Miscelánea Matemática **75** (2022) 5-22 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7502

Una mirada a los números cuadrados triangulares

Netzahualcóyotl C. Castañeda Roldán
numeronatural@hotmail.com
y
Cuauhtémoc H. Castañeda Roldán
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
ccroldan@mixteco.utm.mx

1. Introducción

En el año de 1784, en la ciudad alemana de Brunswick, un maestro de escuela les puso como ejercicio a sus alumnos, calcular la suma de los números naturales del 1 al 100. En esa época no existían las calculadoras electrónicas y tampoco se usaban los cuadernos escolares como los conocemos ahora. Los estudiantes hacían las operaciones aritméticas manualmente, escribiendo con gis en pequeñas pizarras portátiles. Cada alumno, al terminar el ejercicio, debía de colocar su pizarra boca abajo sobre el escritorio del maestro, arriba de las pizarras de sus compañeros que hubiesen terminado antes. Apenas acababa de poner el ejercicio el maestro cuando, en menos de un minuto, Carlos Federico Gauss, un escolar de siete años de edad, se levantó de su asiento, se dirigió al escritorio del maestro, colocó ahí su pizarra con su respuesta boca abajo y regresó a su lugar. El maestro lo miró sin decir nada y esperó a que los demás alumnos terminaran el ejercicio. La gran mayoría de ellos tardaron prácticamente todo el tiempo de la clase calculando sus respectivas respuestas. Al final de la hora el maestro empezó a revisar los resultados y, para su sorpresa, vio que Gauss había escrito en su pizarra el número 5050, la respuesta correcta. En vez de pasar el tiempo sumando los cien números uno por uno, Gauss, a su corta edad, se dio cuenta de que podía obtener el resultado multiplicando el número de

Palabras clave: Número triangular; triangular doble; cuadrado triangular; recurrencia; hipérbola; vector de índices; vector de bases; bases triangulares; crecimiento asintótico; transformación afín.

sumandos por su promedio, que, en el caso de una progresión aritmética, coincide con el promedio del primer término y el último. Esto se ilustra mejor escribiendo dos veces la misma suma, con los términos en orden ascendente en el primer renglón y en orden descendente en el segundo

$$\begin{array}{rccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100, \\ S = & 100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

Ahora, en un tercer renglón se hace la suma de los dos primeros, término a término. La suma del tercer renglón es el doble de la suma original pero los sumandos son constantes

$$\begin{array}{rccccccccc} 2S = & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101. \end{array}$$

En esta forma se obtiene el valor de $2S$ mediante la multiplicación $(101)(100) = 10100$ y por lo tanto $S = 5050$. En su vida adulta, Gauss se convirtió en uno de los matemáticos más sobresalientes de la historia, tanto que se le conoce con el sobrenombre de «el príncipe de las matemáticas». Entre muchos otros resultados, demostró el Teorema Fundamental del Álgebra. Cuando Helen Worthington Gauss, una de sus bisnietas, tradujo el libro [3] del alemán al inglés en 1949, Einstein le escribió una nota resaltando la importancia que tienen, para el desarrollo de la teoría de la relatividad, los trabajos realizados por Gauss en el campo del electromagnetismo.

Los números como el 5050, que resultan de sumar los primeros números naturales, desde el 1 hasta algún número dado, se llaman **números triangulares**. La sucesión de los números triangulares [2] empieza así, 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, etcétera. En otras palabras, un entero positivo t es un número triangular si existe un entero positivo b tal que t es igual a la suma de los primeros b enteros positivos. Se utiliza la notación $T(b)$ para representar a dicho número triangular

$$T(b) = \sum_{i=1}^{b} i = 1 + 2 + \cdots + (b-1) + b = \frac{b(b+1)}{2}.$$

Dado un número triangular $t = \frac{b(b+1)}{2}$, al número b lo llamamos **la base triangular** de t. Por ejemplo, $T(4) = 10$ y la base triangular de 10 es 4. La sucesión de números triangulares se puede definir en forma recurrente como $T(1) = 1$ y $T(n) = T(n-1)+n$, para $n > 1$. La fórmula para calcular el número triangular correspondiente a una suma tiene cierta semejanza con la fórmula para el cuadrado de la suma. Dados dos enteros positivos a y b, se tiene

$$T(a+b) = T(a) + ab + T(b). \tag{1}$$

En consecuencia, si n es un entero positivo, entonces $T(2n) = 2T(n) + n^2$. La diferencia de dos números triangulares se puede calcular mediante una fórmula algo parecida a la de la diferencia de dos cuadrados

$$T(a) - T(b) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b+1).$$

Otra propiedad interesante de los números triangulares es que la suma de dos de ellos consecutivos resulta ser un cuadrado perfecto. Por ejemplo, $T(3) + T(4) = 16$, como lo muestra la figura 1.

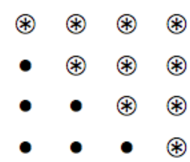

Figura 1. $T(3) + T(4) = 4^2$.

En el caso general se tiene

$$T(n)+T(n+1) = \frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2.$$

Esta propiedad ya la conocían los antiguos griegos. A los matemáticos griegos del periodo clásico, como Pitágoras y Diofanto, les interesaba mucho la geometría y le daban una importancia especial a los números que se pueden utilizar para representar figuras geométricas mediante arreglos regulares de puntos, como el de la figura 1. Desde aquella época se inició el estudio de los números poligonales [1], tales como los números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales (figura 2), etcétera.

