y anti-Möbius. Además, proporcionamos un listado de las propiedades de estas funciones que nos serán útiles en el desarrollo del trabajo. El espacio  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que se obtiene al compactificar por un punto el plano complejo  $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ , es conocido como la **esfera de Riemann**. Definiendo  $\overline{\infty} = \infty$  extendemos la función conjugado  $z \mapsto \bar{z}$  sobre  $\hat{\mathbb{C}}$ . La **proyección estereográfica** es el homeomorfismo  $\varphi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  dado por

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  es la esfera unitaria. Los círculos en  $\mathbb{S}^2$  están determinados por intersecciones con planos de  $\mathbb{R}^3$ . Una propiedad de  $\varphi$  es que a los círculos que no pasan por el polo norte

$\mathcal{N} = (0, 0, 1)$  los proyecta a círculos en  $\mathbb{C}$  y, a los círculos en  $\mathbb{S}^2$  que pasan por  $\mathcal{N}$  los proyecta a conjuntos de la forma  $L \cup \{\infty\}$ , con  $L \subset \mathbb{C}$  una línea recta. Así, existen dos tipos de círculos en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ : los usuales en  $\mathbb{C}$ , como el círculo unitario  $\mathbb{S}^1 = \{x+iy \in \mathbb{C} : x^2+y^2 = 1\}$  y los **círculos por infinito**, que se ven como rectas en  $\mathbb{C}$  unión  $\{\infty\}$ . Dos ejemplos de círculos por infinito son los reales extendidos  $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y los imaginarios extendidos  $i\hat{\mathbb{R}} := \{iy \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ . Observemos que  $\hat{\mathbb{R}} \cap i\hat{\mathbb{R}} = \{0, \infty\} = \{\varphi((0, 0, -1)), \varphi(\mathcal{N})\}$ . Al igual que en  $\mathbb{C}$ , tres puntos de la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$  determinan un único círculo.

El **ángulo entre dos curvas diferenciables** que se intersectan en un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ , es el ángulo entre las rectas tangentes a dichas curvas en  $z_0$ . Como es usual, un ángulo con signo positivo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y un ángulo con signo negativo se mide en el sentido de las manecillas del reloj.

**Definición 2.1.** Supongamos que  $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una función biyectiva. Decimos que  $M$  es **de Möbius** o **anti-Möbius** si existen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  con  $ad - bc \neq 0$  y tales que

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{o} \quad M(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

respectivamente.

En el desarrollo del trabajo utilizamos las siguientes propiedades de las funciones de Möbius y anti-Möbius que pueden consultarse en [7].

- Las funciones de Möbius y anti-Möbius preservan círculos en  $\hat{\mathbb{C}}$ .
- Las funciones de Möbius preservan orientación en  $\hat{\mathbb{C}}$  y las anti-Möbius la invierten.
- Las funciones de Möbius preservan la magnitud y el signo de ángulos entre curvas diferenciables y, las funciones anti-Möbius preservan la magnitud de los ángulos pero invierten su signo.
- La composición de funciones de Möbius o anti-Möbius es una función de Möbius o anti-Möbius.
- La inversa de una función de Möbius es función de Möbius. Análogamente sucede con las funciones anti-Möbius.
- Si  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son puntos distintos en  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces existe una única
  - función de Möbius  $M$  con  $M(z_1) = 0$ ,  $M(z_2) = 1$  y  $M(z_3) = \infty$ .
  - función anti-Möbius  $N$  con  $N(z_1) = 0$ ,  $N(z_2) = 1$  y  $N(z_3) = \infty$ .

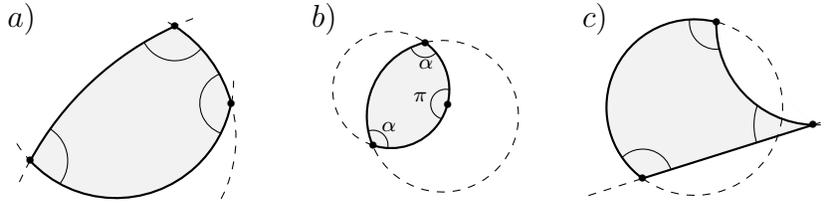
Además, si  $\mathcal{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$  es el círculo determinado por  $z_1, z_2$  y  $z_3$ , entonces  $M(\mathcal{C}) = N(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$ . La diferencia entre  $M$  y  $N$  es que envían de forma opuesta las dos componentes en  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}$  sobre los semiplanos superior  $\mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$  e inferior  $\mathbb{H}^- := \{x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$ .

- Las funciones de Möbius y anti-Möbius son las únicas funciones de  $\hat{\mathbb{C}}$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  que son biyectivas, diferenciables y preservan la magnitud de los ángulos.

### 3. Triángulos circulares

En esta sección definimos los triángulos circulares en  $\hat{\mathbb{C}}$ , la equivalencia entre ellos y mostramos cómo son todos los triángulos que tienen aristas contenidas en uno o dos círculos diferentes. Un **arco** es la parte de un círculo en  $\hat{\mathbb{C}}$  comprendida entre dos puntos en él, incluyendo los puntos. A los puntos en el borde de un arco les llamamos **extremos**. El **interior de un arco**  $\mathcal{A}$  es el arco sin sus extremos y se denota  $\mathcal{A}^\circ$ . Un **rayo** es un arco en un círculo por infinito cuyos extremos son un punto  $v \in \mathbb{C}$  e  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ . Ejemplos de rayos son  $\mathcal{R}_\alpha := \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} : r \geq 0\} \cup \{\infty\}$ ,  $[\infty, a] := \{r \leq a\} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{R}}$  y  $[a, \infty] := \{r \geq a\} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{R}}$ . Es claro que dos puntos en un círculo son extremos de dos arcos que se intersectan en dichos puntos y tienen interiores disjuntos. Un **dominio** en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  es un subconjunto que es abierto y conexo. Recordemos que una **curva cerrada simple** en  $\hat{\mathbb{C}}$  es la imagen de una función continua en  $[0, 1]$ , que es inyectiva en  $[0, 1)$  y con las imágenes de 0 y 1 iguales.

**Definición 3.1.** Un **triángulo circular** es un dominio en  $\hat{\mathbb{C}}$  cuya frontera es una curva cerrada simple y está formada por tres arcos de círculo.



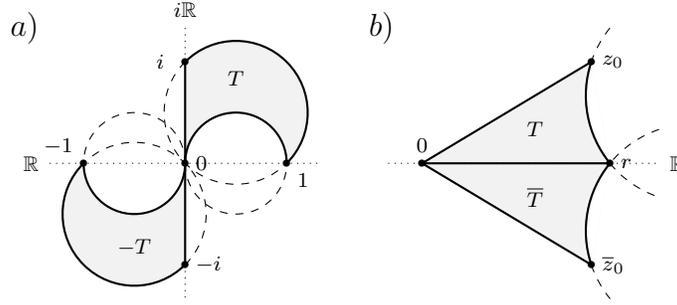
**Figura 1.** Ejemplos de triángulos circulares en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Observemos que un vértice del triángulo en *b*) es un punto marcado en un arco de círculo, además, una arista del triángulo en *c*) es un arco en un círculo por infinito.

Si  $T \subset \hat{\mathbb{C}}$  es un triángulo circular, entonces sus **lados** o **aristas** son los arcos de círculo en su frontera, sus **vértices** son los puntos (diferentes entre sí) de intersección de los lados y el **ángulo interno** de  $T$  en un vértice, es el ángulo entre los lados que se intersectan en dicho vértice. Denotaremos con  $\partial T$  a la curva en la frontera del triángulo. La figura 1 muestra ejemplos de triángulos circulares.

