Miscelánea Matemática **36** (2002) 1–27 SMM

Vida y Obra de Niels Henrik Abel

Shirley Bromberg
Depto. de Matemáticas, UAM-I
stbs@ xanum.uam.mx

Juan José Rivaud*
Depto. de Matemáticas, UAM-I
jrivaud@ mail.cinvestav.mx

Resumen

Este año se cumple el bicentenario del nacimiento de Niels (Nicolás, en nuestro idioma) Henrik Abel. Abel es, sin lugar a dudas, una de las grandes figuras de la matemática del siglo XIX, cuya influencia en el desarrollo posterior de la matemática es innegable. El presente trabajo es una introducción a su vida y obra. A pesar de su muerte prematura, la extensión y profundidad de la obra de Abel hace imposible una discusión completa de su trabajo en un artículo expositorio como el presente. Es por esto que sólo discutimos con detalle uno de sus resultados, el del problema mecánico. Del resto de sus trabajos hacemos una descripción bastante general y, además, incluímos un esbozo de su biografía. El lector interesado puede profundizar en cualquiera de estos aspectos consultando el material que se cita en la bibliografía.

1. Un vistazo a la vida de Abel.

Además de grandes desarrollos matemáticos, el siglo XIX nos legó dos figuras románticas: Abel y Galois, ambos con una pasión por las matemáticas que desafía todos los obstáculos y a quienes, además, el éxito les es arrebatado por una muerte prematura. "Muere joven el elegido de los dioses" dice el epígrafe que da título y con el que empieza la biografía sobre Galois que escribió Leopold Infeld [I].

*En licencia sabática del CINVESTAV.

Abel nació el 5 de agosto de 1802, en Finnöy[1], pequeña ciudad al suroeste de la costa de Noruega, hijo del matrimonio de Sören Georg Abel -pastor protestante en dicha población- con Anne Marie Simonsen. Tuvo cuatro hermanos, uno de ellos mayor que él, y una hermana de la que siempre estuvo particularmente orgulloso. La familia siempre tuvo una situación económica precaria, debido tanto a la profesión del padre como a los problemas por los que en ese momento atravesaba el país, y a pesar de la posición desahogada de la familia materna.

Sus estudios en los primeros años estuvieron a cargo de su padre y de un joven maestro particular. A los trece años, en el otoño de 1815, Niels Henrik continuó sus estudios en la escuela de la Catedral de Christiania (desde 1923 oficialmente Oslo). En ese momento, nada permitía presagiar el futuro de Abel. Pero en el verano de 1818, Bernt Michael Holmboe un joven maestro de matemáticas que iniciaba su carrera académica, empezó a interesar a algunos de sus alumnos en matemáticas retándolos a resolver diversos problemas sobre álgebra y geometría. El joven Abel destaca de manera brillante y, para estimularlo, Holmboe le plantea problemas especiales que Abel resuelve con gran entusiasmo e ingenio. En poco tiempo va más allá de las matemáticas elementales y del conocimiento de su maestro, continuando a partir de entonces trabajando solo. De esta época data su interés por encontrar la solución general de una ecuación de quinto grado, y también su primera solución al problema, solución que Abel muestra a Holmboe quien, a su vez, la muestra a su maestro Hansteen[2]. Ambos la revisan sin encontrar ninguna falla, y sabiendo que nadie en Noruega tenía la capacidad de entenderla, la envían al Profesor Ferdinand Degen en Dinamarca. Antes de recibir la respuesta, Abel descubrió un error en sus cálculos y continuó trabajando en el problema. De todos modos, Degen quedó tan impresionado por la capacidad matemática que mostraba el escrito que casi propuso que fuese publicado a pesar del error. Posteriormente, antes de que Abel obtuviera su resultado definitivo sobre la quíntica, Degen le escribe aconsejándole dedicarse a otras "cuestiones menos estériles" como las integrales elípticas, que a la postre se convertirían en el centro del trabajo de Abel y en la fuente de su fama.

En 1821, a pesar de que la muerte de su padre ocurrida en 1820 agudiza los problemas económicos de la familia, Abel ingresa a la Uni-

[1]aunque algunos autores discrepan sobre el lugar nacimiento.