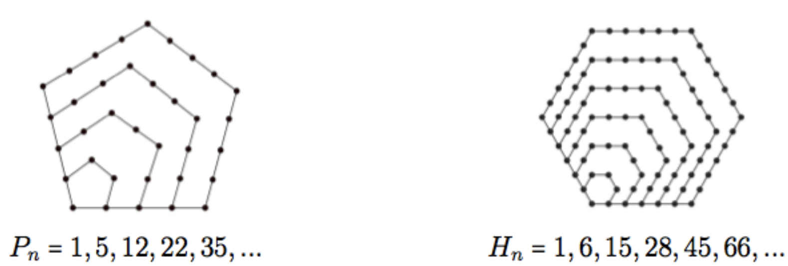

Figura 2. Los primeros números pentagonales (P_n) y hexagonales (H_n).

Calculando los primeros ocho números triangulares, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 y 36, se observa que los números 1 y 36, además de ser triangulares, también son cuadrados perfectos. Esta observación motiva la siguiente pregunta. ¿Existe un número infinito de números que sean triangulares y cuadrados a la vez, o solamente hay un número finito de ellos?

2. Motivación geométrica y recurrencias básicas

En esta sección vamos a motivar geométricamente y a enunciar algunas relaciones de recurrencia entre números triangulares que son cuadrados perfectos y números triangulares que son el doble de otro número triangular.

Definición 2.1. Un **cuadrado triangular** es un número triangular que también es un cuadrado perfecto.

Si un cuadrado triangular es mayor que 1, es claro que su base triangular debe ser mayor que su raíz cuadrada pero ¿qué tanto? Es sencillo verificar algebraicamente que, si $n > 1$, entonces se cumplen las desigualdades $T(n) < n^2 < T(2n-1)$. Esto se puede ilustrar geométricamente como se muestra en la figura 3.

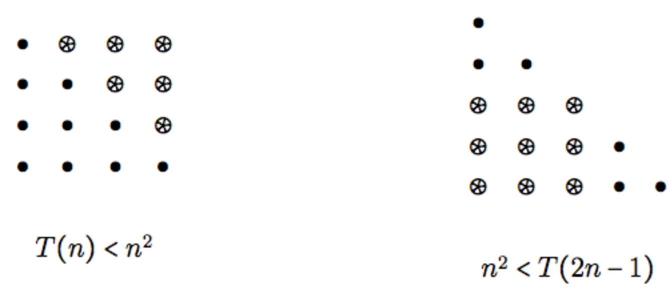

Figura 3. Cotas triangulares para n^2 cuando $n > 1$.

Lo anterior implica que, si $n > 1$ y $n^2 = T(b)$, entonces $n < b < 2n - 1$. Resolviendo la ecuación cuadrática $2n^2 = b^2 + b$ para b, en términos de n, se tiene que

$$b = \frac{-1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2}. \tag{2}$$

Es decir que, si n^2 es triangular, el número $8n^2 + 1$ debe de ser un cuadrado perfecto. En el caso de $n = 6$, por ejemplo, se tiene que $8 \cdot 6^2 + 1 = 289 = 17^2$. En la figura 4 se representa al número 36 mediante dos arreglos de puntos, tanto un cuadrado de lado 6 así como una forma triángular de base 8, superpuestos uno al otro. Los puntos simples indican la intersección del triángulo con el cuadrado. Los puntos marcados con $\circledast$ forman la esquina superior derecha del cuadrado, mientras que los puntos marcados con $\odot$ indican los ángulos agudos del triángulo de base 8.

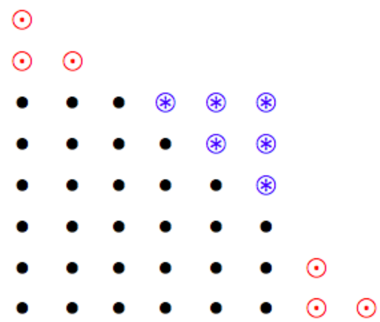

Figura 4. $T(3) = 2T(2)$.

Se observa que la esquina superior derecha del cuadrado, que no forma parte del triángulo grande, es ella misma un triángulo formado por seis puntos. Por otra parte, las dos esquinas agudas del triángulo grande, son cada una de ellas un triángulo con tres puntos. Como $6^2 = T(8)$, el número de puntos que forman parte del cuadrado pero no del triángulo grande, debe ser igual al número de puntos que pertenecen al triángulo grande pero no al cuadrado. En este caso particular se tiene que $T(3) = 2T(2)$. Sin embargo, la gráfica sugiere que, en el caso general, la existencia de un cuadrado triangular implica la existencia de un número triangular que es igual al doble de otro número triangular. La misma figura también sugiere que la suma de las bases de estos dos números triangulares debe ser una unidad menor que el lado del cuadrado. Además se observa que la base del número triangular menor debe ser la diferencia entre la base del triángulo grande y el lado del cuadrado. Se tiene el resultado siguiente.

Proposición 2.2. *Si* $n^2 = T(b)$, *entonces* $T(2n - b - 1) = 2T(b - n)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} T(2n-b-1) &= \frac{(2n-b-1)(2n-b)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(4n^2 - 4nb + b^2 + b - 2n\right) \\ &= 2n^2 - 2nb + n^2 - n \\ &= b^2 + b - 2nb - n + n^2 \\ &= (b-n)^2 + b - n = 2T(b-n). \end{aligned}$$ □

Definición 2.3. Un número triangular se llama **triangular doble** si es el doble de otro número triangular.