En este documento,  $T \subset \hat{\mathbb{C}}$  será un triángulo circular con vértices  $v_1, v_2, v_3$ . Si al recorrer la frontera  $\partial T$  de  $v_1$  a  $v_2$ , a  $v_3$  y regresar a  $v_1$ ,

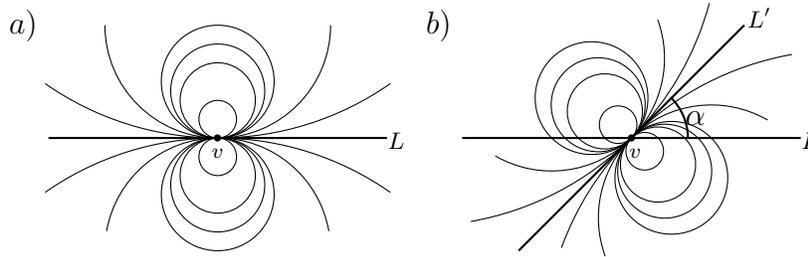
giramos al contrario de las manecillas del reloj, entonces decimos los vértices están ordenados en sentido positivo. En caso contrario decimos que los vértices están ordenados en sentido negativo.

**Definición 3.2.** Decimos que el triángulo circular  $T'$  es **equivalente** a  $T$  si existe una función  $M$  de Möbius o anti-Möbius, tal que  $M(T') = T$ .



**Figura 2.** Ejemplos de triángulos circulares equivalentes. a) Triángulos que difieren por la multiplicación por  $-1$ . b) Triángulos que difieren por la conjugación compleja.

Como las funciones de Möbius y anti-Möbius preservan ángulos, los triángulos equivalentes tienen ángulos internos iguales. Debido a que las funciones de Möbius preservan la orientación y las anti-Möbius la invierten, tenemos que si los vértices  $v_1, v_2, v_3 \in \partial T$  están ordenados en sentido positivo y  $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es de Möbius o anti-Möbius, entonces en  $M(\partial T)$  los vértices  $M(v_1), M(v_2), M(v_3)$  están ordenados en sentido positivo o en sentido negativo, respectivamente. Ejemplos de triángulos circulares equivalentes se muestran en la figura 2.



**Figura 3.** a) Círculos tangentes al círculo por infinito  $L$  en  $v$ , todos ellos forman ángulo  $0$  o  $\pi$  con  $L$  dependiendo de cómo se mida. b) Círculos por  $v$  que forman ángulo  $\alpha$  o  $\pi - \alpha$  con  $L$ , incluyendo al círculo por infinito  $L'$ .

**Convención.** En este documento nos restringimos a estudiar triángulos circulares con ángulos internos menores o iguales que  $\pi$ .

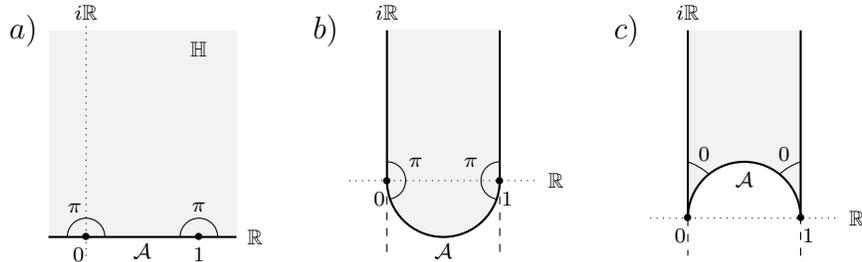
La figura 3 muestra dos fenómenos que enriquecen el estudio de los triángulos circulares; dado un punto  $v$  en un círculo  $\mathcal{C}$ , existen una infinidad de círculos tangentes a  $\mathcal{C}$  en  $v$  ( $\mathcal{C}$  es tangente a sí mismo) y

una infinidad de círculos que forman un ángulo fijo con  $\mathcal{C}$  en  $v$ . Un caso particular de círculos tangentes, es cuando tenemos dos círculos por infinito en  $\hat{\mathbb{C}}$  tales que sus correspondientes rectas en  $\mathbb{C}$  son paralelas.

**Proposición 3.3.** *No existe triángulo circular con ángulos interiores iguales a  $0, 0, \pi$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T$  es triángulo circular con dichas propiedades y aplicamos función de Möbius  $M$  tal que  $M(v_1) = 0$ ,  $M(v_2) = 1$  y  $M(v_3) = \infty$ . Como los ángulos internos son  $0$  o  $\pi$ , las aristas de  $M(T)$  adyacentes a  $\infty$  deben ser rayos contenidos en rectas paralelas por  $0$  y  $1$  y, la arista restante es un arco  $\mathcal{A}$  contenido en un círculo  $\mathcal{C}$  que es tangente en  $0$  y  $1$  a las rectas paralelas mencionadas. Necesariamente  $\mathcal{C}$  es círculo usual pues de lo contrario  $\mathcal{C} = \hat{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{A} = [0, 1]$  y los rayos serían  $[\infty, 0]$ ,  $[1, \infty]$ , por lo que los tres ángulos internos de  $M(T)$  serían iguales a  $\pi$ . El intervalo  $[0, 1]$  es diámetro de  $\mathcal{C}$  (un punto de tangencia de rectas paralelas), luego,  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| = 1/2\}$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  es alguno de los semicírculos superior o inferior y las rectas son  $i\hat{\mathbb{R}}$  y  $\{1 + iy \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}\}$ . Analizando las distintas posibilidades para el rayo y el arco, el lector puede convencerse de que es imposible formar un triángulo circular con ángulos interiores  $0, 0, \pi$ .  $\square$

Utilizando las construcciones en la prueba anterior se puede demostrar que las únicas tres posibilidades para triángulos circulares con ángulos interiores iguales a  $0$  o  $\pi$  son las que se muestran en la figura 4. Aún más, el único triángulo circular con sus tres aristas contenidas en un único círculo es el de la figura 4.a). Procedemos a caracterizar los triángulos circulares con aristas contenidas en dos círculos.



**Figura 4.** Triángulos circulares con ángulos interiores iguales a  $0$  o  $\pi$ . Los incisos a), b) y c) corresponden a los triángulos con ángulos  $\{\pi, \pi, \pi\}$ ,  $\{\pi, \pi, 0\}$  y  $\{0, 0, 0\}$ , respectivamente.

Si el vértice  $v_k \in T$  es tal que sus aristas adyacentes pertenecen a círculos distintos que no son tangentes entre sí, entonces dichos círculos se intersectan en otro punto al que denotamos  $w_k$ .

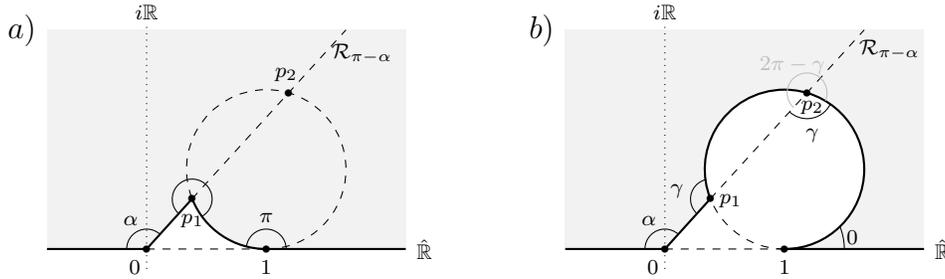
**Observación 3.4.** Si  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$  son círculos tales que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{v, w\}$ , entonces  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}$  está dividido en cuatro dominios llamados

**gajos**, en cada gajo los ángulos en  $v$  y  $w$  son iguales, véase la figura 1.b). Cuando  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{v, \infty\}$  a los gajos les llamamos **regiones angulares**.