[2]Hansteen era astrónomo y matemático aplicado, uno de los pocos matemáticos noruegos conocidos en el extranjero. Era alumno de S. Rasmusssen, así como Holmboe, quien a su vez fue asistente del primero y quien, posteriormente, destacaría a nivel regional.

versidad de Christiania, donde vivió, con la ayuda económica de parte del profesorado de la Institución, cuatro años. Su examen de ingreso a la Universidad fue bastante regular en todos los temas, excepto en matemáticas donde obtuvo resultados sobresalientes. Desde su ingreso se dedicó a leer toda la literatura disponible en la biblioteca de la recién fundada Universidad. En poco tiempo se ganó la fama entre sus maestros y compañeros de ser un matemático fuera de serie, lo cual estaba plenamente justificado, pues desde esos años de estudiante produjo excelentes trabajos.

En el verano de 1823, el profesor de matemáticas Sören Rasmussen, da a Abel un apoyo económico para realizar una visita de trabajo a Copenhagen por dos meses. Este viaje le daría la oportunidad de conocer a los mejores matemáticos daneses, en especial a Degen. La visita le resultó estimulante y muy positiva tanto desde el punto de vista matemático como en otros aspectos: conoce a quien sería su futura prometida Christine (Crelly) Kemp y comienza su afición por el teatro, su única distracción.

En ese mismo año publicó su primer trabajo importante sobre integrales definidas, el cual incluye la solución explícita de una ecuación integral (véase sección 2). Años más tarde publicó otra versión sobre este mismo tema. Así mismo, en 1824 demostró finalmente que no existe una fórmula algebraica para calcular las soluciones de la ecuación general de quinto grado (véase sección 5). Estos trabajos hubiesen bastado para darle renombre y asegurarle una cátedra. Pero para ello hacía falta que alguien los leyese y entendiese; desgraciadamente estaban escritos en noruego cuando los matemáticos líderes de Europa se comunicaban en alemán, francés e inglés.

El aprecio que le tenían sus compañeros y maestros hizo que la comunidad académica de la Universidad, encabezada por el Rector Niels Treschow, antiguo profesor de su padre, apoyara decididamente su solicitud de fondos estatales para viajar al extranjero y realizar estudios y establecer contactos en medios matemáticos más fértiles. El gobierno aportó los fondos. Sin embargo, consideró necesario que Abel pasase un par de años más en la Universidad estudiando otros temas y disciplinas, idiomas entre ellos, indispensables según el Consejo, para su formación. Abel utilizó parte del apoyo recibido para imprimir su resultado sobre la quíntica. Este trabajo, que pensó podía ser su carta de presentación en los centros matemáticos europeos, fue escrito en francés, y tratando de que el costo fuese el menor posible, fue publicado en forma condensada en seis páginas. También se lo envió a Gauss quien, sin leerlo, lo consideró como "una más de esas monstruosidades". En descargo de Gauss, debemos decir que había recibido anteriormente el trabajo "Sobre la influencia de la luna en el movimiento de un péndulo", escrito por Abel a insistencia de Hansteen y publicado en la primavera de 1824 en *Magazin for Naturvidenskaberne* de la cual era editor; el trabajo resultó todo un fiasco del que Abel no dejó de arrepentirse nunca.

Cuando estaban por finalizar los dos años de apoyo, en julio de 1825, Abel solicitó al Rey una subvención para ser usada durante un período de dos años en visitas a los principales centros matemáticos europeos. Con el decidido apoyo de la Universidad, la ayuda le fue concedida y en septiembre de ese mismo año inició su viaje, junto con otros cuatro distinguidos estudiantes noruegos, que tenían propósitos semejantes. Tres de sus compañeros de viaje eran minerólogos: Dos de ellos, Boeck y Keilhaus, tuvieron destacadas carreras profesionales. Con el segundo, Baltazar Mathias Keilhaus, sostuvo una amistad estrecha, al grado de, cuando estaba a punto de morir, pedirle que viese por su novia. Keilhaus cumplió tan prolijamente esta encomienda que se casó con ella; el tercer minerólogo decidió ser misionero y viajó por Sudamérica y Estados Unidos, mientras que el cuarto de los compañeros de viaje fue profesor de medicina veterinaria y fundador del Colegio de Veterinaria en Christiania.