En la figura 4, donde aparece el número triangular doble $T(3) = 2T(2)$, se observó que la suma de las respectivas bases triangulares, 2 y

3, es una unidad menor que el lado del cuadrado. Desde la perspectiva de los números triangulares, dicha observación sugiere que a partir de un número triangular doble se puede encontrar un cuadrado triangular. Esto se comprueba a continuación.

Proposición 2.4. *Si* $T(d) = 2T(m)$*, entonces* $(d+m+1)^2 = T(d+2m+1)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(d+m+1)^2 &= \frac{1}{2}\left(2d^2+2m^2+2+4dm+4d+4m\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(d^2+4dm+d^2+d+2m^2+3d+4m+2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(d^2+4dm+2m^2+2m+2m^2+3d+4m+2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(d^2+4dm+4m^2+3d+6m+2\right)\\ &= \frac{1}{2}(d+2m+1)(d+2m+2) = T(d+2m+1). \qquad \square\end{aligned}$$

Si t es un número triangular doble de base d, tal que $t = T(d) = 2T(m)$, entonces, resolviendo la ecuación cuadrática $d^2+d = 2m^2+2m$ para m, en términos de d, se obtiene

$$m = \frac{-1+\sqrt{2(d^2+d)+1}}{2}. \tag{3}$$

Es decir que, si d es la base de un número triangular doble, entonces el número $2(d^2+d)+1$ es un cuadrado perfecto.

El resultado siguiente está motivado por la figura 5, que aparece más abajo.

Proposición 2.5. *Si* $n^2 = T(b)$*, entonces* $T(b+n)+T(b-n) = 3n^2$.

Demostración.

$$\begin{aligned}T(b+n)+T(b-n) &= \frac{1}{2}\left[(b+n)(b+n+1)+(b-n)(b-n+1)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(b^2+2bn+n^2+b+n+b^2-2bn+n^2+b-n\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2b^2+2n^2+2b\right) = b^2+b+n^2 = 3n^2. \qquad \square\end{aligned}$$

En la figura 5 se representa a 105, el número triangular de base $14 = 6+8$. Los puntos simples forman un cuadrado de lado 6 en la esquina inferior izquierda del triángulo grande. Los puntos marcados con $\otimes$ forman la mayor parte de un triángulo de base 8 colocado arriba del cuadrado. Los puntos marcados con $\oplus$ forman la mayor parte de otro triángulo de base 8, situado a la derecha del cuadrado. Las tres

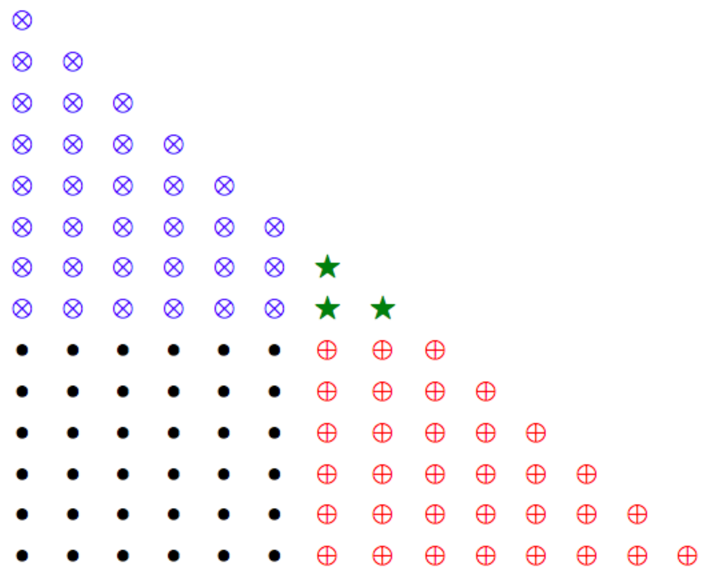

Figura 5. $T(14) + T(2) = 3 \cdot 6^2$.

estrellas representan la intersección de los dos triángulos de base 8. En este caso particular se tiene que $6^2 + 2T(8) = T(14) + T(2)$, ya que la intersección de los triángulos de base 8 forma un triángulo de base 2. Como $6^2 = T(8)$, la igualdad anterior se puede expresar como $T(8+6) + T(8-6) = 3 \cdot 6^2$. En la proposición 2.5 se ha mostrado la validez de dicha igualdad para el caso general.

Se ha visto que a partir de un cuadrado triangular se puede encontrar un número triangular doble (proposición 2.2). Asimismo, a partir de un número triangular doble se puede encontrar un cuadrado triangular (proposición 2.4). Calculando los números triangulares $T(b)$ y el doble de estos valores, $2T(b)$, hasta $b = 20$, se encuentra que 210 es un número triangular doble, ya que $T(20) = 210 = 2(105) = 2T(14)$. Aplicando la proposición 2.4 con $d = 20$ y $m = 14$ se obtiene otro cuadrado triangular, $35^2 = T(49)$. Nótese que 14, la base triangular de 105, que es la mitad de $T(20)$, es la suma de 6 y 8, que son la raíz cuadrada y la base triangular de 36, un cuadrado triangular menor que $35^2 = 1225$.