**Teorema 3.5.** *Las aristas de  $T$  están contenidas en exactamente dos círculos si y solo si, sus ángulos internos son  $\alpha, \alpha, \pi$  con  $0 < \alpha < \pi$ . En este caso  $T \subset \hat{\mathbb{C}}$  es un gajo, véase la figura 1.b).*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Los círculos  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$  que contienen a las aristas de  $T$  no pueden ser tangentes entre sí. Si  $v_1 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  es vértice de  $T$  cuyas aristas adyacentes pertenecen a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , entonces  $w_1$  también es vértice de  $T$ , pues de lo contrario las tres aristas pertenecerían a un círculo. Concluimos que existen arcos  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}_2$  con extremos  $v_1, w_1$  tales que  $\partial T = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , por lo tanto el vértice restante  $v_k$  es un punto marcado en algún interior  $\mathcal{A}_1^\circ, \mathcal{A}_2^\circ$  y los ángulos internos de  $T$  son;  $\pi$  en  $v_k$  y  $0 < \alpha < \pi$  en  $v_1$  y  $w_1$ .

$\Leftarrow$ ) Pensemos que los ángulos  $\alpha$  están en los vértices  $v_1$  y  $v_2$ . Sabemos que las aristas de  $T$  no están contenidas en un círculo y por lo tanto, existen al menos dos vértices cuyas aristas adyacentes pertenecen a círculos diferentes. Supongamos que  $v_1$  es uno de estos vértices y aplicamos una función  $M$  de Möbius o anti-Möbius tal que  $M(v_1) = 0$ ,  $M(w_1) = \infty$ ,  $M(v_3) = 1$  y  $M(T) \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{C}$  es el círculo determinado por  $v_1, v_3$  y  $w_1$ , entonces  $M(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$  y la arista de  $M(T)$  entre 0 y 1 es  $[0, 1]$  o  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ .



**Figura 5.** a) Por la convención tomada este triángulo no se considera ya que el ángulo interior en  $p_1$  es mayor que  $\pi$ . b) Ejemplo de un triángulo circular en posición III (que definiremos en la sección 4) con vértices  $0, 1, p_1$ .

Supongamos que la arista es  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ . Como el ángulo en 0 es  $\alpha$ , el vértice  $M(v_2)$  pertenece al rayo  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$  y el lado de 1 a  $M(v_2)$  es un arco de círculo usual en  $\mathbb{H}$  que es tangente a  $\mathbb{R}$  en 1 (ángulo  $\pi$ ), véase la figura 5.a). Los círculos con estas propiedades intersectan a  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$  en uno o dos puntos  $p_1, p_2$ , con  $p_1$  entre 0 y  $p_2$ . Por un lado,  $p_1$  no puede ser el vértice  $M(v_2)$  pues en él se forma ángulo mayor que  $\pi$  entre el arco y el segmento de 0 a  $p_1$ , esto mismo sucede si el círculo es

tangente a  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$ . Por otro lado,  $p_2 \neq M(v_2)$  ya que de lo contrario se intersectarían los interiores de dos aristas de  $M(T)$ , (figura 5.a).

Si la arista entre  $M(v_1) = 0$  y  $M(v_3) = 1$  es  $[0, 1]$ , entonces  $M(v_2) \in \mathcal{R}_\alpha$  y la arista de 1 a  $M(v_2)$  no puede ser un arco de círculo usual en  $\mathbb{H}$ , ya que dicho círculo debería ser tangente a  $\mathbb{R}$  en 1 e intersectar a  $\mathcal{R}_\alpha$  en  $M(v_2)$  y por lo tanto, el ángulo interior a  $T$  en  $M(v_2)$  necesariamente sería mayor que  $\alpha$  (figura 5). La única opción es que  $M(v_2) = \infty$  y el rayo  $[1, \infty]$  sea la arista de 1 a  $M(v_2)$ . Luego, las aristas de  $M(T)$  están contenidas en dos círculos por  $\infty$  y  $T$  es una región angular en  $\hat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

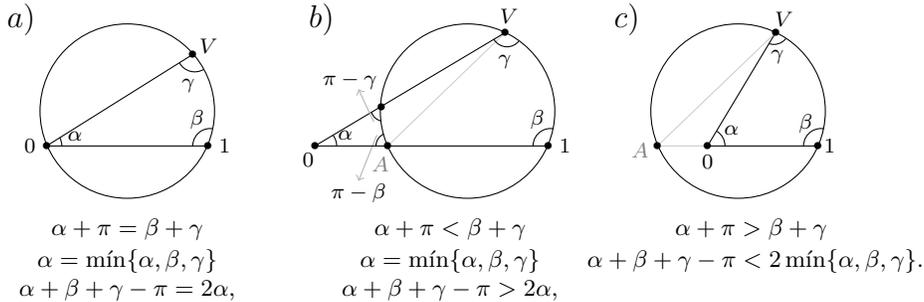
#### 4. Caracterización por ángulos internos

En esta sección probamos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** (*Criterio ángulo-ángulo-ángulo*) *Dos triángulos circulares con ángulos interiores iguales son equivalentes entre sí.*

Notemos que dos triángulos circulares  $T$  y  $T'$  con ángulos interiores iguales definen una única función de Möbius o anti-Möbius que intercambia sus vértices, pero no necesariamente  $T$  se envía en  $T'$  bajo dicha función, ya que existen muchos círculos que forman un ángulo fijo entre sí, véase la figura 3.b). Para probar este resultado usaremos tres posiciones especiales y mostraremos que los triángulos con aristas contenidas en tres círculos distintos se pueden colocar a una de ellas. Antes de introducir dichas posiciones probamos un resultado geométrico auxiliar.

**Proposición 4.2.** *Si  $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ , entonces en las siguientes configuraciones se cumplen las ecuaciones que se mencionan*



*Demostración.* En los tres casos los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  son semi-inscritos al círculo. En los incisos b) y c), el punto  $A$  es la otra intersección del círculo con  $\mathbb{R}$ .

a) El ángulo  $\alpha$  es inscrito y su arco más el círculo completo igualan la suma de los arcos correspondientes a  $\beta$  y  $\gamma$ . Se sigue que  $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y  $\alpha + \pi = \beta + \gamma$ .

b) Trazando un segmento de  $A$  a  $V$  se forman el ángulo inscrito  $\alpha' > \alpha$  y el ángulo semi-inscrito  $\gamma' < \gamma$ , como en  $a)$ , véase la configuración  $b)$ . Luego,

$$\alpha + \pi < \alpha' + \pi = \beta' + \gamma < \beta + \gamma \quad \text{y} \quad \alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

En ambos lados de las desigualdades probadas en  $a)$  y  $b)$  sumamos  $\alpha - \pi$  para obtener  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 2\alpha$  y  $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 2\alpha$ , respectivamente.

c) Nuevamente, trazando el segmento de  $A$  a  $V$  se forman los ángulos  $\alpha' < \alpha$  y  $\gamma' > \gamma$  como en el caso  $a)$ , véase la configuración  $c)$ . Luego

$$\alpha + \pi > \alpha' + \pi = \beta + \gamma' > \beta + \gamma.$$

Aplicando funciones de Möbius, se pueden obtener configuraciones análogas a  $c)$  pero de manera que el ángulo dentro del círculo sea  $\beta$  o  $\gamma$ . Por lo tanto cualquier ángulo puede ser el mínimo y también se satisfacen  $\beta + \pi > \alpha + \gamma$  y  $\gamma + \pi > \alpha + \beta$ . Si suponemos que  $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , entonces sumando  $\alpha - \pi$  en  $\alpha + \pi > \beta + \gamma$ , obtenemos  $2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\} = 2\alpha > \alpha + \beta + \gamma - \pi$ .  $\square$

Para definir las posiciones supongamos que  $\mathcal{T} \subset \mathbb{H}$  es un triángulo circular con dos de sus vértices en  $0$  y  $1$ , que la arista entre ellos es un arco contenido en  $\hat{\mathbb{R}}$  y que  $\alpha \in (0, \pi)$  es el ángulo interior en  $0$ .