La primera escala de su viaje, en el otoño de 1825, fue Dinamarca. Abel tenía el propósito de volver a ver a Degen, pero se encontró con la triste noticia de su muerte. Su siguiente parada fue Berlín, donde tuvo la inmensa suerte de conocer a August Leopold Crelle, ingeniero y científico natural, con amplios intereses, quien estaba trabajando en un proyecto largamente acariciado: iniciar la publicación del *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Esta fue la primera revista matemática alemana dedicada a la investigación y es más conocida como *Journal de Crelle* o *Crelle's Journal.* Su primer número apareció en 1826 y sigue publicándose hasta el día de hoy. En esta revista Abel publicó la mayor parte de sus trabajos tan pronto estos eran terminados. La inmediata y gran aceptación de la revista por parte de la comunidad matemática hizo que los trabajos de Abel se difundieran rápidamente en toda Europa.

Crelle, además de brindarle su amistad e introducir a Abel en los distintos núcleos matemáticos europeos lo apoyó de las más diversas maneras y en gran parte a él se debe que, en abril de 1829, la Universidad de Berlín le ofreciese un puesto de profesor permanente, nueva que un entusiasta Crelle le comunica a Abel el 8 de abril de ese año, sin saber de su muerte dos días antes.

Después de Berlín, Abel había planeado visitar Gotinga y entrevistarse con Gauss. Desafortunada o afortunadamente, recibió la noticia de que éste no se encontraba en la Universidad pues estaba en uno de sus viajes dedicados a la geodesia, lo cual tal vez impidió una entrevista como la que por esos años sostuvo con Janosz Bolyai, sobre todo después del trabajo sobre el péndulo y el antecedente de la quíntica. Posteriormente, Gauss conoció más detalladamente el trabajo de Abel, del cual externó magníficas opiniones (ver la sección 7). Abel, entonces, continuó trayecto con sus compañeros de viaje visitando Dresden, Praga, Viena, Trieste y Venecia, durante la primavera y el verano de 1826. Posteriormente visitó Suiza y llegó a París en agosto de ese año para encontrar que todos los matemáticos estaban de vacaciones. Se dedicó a estudiar, en particular los trabajos de Cauchy sobre variable compleja, y a escribir el trabajo que él consideraba su más importante contribución y que posteriormente sería conocido como *El Tratado de París:* "*Memoria sobre una propiedad general de una clase muy amplia de funciones trascendentes*". El 30 de octubre de 1826 la Academia de Ciencias en París envió este trabajo a Legendre y Cauchy quienes siguiendo una costumbre bastante difundida entre los líderes matemáticos, tanto de Francia como de otras naciones no se molestaron en leerlo. Años más tarde, cuando Jacobi acusó de negligencia a la Academia de Paris por la pérdida del manuscrito, Legendre arguyó en su descargo que el estado de su vista debido a su avanzada edad y lo reducido de la letra, le había imposibilitado su lectura. Pero, motivado por esta situación, Legendre se preocupó porque el trabajo fuese publicado, lo que sucedió más de una década después, en 1841. Mientras estableció correspondencia con Abel y, aunque en algunas de las cartas Legendre preguntaba cuestiones cuya respuesta se hallaba en el Tratado, Abel nunca lo mencionó. Estos rasgos de carácter, afabilidad y timidez, son reconocidos por todos aquellos que lo conocieron, colegas, profesores y compañeros. No queremos concluir este párrafo sin mencionar que las pruebas de galera del Tratado no pudieron ser confrontadas con el original pues este se había vuelto a perder para reaparecer en 1952 en una biblioteca de Florencia. Además de la publicación del trabajo, la Academia otorgó por él a Abel un gran premio post-mortem.

Pese a la desagradable experiencia con el Tratado, la visita a París le fue de gran utilidad, pues conoció y se relacionó con algunos jóvenes matemáticos y tuvo acceso a importantes bibliotecas especializadas, amén de realizar la compra de un buen número de textos matemáticos, que lo llevaron a contraer deudas. Sin duda el viaje resultó un éxito:

conoció a Crelle, su amplio trabajo tuvo reconocimiento unánime y estableció numerosos contactos.