La figura 6 sugiere que esto no es una coincidencia. Dentro de un triángulo de base 20 se muestra un cuadrado de lado 6, colocado en la esquina inferior izquierda y formado por los puntos simples. También hay un triángulo de base 8, formado por los puntos indicados con $\circledast$ y que tiene su hipotenusa colocada sobre la parte media de la hipotenusa del triángulo mayor. El cuadrado y el triángulo de base 8 son ajenos, aunque la esquina superior derecha del cuadrado es contigua (diagonalmente) a la esquina inferior izquierda del triángulo. El triángulo de base

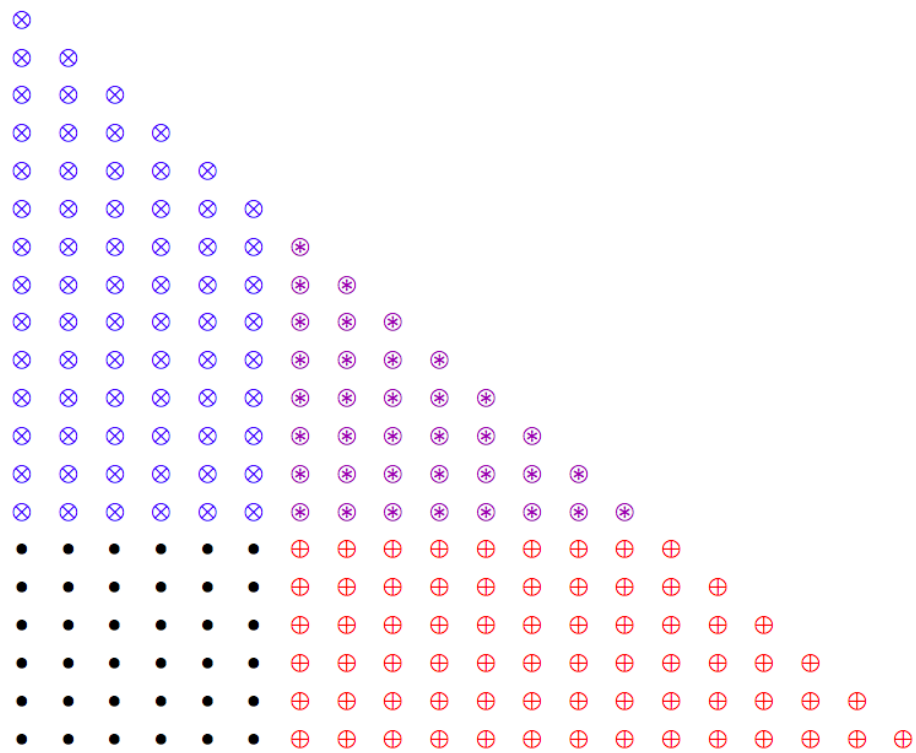

Figura 6. $6^2 + 2T(14) = T(20) + T(8)$.

8 también es la intersección de dos triángulos de base 14. Uno de ellos consiste de todos los puntos ubicados por arriba del cuadrado y su parte izquierda está indicada por los símbolos $\otimes$. El otro triángulo de base 14 consiste de aquellos puntos ubicados a la derecha del cuadrado y su parte inferior está marcada por los símbolos $\oplus$. Una primera observación acerca de esta figura es que el triángulo mayor se puede descomponer como la unión ajena de un cuadrado, dos rectángulos congruentes y tres triángulos. Es decir, dados dos enteros positivos a y b, se tiene

$$T(2a + b) = a^2 + 2ab + 2T(a) + T(b).$$

La igualdad anterior es una consecuencia directa de la ecuación (1) y siempre es válida, aún en el caso de que a^2 no sea triangular o que $T(2a+b)$ no sea un número triangular doble. Otra observación posible, tomando en cuenta que el triángulo de base 8 es la intersección de los dos triángulos de base 14, es que $6^2 + 2T(14) = T(20) + T(8)$. Esta segunda observación sugiere otra forma de encontrar un número triangular doble a partir de un cuadrado triangular.

Proposición 2.6. *Si $n^2 = T(b)$, entonces $T(2n + b) = 2T(n + b)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} T(2n+b) &= T(2n) + 2nb + T(b) \\ &= 2T(n) + n^2 + 2nb + T(b) \\ &= 2T(n) + 2nb + 2T(b) = 2T(n+b). \qquad \square \end{aligned}$$

Ahora se puede obtener una recurrencia que permite calcular un cuadrado triangular a partir de otro menor.

Proposición 2.7. *Si* $n^2 = T(b)$, *entonces* $(3n+2b+1)^2 = T(4n+3b+1)$.

Demostración. Supóngase $n^2 = T(b)$. Por la proposición 2.6 se tiene $T(2n+b) = 2T(n+b)$. Aplicando la proposición 2.4 con $d = 2n+b$ y $m = n+b$, resulta

$$(2n+b+n+b+1)^2 = T(2n+b+2n+2b+1). \qquad \square$$

También se tiene esta otra recurrencia, que permite obtener un número triangular doble mayor que otro conocido.

Proposición 2.8. *Si* $T(d) = 2T(m)$, *entonces* $T(3d+4m+3) = 2T(2d+3m+2)$.