I) Si  $\infty$  es el otro vértice y las aristas de  $\mathcal{T}$  son el intervalo  $[0, 1]$  y los rayos  $\mathcal{R}_\alpha = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} : r \geq 0\} \cup \{\infty\}$  y  $\{re^{i\alpha} + 1 \in \mathbb{C} : r \geq 0\} \cup \{\infty\}$ , entonces decimos que  $\mathcal{T}$  está en **posición I**. En este caso los ángulos internos de  $\mathcal{T}$  son  $\alpha$ ,  $\pi - \alpha$  y  $0$ , véase la figura 6.a).

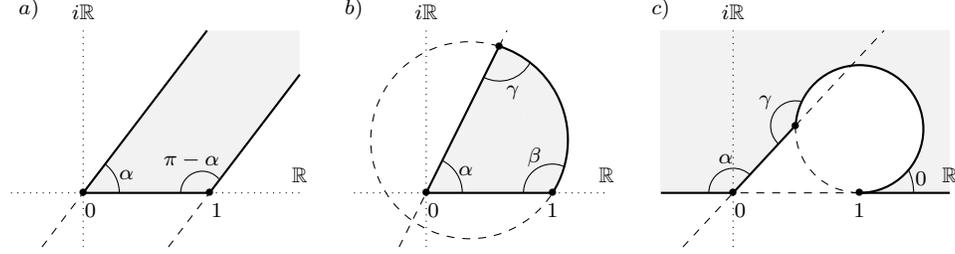
II) Si las aristas adyacentes a  $0$  son  $[0, 1]$  y un segmento propiamente contenido en el rayo  $\mathcal{R}_\alpha$  ( $\infty$  no puede ser vértice), entonces decimos que  $\mathcal{T}$  está en **posición II**. Denotando con  $\beta$  al ángulo interior de  $\mathcal{T}$  en  $1$ , con  $\gamma$  al ángulo restante y usando la proposición 4.2, tenemos las siguientes tres posibilidades:

- a)  $\mathcal{T}$  está en configuración  $a)$ : los ángulos satisfacen las desigualdades  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ ,  $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 2\alpha$ .
- b)  $\mathcal{T}$  está en configuración  $b)$ : se cumplen  $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y  $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 2\alpha$ .
- c)  $\mathcal{T}$  es triángulo euclidiano (aristas que son segmentos de recta) o está en configuración  $c)$ : se cumple que  $\alpha + \beta + \gamma - \pi < 2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

La figura 6.b) muestra un triángulo circular en posición II.

III) Si el ángulo interior a  $\mathcal{T}$  en el vértice  $1$  es  $0$  y las aristas adyacentes a  $0$  son el arco  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$  y un segmento propiamente contenido en  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$ , entonces decimos que  $\mathcal{T}$  está en **posición III**, véase la figura 6.c). En este caso el ángulo restante  $\gamma$  es necesariamente positivo, además, de la configuración  $c)$  en la proposición 4.2, concluimos que  $\pi < \alpha + \gamma$ .

Como ejercicio dejamos que el lector se convenza de que los triángulos circulares con aristas contenidas en dos círculos, descritos en el teorema 3.5, no pueden colocarse en ninguna de estas tres posiciones. Procedemos a mostrar la existencia y unicidad de triángulos en cada posición.



**Figura 6.** En a), b) y c) se muestran ejemplos de triángulos circulares  $\mathcal{T}$  en las posiciones I, II y III, respectivamente.

**Lema 4.3.** *Supongamos que  $\alpha \in (0, \pi)$ .*

- a) *Existe un único triángulo circular en posición I con ángulos internos  $\alpha, \pi - \alpha$  y  $0$  en los vértices  $0, 1$  e  $\infty$ , respectivamente.*  
b) *Si  $\beta, \gamma \in [0, \pi]$  son tales que  $\beta \leq \gamma$ ,  $\alpha$  es mínimo entre los números positivos de la terna  $\alpha, \beta, \gamma$  y se satisface alguna de las condiciones*

- i)  $\beta = \gamma = 0$ ,                      iii)  $\alpha + \beta = \pi$ ,  
ii)  $\alpha + \beta < \pi$  con  $\beta > 0$ ,        iv)  $\alpha + \beta > \pi$ ,

*entonces existe un único triángulo circular en posición II con ángulos internos  $\alpha$  en  $0$ ,  $\beta$  en  $1$  y  $\gamma$  en el vértice restante.*

- c) *Si  $\gamma \in (0, \pi]$  es tal que  $\alpha \leq \gamma$  y  $\alpha + \gamma > \pi$ , entonces existe un único triángulo circular en posición III con ángulos  $\alpha$  en  $0$ ,  $0$  en  $1$  y  $\gamma$  en el otro vértice.*

*Demostración.* Construiremos los triángulos circulares en cada caso.

Para el inciso a) la existencia del triángulo se sigue inmediatamente de la definición de la posición I.

Para los casos en b) basta probar que existe un único arco de círculo (no rayo) que forma ángulo  $\beta$  con el segmento  $[0, 1]$  en  $1$  y ángulo  $\gamma$  con el rayo  $\mathcal{R}_\alpha$ . Denotamos con  $L_\alpha = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathcal{L} = \{re^{i(\pi-\beta)} + 1 \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}\}$  a las rectas que forman ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con  $[0, 1]$ , respectivamente (figura 7). Procedemos por separado.

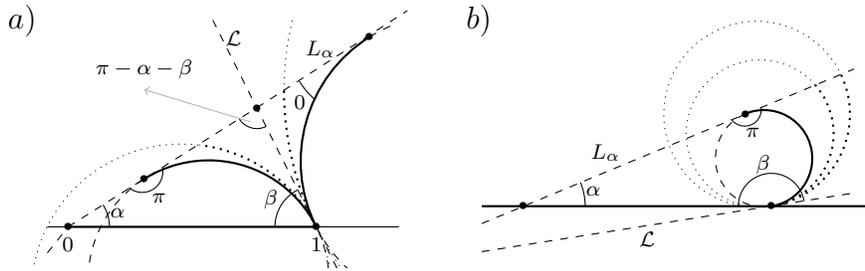
*Caso i)* En este caso  $\mathcal{L} = \mathbb{R}$  y el arco buscado está contenido en el único círculo que pasa por  $1$  y es simultáneamente tangente a  $\mathbb{R}$  y a  $L_\alpha$ .

*Caso ii)* Como muestra la figura 7.a), los círculos tangentes a  $\mathcal{L}$  en  $1$  intersectan a  $L_\alpha$  en  $\mathbb{H}$  (ya que  $\alpha \leq \beta$ ) determinando así triángulos

circulares en posición *II*, uno de ellos es  $\mathcal{L} \cup \{\infty\}$ . Los ángulos interiores a dichos triángulos en el vértice en  $\mathcal{R}_\alpha$ , decrecen continuamente de  $\pi$  a  $\pi - \alpha - \beta$  con círculos tangentes a  $\mathcal{L}$  por la izquierda y decrecen de  $\pi - \alpha - \beta$  a 0 con círculos tangentes a  $\mathcal{L}$  por la derecha (figura 7.a)). Por el teorema del valor medio para funciones continuas, todo valor  $\gamma \in [0, \pi]$  se alcanza en un único punto.

*Caso iii)* Las rectas  $L_\alpha$  y  $\mathcal{L}$  son paralelas y por lo tanto, solo círculos tangentes por la izquierda a  $\mathcal{L}$  en 1 pueden intersectar a  $L_\alpha$ . Los círculos que intersectan a  $L_\alpha$  determinan triángulos circulares en posición *II* cuyos ángulos interiores en el vértice en  $\mathcal{R}_\alpha$  decrecen de  $\pi$  a 0, por continuidad existe un único arco de círculo que hace ángulo  $\gamma \in (0, \pi]$  con  $\mathcal{R}_\alpha$ . Notemos que el ángulo  $\gamma = 0$  se alcanza con el círculo  $\mathcal{L} \cup \{\infty\}$  que intersecta a  $\mathcal{R}_\alpha$  en  $\infty$ , por hipótesis este caso no se considera aquí ya que determina un triángulo circular en posición *I*.