Esta situación contrasta con su regreso a Noruega, donde se encuentra sin trabajo permanente, teniendo que dar clases privadas mal remuneradas. Y para hacer su situación económica más crítica, su familia había adquirido deudas de las que él se hace responsable. Lo anterior aunado a su salud precaria provocan el desarrollo de una tuberculosis fulminante que en pocos meses lo lleva a la tumba, a pesar de los cuidados de la Sra. Hansteen, a quien Abel consideraba como una segunda madre, y de los esfuerzos de sus compañeros de trabajo por aliviar su situación financiera. En esa dirección, vale la pena destacar las gestiones de sus colegas franceses entre los cuales se encontraban Legendre, Poisson y Lacroix, solicitando al Rey de Suecia que Abel fuese designado miembro de la Academia de Estocolmo[3]. También Gauss y Humboldt trataron, por su parte, que el Ministerio de cultura de Prusia le otorgara una cátedra en la Universidad de Berlín, y antes nos referimos al empeño de Crelle en conseguir lo propio. Desafortunadamente, ninguno de estos esfuerzos cristalizó en el momento oportuno.

2. Un problema mecánico.

A continuación describimos una contribución de Abel, pionera en la teoría de las ecuaciones integrales, que sería desarrollada sistemáticamente más de medio siglo después por Volterra, Fredholm y Hilbert. De este trabajo aparecieron dos versiones. La primera, "Solución de algunos problemas mediante integrales definidas" ([A], pp. 11-27), fue escrita en noruego y apareció en "Magazin for Naturvidenskaberne" en 1823. La segunda, "Solución de un problema mecánico" (op. cit., pp. 153-157), escrita en francés y en la cual sólo aborda el problema mecánico, apareció en el Journal de Crelle en 1826. Presentamos ambas puesto que la segunda, extremadamente elegante, sólo se explica por la primera.

Comenzaremos haciendo una lectura un tanto libre de la primera sección de la primera versión del texto original.

Pensemos que en un plano vertical hay un alambre que tiene la forma de la gráfica de una función $y = f(x)$, con x entre 0 y A[4] por el

[3] En esta época, después de la derrota de los ejércitos de Napoleón, Noruega dejó de formar parte de Dinamarca para ser parte de Suecia. Obtuvo su independencia en 1905.

[4] Aunque Abel no lo hace explícito, la función debe satisfacer algunas propiedades

que se desliza sin fricción, bajo la influencia de la gravedad, una cuenta. Desde Galileo[5] sabemos que si soltamos la cuenta con velocidad inicial cero, desde una altura a, llegará a una altura menor y con una velocidad cuya magnitud no depende de la forma del alambre y que está dada por:

$$v(y) = \rho\sqrt{a-y}$$

donde $\rho = \sqrt{2g}$. Si tomamos las unidades adecuadamente podemos suponer que $\rho = 1$. De lo anterior se sigue que el tiempo utilizado para que la cuenta llegue al origen es:

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-y}} \qquad (ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}). \tag{1}$$

El problema que plantea y resuelve Abel es el siguiente: Suponiendo conocida la función $\phi(a)$ para toda a entre 0 y $f(A)$, expresar en términos de ésta a la función $f(x)$ o, lo que es equivalente, la función $s(y)$. Nótese que si $\phi(a)$ es constante entonces el problema planteado es el de la tautócrona, que comentaremos al final de esta sección .

Realmente Abel trata un problema más general pues supone que

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-y)^\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{2}$$

el cual tiene como caso particular al problema original, cuando $\lambda = 1/2$. Abel pide ϕ "no sea infinita cuando $a = 0$ y que $0 < \lambda < 1$ para que la integral esté acotada". A partir de esta expresión, Abel se propone encontrar la expresión de s en términos de y.

Muy "a la Euler", Abel aborda el problema desarrollando s en serie de Taylor, tomando como variable independiente a y (lo cual muestra que ϕ tiene más propiedades que las explícitamente pedidas):

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

El problema se reduce a determinar los coeficientes a_n a partir de la serie de Taylor de ϕ. Derivando la expresión anterior, obtenemos

$$ds = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1} dy,$$

como $f(0) = 0$ y tener derivada no nula en el intervalo $[0, A]$.