Demostración. Suponiendo que $T(d) = 2T(m)$, por la proposición 2.4 se tiene la igualdad $(d+m+1)^2 = T(d+2m+1)$. Ahora, aplicando la proposición 2.6 con $n = d+m+1$ y con $b = d+2m+1$, resulta

$$T(2d+2m+2+d+2m+1) = 2T(d+m+1+d+2m+1). \qquad \square$$

Por ejemplo, a partir de $T(3) = 2T(2)$ se obtiene $T(20) = 2T(14)$ y de ahí se sigue que $T(119) = 2T(84)$. En cuanto a los cuadrados triangulares, de $6^2 = T(8)$ se sigue que $35^2 = T(49)$ y de ahí se obtiene $204^2 = T(288)$. Las recurrencias anteriores están dadas en términos de dos variables pero, combinando la ecuación (2) con la proposición 2.7, se obtiene una recurrencia para cuadrados triangulares en términos de una sola variable.

Proposición 2.9. *Si c es un cuadrado triangular tal que* $c = n^2 = T(b)$, *entonces el número* $17c + 1 + 6\sqrt{c}\,\sqrt{8c+1}$ *también es un cuadrado triangular.*

Demostración. Por la proposición 2.7, se sabe que $(3n+2b+1)^2$ es un cuadrado triangular. Como $n^2 = c$, de la ecuación (2) se obtiene

$$b^2 = \frac{1}{4}\left(8c + 2 - 2\sqrt{8c+1}\right) \quad \text{y} \quad nb = \frac{\sqrt{c}}{2}\left(-1 + \sqrt{8c+1}\right), \quad \text{así que}$$

$$(3n+2b+1)^2 = 9n^2 + 4b^2 + 1 + 12nb + 6n + 4b$$

$$= 9c + 8c + 2 - 2\sqrt{8c+1} + 1 + 6\sqrt{c}\left(-1 + \sqrt{8c+1}\right) \\ + 6\sqrt{c} + 2\left(-1 + \sqrt{8c+1}\right). \quad \square$$

También se tiene una recurrencia de una sola variable para un número triangular doble.

Proposición 2.10. *Si t es un número triangular doble, entonces $17t + 3 + 3\sqrt{8t+1}\sqrt{4t+1}$ también es un número triangular doble.*

Demostración. Supongamos que $t = T(d) = 2T(m)$. Por la proposición 2.8, sabemos que $3d + 4m + 3$ es base de un número triangular doble. Como $2t = d^2 + d$, de la ecuación (3) se deduce que $4m + 2 = 2\sqrt{4t+1}$. Además, $8t + 1 = 4d^2 + 4d + 1$, por lo que $2d + 1 = \sqrt{8t+1}$.

$$T(3d + 4m + 3) = T(3d + 2\sqrt{4t+1} + 1)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3d + 2\sqrt{4t+1} + 1\right)\left(3d + 2\sqrt{4t+1} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(9d^2 + 12d\sqrt{4t+1} + 4(4t+1) + 9d + 6\sqrt{4t+1} + 2\right)$$
$$= 9t + 3(2d+1)\sqrt{4t+1} + 8t + 3 = 17t + 3 + 3\sqrt{8t+1}\sqrt{4t+1}. \quad \square$$

En vista de las recurrencias dadas en las últimas proposiciones, es claro que tanto los cuadrados triangulares como los números triangulares dobles forman sucesiones infinitas. Esto responde afirmativamente a la pregunta planteada al final de la introducción. A su vez, sugiere otra pregunta. ¿Las recurrencias de las proposiciones 2.7 y 2.8 cubren a todos los cuadrados triangulares y a todos los números triangulares dobles? O bien, por ejemplo, ¿sería posible la existencia de algún cuadrado triangular que no esté generado por la recurrencia de la proposición 2.7?

3. Las recurrencias en términos vectoriales

Los cuadrados triangulares, así como los números triangulares dobles, son enteros positivos. Sin embargo, a partir de la igualdad $n^2 = T(b)$, que caracteriza a un cuadrado triangular en general, se pueden introducir $x = n$, $y = b$ como variables reales y se obtiene la ecuación de segundo grado $2x^2 = y^2 + y$, que representa a una hipérbola h en el plano XY. La hipérbola h se muestra en la figura 7 y pasa por el punto $(1, 1)$. Tiene un eje transverso vertical, su centro es el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y sus vértices están ubicados en $(0, 0)$ y $(0, -1)$. Las asíntotas de h son las rectas

$$y + \frac{1}{2} = \sqrt{2} \cdot x \quad \text{y} \quad y + \frac{1}{2} = -\sqrt{2} \cdot x.$$