*Caso iv)* Las rectas  $L_\alpha$  y  $\mathcal{L}$  se intersectan en el semiplano inferior con ángulo  $\alpha + \beta - \pi$ . Nuevamente, los círculos tangentes por la izquierda a  $\mathcal{L}$  en 1, intersectan a  $L_\alpha$  en  $\mathbb{H}$  ( $\alpha \leq \beta$ ) y determinan triángulos circulares en posición *II* con ángulos interiores en el vértice que pertenece a  $\mathcal{R}_\alpha$  que decrecen de  $\pi$  a  $\alpha + \beta - \pi$  (figura 7.b)). Por hipótesis,  $\alpha \leq \gamma$  y por lo tanto  $\alpha + \beta - \pi \leq \alpha \leq \gamma \leq \pi$ . Por continuidad existe un único triángulo circular con ángulo interior  $\gamma \in [\alpha + \beta - \pi, \pi]$ .



**Figura 7.** Variación de los ángulos internos, los incisos a) y b) corresponden a los casos *ii)* y *iv)*, respectivamente.

En el caso *c)*, los círculos en  $\mathbb{H}$  que son tangentes a  $\hat{\mathbb{R}}$  en 1 e intersectan al rayo  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$  en dos puntos  $p_1, p_2$ , definen dos triángulos circulares (no acotados en  $\mathbb{C}$ ) con aristas  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ , un segmento propiamente contenido en  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$  y un arco en dichos círculos, véase la figura 5.b). Solo el triángulo circular con vértice  $p_1$  está permitido ya que el otro triángulo tiene ángulo interior mayor que  $\pi$  en  $p_2$ . En los triángulos permitidos, el ángulo interior en el vértice distinto de 0 y 1 decrece de  $\pi$ , cuando el círculo es tangente a  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$ , a  $\alpha$  cuando el círculo es  $\hat{\mathbb{R}}$ . Por continuidad existe un único círculo en el cual se alcanza el valor  $\gamma \in (\alpha, \pi]$ .  $\square$

Del resultado anterior se sigue que para cualesquiera tres números  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$  con al menos uno de ellos mayor que 0 y menor que  $\pi$ , existe un triángulo circular con ángulos interiores iguales a  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Veamos que en las primeras dos posiciones mencionadas existen algunas tercias de ángulos que se repiten.

**Observación 4.4.** Supongamos que  $\mathcal{T}$  es un triángulo circular con dos de sus vértices en 0 y 1.

- a) Si  $\mathcal{T}$  está en posición *I* con ángulos  $\alpha$  en 0 y  $\pi - \alpha$  en 1, entonces el triángulo  $M(\mathcal{T})$  con  $M(z) = 1 - \bar{z}$ , también está en posición *I* y tiene ángulos  $\pi - \alpha$  en 0 y  $\alpha$  en 1.
- b) Si  $\mathcal{T}$  está en posición *II* con ángulos  $\alpha$  en 0,  $\beta$  en 1 y  $\gamma$  en el vértice restante, entonces  $M(\mathcal{T})$  con  $M(z) = e^{i\alpha}\bar{z}$ , también está en posición *II* y tiene ángulos  $\alpha$  en 0,  $\gamma$  en 1 y  $\beta$  en el otro vértice.

Antes de demostrar el criterio ángulo-ángulo-ángulo necesitamos un último resultado preliminar.

**Lema 4.5.** *Si  $T$  tiene aristas contenidas en tres círculos distintos y el ángulo interior en  $v_j$  es mayor que 0 y menor que  $\pi$ , entonces  $w_j$  (la otra intersección de los círculos que contienen a las aristas de  $T$  adyacentes a  $v_j$ ) no puede estar en el interior de la arista opuesta a  $v_j$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $j = 1$  y que  $w_1$  pertenece al interior de la arista entre  $v_2$  y  $v_3$ . Si  $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es la función de Möbius tal que  $M(v_2) = 0$ ,  $M(v_3) = 1$  y  $M(w_1) = \infty$ , entonces las aristas de  $M(T)$  están contenidas en círculos por  $\infty$ , en particular la arista de 0 a 1 es el arco  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ . Como los lados están contenidos en círculos distintos y  $v_1 \neq w_1$ , entonces las aristas adyacentes a  $M(v_1)$  son segmentos finitos y  $M(v_1) \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{\mathbb{R}}$ . Por la forma de las aristas existen dos posibilidades: que el ángulo interior en  $M(v_1)$  sea mayor que  $\pi$  o que los dos ángulos interiores en 0 y 1 son mayores que  $\pi$ . En ambos casos obtenemos una contradicción pues solo consideramos ángulos menores a  $\pi$ .  $\square$

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1:** Para triángulos circulares con ángulos interiores iguales a 0 o  $\pi$  o con aristas contenidas en dos círculos, el resultado se sigue de la figura 4 y el teorema 3.5.

Supongamos que  $T$  tiene aristas contenidas en tres círculos diferentes y el ángulo  $\alpha$  en el vértice  $v_1$ , satisface que  $0 < \alpha < \pi$  y es mínimo entre los ángulos positivos. Mostraremos que  $T$  se puede colocar en alguna de las tres posiciones definidas (figura 6). Por el lema 4.5, existen las siguientes tres posibilidades para el punto  $w_1$ :

- a) no pertenece a la frontera  $\partial T$ ,
- b) es vértice de  $T$ ,
- c) pertenece al interior de un arista adyacente a  $v_1$ .

Consideremos la función  $M$  de Möbius o anti-Möbius tal que  $M(v_1) = 0$ ,  $M(w_1) = \infty$ ,  $M(v_j) = 1$  con  $j \in \{2, 3\}$  tal que  $v_j \neq w_1$  y  $M(T) \subset \mathbb{H}$ . Observemos que  $M$  envía el círculo que contiene a  $\{v_1, w_1, v_j\}$  en  $\hat{\mathbb{R}}$ , luego, una arista de  $M(T)$  es  $[0, 1]$  o  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ . Procedemos a analizar cómo está acomodado el triángulo circular  $M(T)$  en cada caso.

a) Como  $\infty \notin \partial M(T)$  y  $\alpha$  es el ángulo interno en  $0$ ,  $[0, 1]$  es arista de  $M(T)$  y otra arista está propiamente contenida en el rayo  $\mathcal{R}_\alpha$ . La arista restante es un círculo de  $\hat{\mathbb{C}}$  que une a  $1$  con el vértice en  $\mathcal{R}_\alpha^\circ$ , luego,  $M(T)$  está en posición *II* (figura 6.b)).

b) Necesariamente los tres círculos que contienen a las aristas de  $T$  concurren en  $w_1$ , por lo tanto las aristas de  $M(T)$  son  $[0, 1]$  y dos rayos que no se intersectan en  $\mathbb{H}$ . Si  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos interiores de  $M(T)$  en  $1$  e  $\infty$  respectivamente, entonces existen dos opciones;  $\beta = \pi - \alpha$  y  $\gamma = 0$ , se sigue que los rayos son paralelos y  $M(T)$  está en posición *I* (figura 6.a)).  $\beta > \pi - \alpha$  y  $\gamma = \alpha + \beta - \pi$ , estos triángulos no se consideran aquí ya que  $\alpha$  no es mínimo ( $\gamma < \alpha$  pues  $\beta < \pi$ ,  $\beta = \pi$ , implica  $\gamma = \alpha$  y las aristas de  $M(T)$  están contenidas en dos círculos, teorema 3.5).

c) La arista de  $M(T)$  adyacente a  $0$  y que contiene a  $\infty$  en su interior es  $\hat{\mathbb{R}} \setminus (0, 1)$ , ya que si dicha arista estuviese contenida en alguna de las rectas  $L_\alpha = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}\}$  o  $L_{\pi-\alpha} = \{re^{i(\pi-\alpha)} \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}\}$ , entonces no se cumpliría que  $M(T)$  está contenido en  $\mathbb{H}$ . Luego, la otra arista adyacente a  $0$  está propiamente contenida en el rayo  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}$  y el tercer lado es un arco de círculo en  $\mathbb{C}$  que une a  $1$  con el vértice en  $\mathcal{R}_{\pi-\alpha}^\circ$ . Si  $\beta$  es el ángulo interior de  $M(T)$  en  $1$ , entonces existen dos opciones:  $\beta = 0$  y por lo tanto  $M(T)$  está en posición *III* (figura 6.c)), o bien  $\beta > 0$  y por la configuración b) en la proposición 4.2,  $\pi - \alpha < \pi - \beta$  que es equivalente a  $\beta < \alpha$ , nuevamente estos triángulos no se consideran aquí ya que  $\alpha$  no es mínimo.