[5]Hoy en día justificamos esta afirmación en términos de conservación de la energía.

lo cual implica que

$$\frac{ds}{(a-y)^\lambda} = \frac{\left(\sum_{n=1}^\infty na_n y^{n-1}\right) dy}{(a-y)^\lambda} = \sum_{n=1}^\infty na_n \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda}.$$

Cuando integramos e intercambiamos la integral con la suma, obtenemos

$$\int_0^a \frac{ds}{(a-y)^\lambda} = \int_0^a \sum_{n=1}^\infty na_n \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda} = \sum_{n=1}^\infty na_n \int_0^a \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda}. \qquad (3)$$

Mediante el cambio de variable $y = at$ las integrales que aparecen a la derecha toman la forma:

$$\int_0^a \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda} = a^{n-\lambda} \int_0^1 \frac{t^{n-1}dt}{(1-t)^\lambda}.$$

Esta última integral se puede expresar en términos de la función Γ y

$$\int_0^a \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda} = a^{n-\lambda} \int_0^1 \frac{t^{n-1}dt}{(1-t)^\lambda} = a^{n-\lambda} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(n)}{\Gamma(n-\lambda+1)}. \qquad (4)$$

Abel nos recuerda que "$\Gamma(n)$ es una función determinada por las ecuaciones

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = 1$$

y que las propiedades de esta notable función han sido ampliamente desarrolladas por M. Legendre en su obra *Exercices de calcul intégral* T. I y II", textos en los que Abel estudió y con los cuales se familiarizó desde sus años en la Universidad de Christiania. (Más tarde, Abel retoma el problema a partir de la ecuación (4).)

En consecuencia, cuando remplazamos (4) en (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \sum_{n=1}^\infty na_n \int_0^a \frac{y^{n-1}dy}{(a-y)^\lambda} = \sum_{n=1}^\infty na_n a^{n-\lambda} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(n)}{\Gamma(n-\lambda+1)} \\ &= \Gamma(1-\lambda) a^{-\lambda} \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a^n. \end{aligned}$$

En la expresión anterior aparecen los coeficientes de la expansión de Taylor de $\phi(a)$ o, para ser precisos, la de $\phi(a)a^\lambda$. En efecto, si escribimos

$$a^\lambda \phi(a) = \sum b_n a^n,$$

entonces

$$b_n = \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n$$

de donde

$$a_n = \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(n+1)} b_n.$$

La cual, cuando usamos de nuevo la relación (4), se convierte

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma((n+1-\lambda)-(1-\lambda)+1)} b_n \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 \frac{b_n t^{n-\lambda}}{(1-t)^{1-\lambda}} dt, \end{aligned}$$

de donde, intercambiando la suma con la integral

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n &= \frac{y^\lambda}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1-\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (yt)^{n-\lambda} dt \\ &= \frac{y^\lambda}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 \frac{\phi(yt)}{(1-t)^{1-\lambda}} dt. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \pi/\mathrm{sen}\lambda\pi,$$

Abel obtiene la fórmula:

$$s(y) = \frac{\mathrm{sen}\lambda\pi}{\pi} y^\lambda \int_0^1 \frac{\phi(yt)}{(1-t)^{1-\lambda}} dt$$

la cual resuelve el problema generalizado. Cuando $\lambda = 1/2$,

$$s(y) = \frac{\sqrt{y}}{\pi} \int_0^1 \frac{\phi(yt)}{\sqrt{1-t}}\, dt, \tag{5}$$

da solución del problema original.

Como ya dijimos antes, si $\phi(a) = \alpha_0$ constante, el problema propuesto es el de la tautócrona, planteado y resuelto por Huygens en el siglo XVII. En este caso, de la ecuación (5) obtenemos:

$$s = k\sqrt{y},$$

donde $k = 2\alpha_0/\pi$, condición que caracteriza a la cicloide.