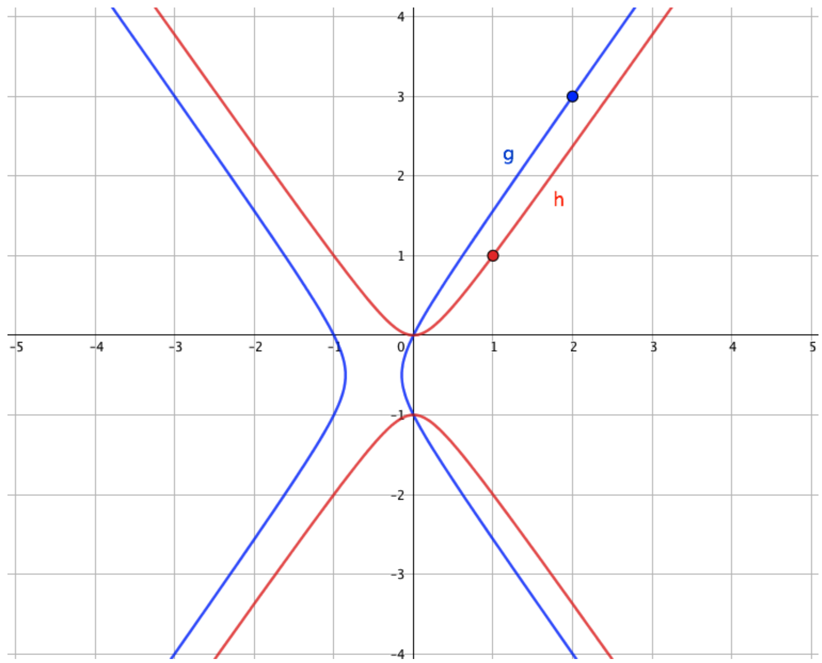

Figura 7. Hipérbolas asociadas a los cuadrados triangulares y triangulares dobles.

Similarmente, la igualdad $T(d) = 2T(m)$, que caracteriza a los números triangulares dobles, se transforma, haciendo $x = m$, $y = d$, en la ecuación cuadrática $2x^2 + 2x = y^2 + y$, que representa a otra hipérbola, g, que pasa por el punto $(2, 3)$. La hipérbola g tiene su centro en el punto $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, su eje transverso es horizontal y sus vértices son los puntos $\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$ y $\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$. Las asíntotas de g son las rectas

$$y + \frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad y + \frac{1}{2} = -\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Nótese que las asíntotas de h son paralelas a pares con las asíntotas de g. Dado cualquier cuadrado triangular $n^2 = T(b)$, el punto de coordenadas enteras (n, b) pertenece a la semirrama de h que va dentro del primer cuadrante.

Asimismo, dado un número triangular doble $t = T(d) = 2T(m)$, el punto de coordenadas enteras (m, d) está sobre la semirrama de g que queda dentro del primer cuadrante. Estas dos semirramas, una de h y otra de g, ignorando su punto de intersección en el origen, se ven a la distancia como si fueran «paralelas» ya que las asíntotas a las que se acercan tienen ambas una pendiente igual a $\sqrt{2}$.

La recurrencia de la proposición 2.7 está expresada en términos de la raíz cuadrada y de la base triangular de un cuadrado triangular, mientras que la de la proposición 2.8 se expresa en términos de dos bases triangulares. Dado que ambas recurrencias se refieren cada una a dos variables, tiene sentido escribirlas en una forma más concisa, utilizando para ello vectores y matrices. Si c es un cuadrado triangular que cumple $c = n^2 = T(b)$, entonces llamamos a $\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix}$ el **vector de índices** de c. Por ejemplo, el vectores de índices de 1 es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y el correspondiente a 36 es $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$. Si t es un número triangular doble, con $t = T(d) = 2T(m)$, decimos que $\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}$ es el **vector de bases** de t. Por ejemplo, el vector de bases de 6 es $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, mientras que el de 210 es $\begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix}$.

La proposición 2.7 da pie a definir la siguiente transformación afín $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Al aplicarle la transformación F al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtenemos $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, que es el vector de índices de 36. Si repetimos la operación, ahora con este vector, obtenemos $\begin{bmatrix} 35 \\ 49 \end{bmatrix}$, el vector de índices de 1225. De este modo, la aplicación de la transformación F reproduce la recurrencia dada en la proposición 2.7, pasando de un cuadrado triangular a otro más grande. De hecho, dado cualquier punto v de la hipérbola h, su imagen bajo la transformación F también pertenece a h. Esto significa que $F(h) \subseteq h$. Ahora, sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y definamos recursivamente una sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de vectores de índices, donde, dado $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \begin{bmatrix} n_k \\ b_k \end{bmatrix}$.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_{k+1} = F(v_k) = Av_k + v_1 \ \ \text{para} \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Se tiene

$$v_2 = F(v_1) = Av_1 + v_1 = A^1 v_1 + A^0 v_1 = \left(\sum_{i=0}^{1} A^i \right) v_1,$$

y en general, para k natural,

$$v_k = \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i \right) v_1. \tag{5}$$

La última igualdad muestra que la aplicación sucesiva de la transformación F, empezando a partir del vector v_1, se puede expresar mediante sumas de potencias de la matriz A. En esta forma se genera una sucesión infinita de vectores de índices de cuadrados triangulares. La pregunta ahora es: ¿son estos todos los que existen?, ¿agotan a todos los cuadrados triangulares? La respuesta es afirmativa. Para establecer esto es suficiente probar que F^{-1}, la aplicación inversa de F, también transforma vectores $w \in h$, en vectores del mismo tipo, es decir que $F^{-1}(h) \subseteq h$, si bien los componentes de $F^{-1}(w)$ son estrictamente menores que los de w cuando w es un vector de índices de algún cuadrado triangular mayor que 1.