Cabe señalar que los triángulos que no son considerados en los casos b) y c), se incluyen en el caso a). Una vez colocados los triángulos en alguna de las posiciones *I*, *II* y *III*, la prueba se concluye usando el lema 4.3 y la observación 4.4.  $\square$

## 5. Diferentes tipos de triángulos circulares

En esta sección damos una introducción muy breve a las geometrías hiperbólica y esférica, caracterizamos los triángulos circulares euclidianos, hiperbólicos y esféricos a través de sus ángulos y definimos los triángulos circulares ageométricos, los cuales no pertenecen a ninguna de las geometrías hiperbólica, euclidiana y esférica. En su obra «Los Elementos», Euclides axiomatizó el estudio de la geometría en el plano

utilizando cinco postulados. El siguiente enunciado es equivalente al quinto postulado de Euclides:

**Postulado de las paralelas.** *Dado un punto y una línea que no lo contenga, existe una única línea que contiene a dicho punto y que no intersecta a la línea previamente mencionada.*

Este postulado fue muy cuestionado y sin éxito se intentó demostrar a partir de los cuatro postulados restantes. En la década de 1820 y de forma independiente, N. Lobachevski y J. Bolyai desarrollaron la geometría utilizando negaciones del postulado de las paralelas.

La **geometría hiperbólica** se construye utilizando como axiomas los primeros cuatro postulados de Euclides y la siguiente negación del postulado de las paralelas:

*Dado un punto y una línea que no lo contenga, existe más de una línea paralela que contiene a dicho punto.*

De manera similar, la **geometría esférica** se construye con los primeros cuatro postulados de Euclides y la siguiente negación del postulado de las paralelas:

*Dado un punto y una línea que no lo contenga, no existe línea paralela que contenga a dicho punto.*

Estas dos geometrías son completamente lógicas y tan importantes como la geometría euclidiana. Procedemos a estudiar los triángulos de las tres geometrías.

### 5.1 Triángulos euclidianos

La geometría euclidiana es la más conocida ya que la utilizamos en nuestra vida diaria. Dicha geometría se desarrolla en el plano y las **líneas euclidianas** son las líneas rectas.

**Definición 5.1.** Un **triángulo euclidiano** es un dominio en  $\mathbb{C}$  cuya frontera es una curva cerrada simple que está formada por tres segmentos de recta.

Los triángulos euclidianos son casos particulares de triángulos circulares ya que las rectas en  $\mathbb{C}$  determinan círculos por infinito en  $\hat{\mathbb{C}}$  (sección 2). Decimos que un **triángulo circular es euclidiano** si es equivalente a un triángulo euclidiano.

**Proposición 5.2.** *Un triángulo circular  $T \subset \hat{\mathbb{C}}$  es equivalente a un triángulo euclidiano si y solo si, sus aristas están contenidas en tres círculos que concurren en un punto que no pertenece a la frontera  $\partial T$  (figura 8.a)). En particular, los ángulos internos de  $T$  son positivos y su suma es igual a  $\pi$ .*

*Demostración.* Si existe  $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de Möbius o anti-Möbius tal que  $M(T)$  es triángulo euclidiano, entonces los lados de  $M(T)$  definen círculos en  $\hat{\mathbb{C}}$  que concurren en  $\infty$ . Luego, los círculos que contienen a las aristas de  $T$  concurren en  $M^{-1}(\infty)$ .

Si los círculos que contienen las aristas de  $T$  concurren en  $w \notin \partial T$  (figura 8.a)), entonces existe una única  $M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de Möbius tal que  $M(v_1) = 0$ ,  $M(v_2) = 1$  y  $M(w) = \infty$ . Es claro que el triángulo circular  $M(T)$  tiene lados que son segmentos de recta.

Del teorema 4.1 se sigue que los triángulos circulares euclidianos tienen ángulos positivos que suman  $\pi$ .  $\square$

### 5.2 Triángulos hiperbólicos

Un modelo para la geometría hiperbólica es el **disco de Poincaré**

$$\mathbb{D} := \{x + iy \in \hat{\mathbb{C}} : x^2 + y^2 < 1\},$$

donde las **líneas hiperbólicas** son arcos de círculo que son perpendiculares a la frontera  $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$  y cuyos extremos en  $\mathbb{S}^1$  se conocen como **puntos ideales**. Existen dos tipos de líneas hiperbólicas: los arcos de círculos usuales en  $\mathbb{C}$  y los diámetros de  $\mathbb{D}$ , que son arcos de círculos por infinito en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Decimos que **dos líneas hiperbólicas se intersectan** si comparten un punto en  $\mathbb{D}$  o un punto ideal en  $\mathbb{S}^1$ . Dos líneas hiperbólicas que se intersectan en un punto ideal  $p \in \mathbb{S}^1$  forman ángulo 0 entre ellas, ya que el diámetro de  $\mathbb{D}$  por  $p$  es tangente a ambas. Un **segmento hiperbólico** es un arco entre dos puntos (pueden ser ideales) de una línea hiperbólica.

**Definición 5.3.** Un **triángulo hiperbólico** es un dominio en  $\mathbb{D}$  cuya frontera es una curva cerrada simple formada por tres segmentos hiperbólicos.

Es claro que los triángulos hiperbólicos son en particular triángulos circulares en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Decimos que un **triángulo circular es hiperbólico** si es equivalente a un triángulo hiperbólico. En esta sección utilizaremos que dada una línea hiperbólica  $\mathcal{L} \subset \mathbb{D}$  y  $z_0 \in \mathcal{L}$  que no es punto ideal, existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  de manera que la función de Möbius

$$M = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \text{ es tal que } M(z_0) = 0, M(\mathcal{L}) = (-1, 1) \text{ y } M(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

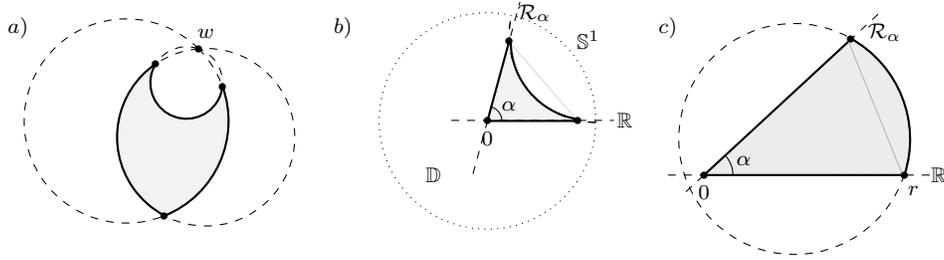
Esta propiedad se resume diciendo que el grupo de automorfismos  $Aut(\mathbb{D})$  del disco unitario actúa transitivamente en puntos y en líneas hiperbólicas. Una demostración de esto se puede consultar en [1].