Es interesante notar que al final de esta primera sección, Abel usa derivadas y primitivas de orden no entero, para expresar en forma sugestiva su solución. En efecto, dice: Si escribimos

$$\phi(x) = \sum \alpha_m x^m,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d^k\phi(x)}{dx^k} &= \sum \alpha_m m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} \\ &= \sum \alpha_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)}\, x^{m-k}.\end{aligned}$$

Después de una manipulación del mismo tipo a la que presentamos antes, Abel llega a la fórmula:

$$\frac{d^k\psi(x)}{dx^k} = \frac{1}{x^k\Gamma(-k)}\int_0^1 \frac{\psi(xt)}{(1-t)^{1+k}}\, dt$$

de la cual deduce, cuando $k = -\lambda$,

$$\frac{d^{-\lambda}\psi(x)}{dx^{-\lambda}} = \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 \frac{\psi(xt)}{(1-t)^{1-\lambda}}\, dt$$

donde, recordemos, $0 < \lambda < 1$. Es decir,

$$\begin{aligned}s(y) &= \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi} y^\lambda \int_0^1 \frac{\phi(yt)}{(1-t)^{1-\lambda}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d^{-\lambda}\varphi(y)}{dy^{-\lambda}}\end{aligned}$$

Señalemos también que Abel trata aquí un problema de inversión, tema que está presente de manera implícita o explícita en buena parte de su trabajo.

3. El problema mecánico revisitado

Abel inicia este segundo artículo en la misma forma que el primero, y llega a la misma ecuación (4), la cual reproducimos a continuación, con una pequeñas alteraciones en la notación,

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}}{(a-z)^n}dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)}a^{\alpha-n},$$

de lo cual deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}}{(a-z)^n} dz &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} \\ &= \Gamma(n)\Gamma(1-n)\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha \\ &= \Gamma(n)\Gamma(1-n)\frac{x^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Multiplicando por $\psi(\alpha)$ e integrando con respecto a α, obtiene que

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{(\int \alpha\psi(\alpha)z^{\alpha-1}d\alpha)}{(a-z)^n} dx = \Gamma(n)\Gamma(1-n)\int \psi(\alpha)x^\alpha d\alpha.$$

Cuando define f mediante la fórmula

$$f(x) = \int \psi(\alpha)x^\alpha d\alpha, \tag{6}$$

y deriva, obtiene

$$f'(x) = \int \alpha\psi(\alpha)x^{\alpha-1}d\alpha,$$

y por consiguiente

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x) = \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)dz}{(a-z)^n}$$

De donde

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)dz}{(a-z)^n} \tag{7}$$

Mediante esta identidad, Abel resuelve formalmente la ecuación original. En efecto, multiplicando la ecuación (2) por $1/(x-a)^{1-n}$ e integrando con respecto a a

$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{ds}{(a-z)^n}.$$

Como $ds = s'(z)dz$, la identidad (7) implica

$$s(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)da}{(x-a)^{1-n}},$$

como ya había obtenido anterioremente. Para terminar la demostración faltaría probar que $s(x)$ admite una expresión como la de $f(x)$ en (6), detalle que omite.

Antes de pasar a otro punto, es bueno hacer notar que, independientemente de que el argumento es válido para una clase más amplia de funciones y de lo rigurosa de éste, no se ve cómo a alguien se le puede ocurrir tal prueba, a menos de conocer la primera demostración.

4. Las Series y el rigor.

En la solución de 1823 al problema mecánico, vimos cómo Abel, sin plantearse ninguna pregunta, intercambia integrales y sumas infinitas. Esta despreocupación desaparece años más tarde y el tratamiento riguroso de las series convergentes se vuelve central en sus intereses. Este cambio se manifiesta en la introducción de su primer trabajo sobre series([A] pp.219-250),

"*Estudio de la serie* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$."

donde dice *Si estudiaramos con más detenimiento los razonamientos que se utilizan en el estudio de las series infinitas, veríamos que son poco satisfactorios y, por consiguiente, el número de teoremas sobre series infinitas que pueden ser considerados como rigurosamente demostrados es muy limitado.*