Proposición 3.1. *Todo cuadrado triangular tiene a su vector de índices en la sucesión (5).*

Demostración. Dado cualquier vector $w = \begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$F^{-1}(w) = A^{-1}(w - v_1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ b-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n-2b-1 \\ -4n+3b+1 \end{bmatrix}.$$

Si $w \in h$, esto es, si $2n^2 = b^2 + b$, entonces su imagen bajo F^{-1} es también un vector de este mismo tipo. En efecto,

$$\begin{aligned} 2(3n-2b-1)^2 &= 2(9n^2 + 4b^2 + 1 - 12nb - 6n + 4b) \\ &= 16n^2 + 2n^2 + 8b^2 - 24nb - 12n + 8b + 2 \\ &= 16n^2 + b^2 + b + 8b^2 - 24nb - 12n + 8b + 2 \\ &= 16n^2 - 24nb + 9b^2 + 3(-4n+3b) + 2 \\ &= (-4n+3b+1)(-4n+3b+2). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando el método de contradicción, no es difícil comprobar que, bajo el supuesto de que w es un vector de índices distinto de v_1, se tiene que $0 < 3n-2b-1 < n$, y también $0 < -4n+3b+1 < b$. De esta forma observamos que la aplicación reiterada de F^{-1} nos conduce necesariamente a v_1, y queda claro entonces que el vector de índices w es uno de los términos de la sucesión definida por la ecuación (5). □

Ahora veremos que la misma matriz A que aparece en la ecuación (4) sirve para expresar la recurrencia de la proposición 2.8, que genera números triangulares dobles a partir de otros menores. Esto se logra mediante otra transformación afín, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, como sigue

$$G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nótese que, por la proposición 2.8, cuando se aplica la transformación G a puntos de la hipérbola g, se obtienen puntos que también están en g, es decir que $G(g) \subseteq g$. Así, el vector de bases de 6 es $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y al aplicarle G obtenemos $\begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix}$, que es el vector de bases de 210. Si repetimos la operación, ahora con este vector, obtenemos $\begin{bmatrix} 84 \\ 119 \end{bmatrix}$, que es el vector de bases de 7140. Ahora bien, haciendo $\begin{bmatrix} m_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, tenemos que, de igual forma como se estableció para $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la ecuación (5), la sucesión de vectores de bases triangulares $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se genera con la sumatoria de potencias de A, pero partiendo del vector inicial u_1. Esto es, para cada natural $k > 1$,

$$\begin{bmatrix} m_k \\ d_k \end{bmatrix} = u_k = G\left(u_{k-1}\right) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right) u_1. \tag{6}$$

Es posible dar expresiones más simples para u_k y v_k. Tenemos que

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right)(A - I) = \sum_{i=1}^{k} A^i - \sum_{i=0}^{k-1} A^i = A^k - I.$$

De modo que

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^i = \left(A^k - I\right)(A - I)^{-1}.$$

Esto implica

$$u_k = \left(A^k - I\right)(A - I)^{-1} u_1 \quad \text{y} \quad v_k = \left(A^k - I\right)(A - I)^{-1} v_1.$$

Ahora se probará que la sucesión (6), generada a partir del vector u_1 mediante la recurrencia de la proposición 2.8, cubre a los vectores de bases de todos los números triangulares dobles.

Proposición 3.2. *Dado cualquier número triangular doble, su vector de bases es un término perteneciente a la sucesión (6).*

Demostración. Afirmamos que G^{-1}, la transformación inversa de G, mantiene a los puntos de la hipérbola g dentro de ella misma, es decir que $G^{-1}(g) \subseteq g$. En efecto, para todo vector $w = \begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$G^{-1}(w) = A^{-1}(w - u_1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-2 \\ d-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m-2d \\ -4m+3d-1 \end{bmatrix}.$$

Si $w \in g$, entonces $2m^2 + 2m = d^2 + d$ y esto implica que

$$\begin{aligned} 2(3m-2d)^2 + 2(3m-2d) &= 18m^2 - 24md + 8d^2 + 6m - 4d \\ &= 16m^2 + 2m^2 + 2m + 8d^2 - 24md + 4m - 4d \\ &= 16m^2 + d^2 + d + 8d^2 - 24md + 4m - 3d - d \\ &= 16m^2 + 9d^2 + 1 - 24md + 8m - 6d - 4m + 3d - 1 \\ &= (-4m+3d-1)^2 - 4m + 3d - 1. \end{aligned}$$

De este modo vemos que $G^{-1}(w) \in g$ y por lo tanto $G^{-1}(g) \subseteq g$. Ahora, suponiendo que w es el vector de bases de algún número triangular doble y que $w \neq u_1$, se tiene que $m > 2$ y $d > 3$. Usando el método de contradicción se pueden verificar, sin dificultad, las desigualdades siguientes

$$0 < 3m - 2d < m \quad \text{y} \quad 0 < -4m + 3d - 1 < d.$$

Esto significa que las componentes del vector $G^{-1}(w)$ son positivas pero estrictamente menores que las de w. Como no puede haber un descenso infinito en los números naturales, la aplicación iterada de G^{-1} a partir de w, conduce necesariamente al vector u_1. □

Las proposiciones 2.2, 2.4 y 2.6 también especifican relaciones entre las hipérbolas g y h. Definiendo la transformación afín $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

por la proposición 2.2 se tiene que $D(h) \subseteq g$. Similarmente, si se define la transformación afín $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$E\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la proposición 2.4 implica que $E(g) \subseteq h$. Por último, especificando $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como la transformación lineal dada por

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

se observa que, a consecuencia de la proposición 2.6, $L(h) \subseteq g$. Nótese que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

Todas estas transformaciones entre las hipérbolas g y h, así como el hecho de que la misma matriz A juega un papel central en las recurrencias de la proposiciones 2.7 y 2.8, hacen evidente que los números triangulares dobles están estrechamente relacionados con los cuadrados triangulares. En la siguiente sección nos ocuparemos del orden de crecimiento asintótico de estas dos sucesiones.