**Proposición 5.4.** Si  $T \subset \mathbb{D}$  es triángulo hiperbólico con ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$ , entonces se satisface  $0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi$ . En particular,

un triángulo circular es hiperbólico si y solo si la suma de sus ángulos internos es menor que  $\pi$ .

*Demostración.* Si los tres vértices de  $T$  son ideales, entonces sus ángulos internos son 0 y por lo tanto  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , véase la figura 4.c). Si el vértice  $v_1$  tiene ángulo  $\alpha > 0$ , entonces existe  $M \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tal que  $M(v_1) = 0$  y sus aristas adyacentes están contenidas en  $[0, 1]$  y  $\mathcal{R}_\alpha \cap (\mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1)$ . Como el triángulo hiperbólico  $M(T)$  está contenido en el euclidiano con vértices  $0$ ,  $M(v_2)$  y  $M(v_3)$ , se sigue que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , véase la figura 8.b). Utilizando el teorema 4.1 concluimos que los triángulos circulares hiperbólicos tienen suma de ángulos interiores menor que  $\pi$ .  $\square$

De la proposición 3.3 y el lema 4.3 tenemos que para toda terna  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi)$  con  $0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi$ , existe un triángulo circular hiperbólico con ángulos interiores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .



**Figura 8.** a) Triángulo circular euclidiano. b) Triángulo hiperbólico en el disco de Poincaré  $\mathbb{D}$ . c) Triángulo circular esférico.

### 5.3 Triángulos esféricos

El modelo natural para desarrollar la geometría esférica es la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , donde las **líneas esféricas** son círculos que se obtienen mediante la intersección de  $\mathbb{S}^2$  con un plano que contiene al origen  $(0, 0, 0)$ , los cuales se conocen como **círculos máximos**. Dos ejemplos de círculos máximos son  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} := \mathbb{S}^2 \cap \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$  y  $\mathcal{C}_\alpha := \{(x, x \tan(\alpha), z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \sec^2(\alpha) + z^2 = 1\}$ . Debido a que en  $\mathbb{R}^3$  cualesquiera dos planos por el origen se intersectan en una recta, tenemos que dos círculos máximos se intersectan en puntos antípodas de  $\mathbb{S}^2$ . Por ejemplo,  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{C}_\alpha = \{\mathcal{N}, \mathcal{S}\}$  con  $\mathcal{N} = (0, 0, 1)$  el polo norte y  $\mathcal{S} = (0, 0, -1)$  el polo sur de  $\mathbb{S}^2$ . Un **segmento esférico** es un arco entre dos puntos de un círculo máximo.

**Definición 5.5.** Un **triángulo esférico** es un dominio en  $\mathbb{S}^2$  cuya frontera es una curva cerrada simple que está formada por tres segmentos esféricos.

**Observación 5.6.** Un círculo máximo divide a  $\mathbb{S}^2$  en dos hemisferios de igual tamaño. Por nuestra convención de solo considerar ángulos interiores menores o iguales a  $\pi$ , tenemos que todo triángulo esférico está contenido en uno de los hemisferios que definen los círculos máximos que contienen a sus aristas, aún más, el triángulo esférico se obtiene intersectando dichos hemisferios.

En la sección 2 vimos que la proyección estereográfica  $\varphi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  preserva círculos y ángulos. Por ejemplo, de la ecuación (1) se sigue que  $\varphi(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$  y  $\varphi(\mathcal{C}_{\alpha}) = L_{\alpha} = \{re^{i\alpha} : r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ . Luego, la imagen bajo  $\varphi$  de un triángulo esférico es un triángulo circular en  $\hat{\mathbb{C}}$  con iguales ángulos internos. Decimos que un **triángulo circular es esférico** si es equivalente a la imagen de un triángulo esférico bajo  $\varphi$ .

Denotamos con  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  al conjunto de matrices de  $3 \times 3$  con entradas reales, con  $Id \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  a la matriz identidad y con  $A^t$  a la transpuesta de  $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ . El grupo ortogonal,

$$O(3) := \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : AA^t = Id\},$$

contiene a las funciones lineales que preservan distancia en  $\mathbb{R}^3$ . Es conocido que si  $A \in O(3)$ , entonces  $\det(A) = 1$  si  $A$  preserva orientación y  $\det(A) = -1$  si  $A$  invierte la orientación. Además, la acción de  $O(3)$  en  $\mathbb{S}^2$  preserva círculos máximos y ángulos entre ellos [2].

**Observación 5.7.** Supongamos que  $A \in O(3)$ . Si  $\det(A) = 1$ , entonces  $\varphi \circ A \circ \varphi^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una biyección diferenciable que preserva orientación y por lo tanto es de Möbius. Si  $\det(A) = -1$ , entonces  $\varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$  invierte la orientación y por lo tanto es una función anti-Möbius.

Resulta que  $O(3)$  actúa de manera transitiva en puntos de  $\mathbb{S}^2$  y en círculos máximos. Una prueba de este hecho se puede consultar en [2].

**Proposición 5.8.** *Supongamos que  $T \subset \hat{\mathbb{C}}$  es triángulo circular.*

- i. Si las aristas de  $T$  están contenidas en uno o dos círculos, entonces  $T$  es esférico.*
- ii. Si las aristas de  $T$  están contenidas en tres círculos, entonces  $T$  es esférico si y solo si sus ángulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  son positivos y satisfacen  $0 < \alpha + \beta + \gamma - \pi < 2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .*

*Demostración.* El lector puede probar *i* utilizando el teorema 3.5.

Un ángulo interno de  $\varphi^{-1}(T) \subset \mathbb{S}^2$  es el ángulo entre los círculos máximos que contienen a las aristas, el cual corresponde al ángulo entre los planos que definen a los círculos máximos. Se sigue que  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , ya que el ángulo entre dos planos es 0 si y solo si estos son iguales.

Si  $\alpha$  es el ángulo interior en  $v_1$ , entonces existe  $A \in O(3)$  tal que  $A(\varphi^{-1}(v_1)) = \mathcal{S}$  y sus aristas adyacentes son segmentos esféricos contenidos en  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  y  $\mathcal{C}_{\alpha}$ . Además, la arista restante está contenida en un

círculo máximo  $\mathcal{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$  que separa a los polos  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{S}$ . De manera que el triángulo circular  $\varphi(A(\varphi^{-1}(T)))$  tiene aristas contenidas en los rayos  $\mathcal{R}_0$  y  $\mathcal{R}_\alpha$  y en el círculo  $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{C}$  que separa a  $0 = \varphi(\mathcal{S})$  de  $\infty = \varphi(\mathcal{N})$ . Luego,  $\varphi(A(\varphi^{-1}(T)))$  está como en la configuración  $c$ ) de la proposición 4.2 (cambiando 1 por  $\varphi(A(\varphi^{-1}(v_2))) \in \mathbb{R}$ ). Dicho triángulo circular contiene al triángulo euclidiano con vértices en  $0$ ,  $\varphi(A(\varphi^{-1}(v_2)))$  y  $\varphi(A(\varphi^{-1}(v_3)))$  (figura 8.c)) y por lo tanto  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .  $\square$

**Observación 5.9.** En el caso  $i$  de la proposición anterior, si los ángulos interiores de  $T$  son  $\alpha, \beta, \gamma$ , entonces se satisface  $0 < \alpha + \beta + \gamma - \pi = 2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Por lo que un triángulo circular esférico satisface  $0 < \alpha + \beta + \gamma - \pi \leq 2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y la igualdad se da si y solo si, hay dos aristas de  $T$  que pertenecen a un mismo círculo.

#### 5.4 Triángulos ageométricos

Decimos que **triángulo circular es ageométrico** si no es hiperbólico, euclidiano o esférico. Ejemplos de triángulos circulares ageométricos son los que están en la posición  $I$  definida en la sección 4 (figura 6.a)). El siguiente resultado caracteriza los triángulos circulares ageométricos en términos de sus ángulos.