4. Límites de cocientes de términos sucesivos

Tanto la sucesión de los números cuadrados como la de los números triangulares son de orden cuadrático. Sin embargo, la sucesión de los cuadrados triangulares empieza con los términos 1, 36, 1225, 41616, 1413721, etcétera. Es decir que tan solo su quinto término es ya superior a un millón. Esto sugiere un orden de crecimiento asintótico mucho más rápido que el cuadrático. Para darnos una idea de qué tan rápido crecen los cuadrados triangulares y los números triangulares dobles, en esta breve sección calculamos los límites de cocientes de términos consecutivos en cada sucesión, así como en las de sus índices y bases triangulares.

Considérense las sucesiones $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, en donde $c_1 = n_1 = b_1 = 1$, $m_1 = 2$, $d_1 = 3$, $t_1 = 6$ y para cada número natural k, los vectores $v_k = \begin{bmatrix} n_k \\ b_k \end{bmatrix}$ y $u_k = \begin{bmatrix} m_k \\ d_k \end{bmatrix}$ son el vector de índices de c_k y el vector de bases de t_k, de acuerdo a las ecuaciones (5) y (6), respectivamente. En particular, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos $c_k = n_k^2 = T(b_k)$, así como $t_k = T(d_k) = 2T(m_k)$.

Empezamos calculando el límite del cociente b_k/n_k, cuando k se vuelve arbitrariamente grande. Para esto utilizamos la ecuación (2) y observamos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-1+\sqrt{8n_k^2+1}}{2n_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{8n_k^2+1}{4n_k^2}} = \sqrt{2}.$$

Este resultado es consistente con el hecho de que los puntos (n_k, b_k) están en la semirrama de la hipérbola h que va en el primer cuadrante y que tiene una asíntota con pendiente $\sqrt{2}$. Aplicando ahora la proposición 2.7 se obtienen los dos límites siguientes.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3n_k+2b_k+1}{n_k} = 3 + 2\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{n_k} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4n_k+3b_k+1}{b_k} = 3 + 4\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{b_k} = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Esto indica que la sucesión de raíces cuadradas y la de bases triangulares de los cuadrados triangulares son de orden exponencial y que ambas crecen con la misma rapidez asintótica.

Usando la ecuación (3) se puede calcular el límite de los cocientes m_k/d_k como sigue

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{d_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-1+\sqrt{2\left(d_k^2+d_k\right)+1}}{2d_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2d_k^2+2d_k+1}{4d_k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como es natural, el recíproco de este límite es la pendiente de la asíntota de la semirrama de la hipérbola g en la que se ubican los puntos (m_k, d_k). Los dos límites siguientes se calculan aplicando el resultado anterior en combinación con la proposición 2.8.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4m_k+3d_k+3}{d_k} = 3+4\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{d_k} = 3+\frac{4}{\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3m_k+2d_k+2}{m_k} = 3+2\lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{m_k} = 3+2\sqrt{2}.$$

De esta forma vemos que las dos sucesiones de bases triangulares asociadas con los números triangulares dobles también crecen de manera exponencial y que, de hecho, tienen la misma rapidez asintótica que las sucesiones de raíces cuadradas y de bases triangulares de los cuadrados triangulares. Específicamente,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} = 3+2\sqrt{2}.$$

Los cuadrados triangulares también resultan tener un crecimiento de orden exponencial, como se ve calculando el límite siguiente.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^2 = \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = 17+12\sqrt{2}.$$

Se obtiene el mismo valor para el límite anterior si se evalúa utilizando la proposición 2.9.

Aplicando la proposición 2.10 se puede calcular el límite de cocientes de términos consecutivos para la sucesión de los números triangulares dobles

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{17t_k + 3 + 3\sqrt{8t_k+1}\sqrt{4t_k+1}}{t_k} \\
&= 17 + 3 \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{(8t_k+1)(4t_k+1)}{t_k^2}} \\
&= 17 + 3 \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{32t_k^2+12t_k+1}{t_k^2}} \\
&= 17 + 3\sqrt{32} = 17 + 12\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Este último límite coincide con el correspondiente para los cuadrados triangulares, así que ambas sucesiones crecen con la misma rapidez asintótica.

Conclusiones

Los cuadrados triangulares, así como los números triangulares dobles, son conjuntos infinitos y están estrechamente relacionados entre sí. Ambas sucesiones son de orden exponencial y tienen la misma rapidez de crecimiento asintótico. Además, hay varias transformaciones afines en el plano XY que convierten a los vectores de índices de los cuadrados triangulares en vectores de bases de números triangulares dobles, y viceversa. Las expresiones algebraicas involucradas en dichas transformaciones se pueden encontrar examinando diagramas geométricos relativamente pequeños y formados por arreglos regulares de un número finito de puntos en el plano. El estudio de este tema proporciona, de una forma muy accesible, puentes entre diversas áreas de las matemáticas, tales como su historia, la geometría y el álgebra elementales, la geometría analítica, el álgebra lineal y el cálculo.

Bibliografía

[1] J. H. Conway y R. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus, 1995, Corrected edition.

[2] N. J. A. Sloane, «OEIS A000217», Disponible en https://oeis.org/A000217 (2022/06/30).

[3] W. S. von Waltershausen, *Carl Friedrich Gauss: A Memorial*, Classic Reprint, Forgotten Books, 2018.