**Proposición 5.10.** *Un triángulo circular con aristas contenidas en tres círculos diferentes es ageométrico si y solo si, sus ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfacen  $\alpha + \beta + \gamma - \pi \geq 2 \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .*

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 5.2, 5.4 y 5.8.  $\square$

**Observación 5.11.** Si  $T$  es un triángulo circular ageométrico, entonces existe una arista de  $T$  tal que el círculo que la contiene intersecta a la frontera  $\partial T$  en un punto fuera de dicha arista. Las figuras 1.c), 2.a), 6.a) y 6.c) muestran más ejemplos de triángulos circulares ageométricos.

## 6. El espacio de parámetros de triángulos circulares

De la proposición 3.3 y por la convención de no considerar ángulos mayores que  $\pi$ , el espacio (con la topología heredada) de posibles ángulos para triángulos circulares es el cubo

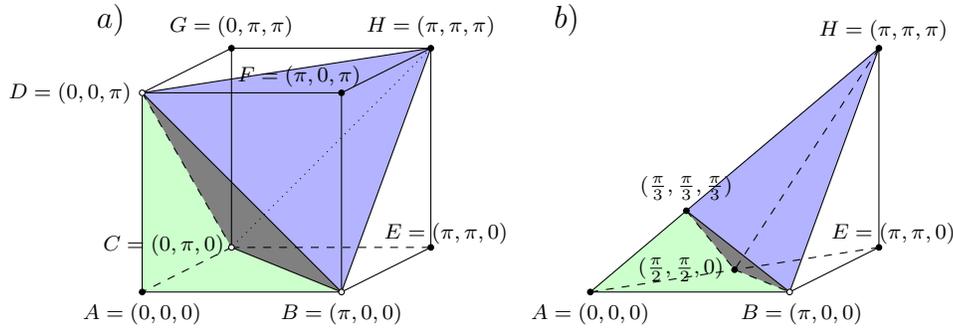
$$\Omega := \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta_j \leq \pi\} \setminus \{(0, 0, \pi), (0, \pi, 0), (\pi, 0, 0)\}.$$

De la sección 5 se sigue que  $\Omega$  está dividido en cuatro subconjuntos que corresponden a triángulos circulares hiperbólicos, euclidianos, esféricos y ageométricos. La figura 9.a) muestra dicha división de  $\Omega$ .

Si  $S_3$  denota al grupo de permutaciones de tres elementos, entonces del teorema 4.1 se sigue que para todo  $\sigma \in S_3$ , las tercias  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  y

$(\theta_{\sigma(1)}, \theta_{\sigma(2)}, \theta_{\sigma(3)})$  representan triángulos circulares equivalentes. El cociente topológico  $\Omega/S_3$  se conoce como el **espacio de parámetros de triángulos circulares en la esfera de Riemann**, véase la figura 9.b). En dicho espacio existe un único punto para cada clase de equivalencia de triángulos circulares.

Para describir las distintas regiones del cubo  $\Omega$  que se muestran la figura 9.a), denotaremos con  $\text{conv}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  a la envolvente convexa de los puntos  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^3$  y con  $\text{conv}^\circ\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  a su interior. Además, con el fin de generarnos una idea intuitiva de «cuáles triángulos son más abundantes», decidimos calcular el volumen correspondiente de cada una de las regiones descritas.



**Figura 9.** a) El cubo  $\Omega$  y la división determinada por las regiones correspondientes a los distintos tipos de triángulos circulares. b) El espacio de parámetros de triángulos circulares  $\Omega/S_3$ .

1. El conjunto de tercias de ángulos que corresponden a triángulos circulares hiperbólicos es el tetraedro sin una cara  $\text{conv}\{A, B, C, D\} \setminus \text{conv}\{B, C, D\}$ . El volumen de este tetraedro es  $\pi^3/6$ .

2. La región de triángulos euclidianos está determinada por las tercias ángulos en el triángulo abierto  $\text{conv}^\circ\{B, C, D\}$  cuyo volumen es 0.

3. Las tercias correspondientes a triángulos circulares esféricos pertenecen al tetraedro regular

$$\text{conv}^\circ\{B, C, D, H\} \cup \{\text{conv}^\circ\{B, H\}, \text{conv}^\circ\{D, H\}, \text{conv}^\circ\{C, H\}\} \cup \{H\}.$$

Dicho tetraedro tiene volumen  $\pi^3/3$ .

4. Los puntos en los tres tetraedros que conforman el complemento de las regiones anteriores determinan triángulos geométricos. La suma de los volúmenes de estos tres tetraedros es  $\pi^3/2$ .

Estos volúmenes sugieren la idea informal de que hay «muy pocos» triángulos euclidianos, que «existen el doble de triángulos esféricos que hiperbólicos (lo que podría esperarse ya que la suma de ángulos internos en el caso hiperbólico está entre 0 y  $\pi$  y en el caso esférico está entre  $\pi$  y  $3\pi$ )» y que «hay tantos triángulos geométricos como triángulos de las

tres geometrías». El espacio de parámetros  $\Omega/S_3$  hereda una división análoga a la de  $\Omega$ , véase la figura 9.b). En este caso el volumen de cada región se obtiene dividiendo por 6 del volumen correspondiente en  $\Omega$ .

### 6.1 Comentarios finales

El estudio del espacio de parámetros de triángulos euclidianos conduce a los conceptos de «espacios moduli» y «stacks algebraicos», los cuales son muy relevantes en Geometría Algebraica. Además, en el espacio de triángulos se pueden observar varios de los fenómenos importantes de los espacios moduli y los stacks. Incluso, Michael Artin, uno de los fundadores de la teoría de stacks, mencionó «basta con entender el stack de triángulos para comprender la teoría de stacks» [3]. Como el espacio de parámetros de triángulos circulares  $\Omega/S_3$  contiene a los triángulos de las tres geometrías, hiperbólica, euclidiana y esférica, este es una generalización natural del espacio de triángulos euclidianos. Es por ello que en  $\Omega/S_3$  se pueden estudiar de manera más general los fenómenos de los espacios moduli y los stacks algebraicos. Introducciones técnicas y más detalladas a la teoría de espacios moduli o de stacks algebraicos se puede consultar en [3, 4].

Las construcciones del espacio de triángulos circulares en  $\hat{\mathbb{C}}$  realizadas en este documento, son de relevancia en otras áreas. Por ejemplo, en el estudio de espacios poliedros de las distintas geometrías, en particular, en las tres geometrías, los dobles de triángulos son los únicos poliedros con tres vértices [6]. Además, en el estudio de las funciones holomorfas univaluadas, ya que se conocen las funciones del semiplano superior sobre el interior de un triángulo circular [5], pero no se ha explicado con detalle cómo es la variación de dicha función con respecto a los ángulos internos de los triángulos circulares.

## Bibliografía

- [1] J. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, 2.<sup>a</sup> ed., Springer Undergraduate Mathematics Series, 2005.
- [2] M. Audin, *Geometry*, Springer, Universitext, 2003.
- [3] K. Behrend, *Introduction to Algebraic Stacks*, Lecture Note Series 411, London Mathematical Society, 2014, doi.org/10.1017/CBO9781107279544.002.
- [4] L. Brambila-Paz, *Espacio móduli y haces vectoriales*, Tópicos de Geometría Algebraica, Aportaciones Matemáticas, núm. 31, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- [5] C. Carathéodory, *Theory of functions of a complex variable*, vol. 2, Chelsea Publishing Company, 1954.
- [6] A. González y J. L. López-López, «Shapes of tetrahedra with prescribed cone angles», *Conformal Geometry Dynamics*, núm. 15, 2011, 50–63, .
- [7] G. Jones y D. Singerman, *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.