Antes Abel había escrito a Hamsteen: "pienso emplear todas mis fuerzas para llevar luz a la monstruosa oscuridad que reina en el Análisis ... Es verdaderamente sorprendente que la mayoría de estos resultados sean verdaderos". Algunos definitivamente no lo son, como hace notar Abel en una nota a pie de página: "En el "Curso de Análisis" de M. Cauchy encontramos el teorema siguiente *cuando los distintos términos de la serie* $u_0+u_1+u_2+\cdots$ *son funciones de una misma variable* x *y continuas con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular donde la serie es convergente, la suma* s *de la serie es a su vez, en la vecindad de este valor particular, función continua de* x. Pero me parece que este teorema tiene algunas excepciones. Por ejemplo, la serie

$$\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x-\cdots$$

es discontinua para todo valor $(2m+1)\pi$ de x, donde m es un número entero. Hay, como se sabe, muchas series de este tipo."

A pesar de que estos contraejemplos ya eran conocidos, no aparece documentado en la literatura que los contra-ejemplos se hubieran hecho explícitos antes de Abel.

Notemos que Cauchy nunca volvió a editar estas notas y nunca apareció, de su parte, rectificación alguna. Posteriormente, Moigno, uno de sus alumnos fue autorizado a publicar sus notas del curso de Cauchy, donde, por supuesto , el "teorema" ya no aparece.

Abel piensa que la razón por la cual, a pesar de las deficiencias en el razonamiento, "esa deplorable costumbre de sacar conclusiones generales a partir de situaciones particulares", la mayoría de los resultados son verdaderos es porque se trata (en general) de series de potencias. Y a ellas está dedicado este artículo. En él demuestra algunos de los resultados que conocemos sobre series como son el criterio de la razón y los teoremas clásicos de series de potencias: si una serie de potencias converge para δ entonces converge para todo $|a| < \delta$ (Abel no pone los valores absolutos) y la suma es continua en ese intervalo[6]. Para demostrar lo anterior muestra que las colas están uniformemente acotadas. Pero es un poco exagerado concluir, a partir de esto, que Abel prefigura la noción de convergencia uniforme que será dada por Seidel en 1847 (ver [L]).

En este artículo, Abel también aborda la convergencia de otro tipo de series:

$$f(x) = \sum v_n(x)\alpha^n.$$

Muestra que si $v_n(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y la serie converge para $\alpha = \delta$, entonces $f(x)$ converge para $\alpha < \delta$ y es continua en $[a,b]$.

Cabe llamar la atención sobre el cuidado con que Abel se refiere al "teorema" de Cauchy. Parece que, dice, "hay algunas excepciones", cuando un teorema con excepciones, no es un teorema. Este cuidado contrasta con la manera como Abel se refiere al trabajo de M. Olivier, quien afirma que la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si na_n tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Luego de proporcionar el ejemplo:

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots,$$

Abel dice que M. Olivier *se equivocó rotundamente* ([A], p. 399 T.I).

5. Estudio de la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a 5.

En la biografía presentamos parte de la historia de este problema y mencionamos que utilizó parte de los recursos que Abel obtuvo de la

[6]Nótese la cercanía entre este enunciado y el de Cauchy.

Universidad en 1824 para publicar una versión muy escueta en francés. Más tarde, en 1826, Crelle le pidió una nueva versión más generosa con el lector para ser publicada en el *Journal de Crelle*. Este artículo fue conocido por Galois pocos meses después de la muerte de Abel, junto con la historia de su autor. No es de extrañar que Galois viera un vínculo entre él y Abel "... el vínculo es la malvada organización social, que desprecia al pobre y se muestra hostil con el genio". Por cierto, en 1830 Galois publica en el Boletín de Ferussac una nota de dos páginas intitulada "Análisis de un escrito sobre la resolución algebraica de ecuaciones". Ya en 1826, en el mismo Boletín, Ferussac había publicado un análisis del trabajo de Abel. A continuación daremos una descripción de éste.

El artículo se divide en cuatro partes. En la primera, Abel da la forma de las expresiones algebraicas. Cuando sólo usamos operaciones artiméticas (suma, resta, multiplicación, división) obtenemos siempre funciones racionales. Para el siguiente paso incorporamos a las operaciones anteriores la radicación. Una *función algebraica de primer orden y de grado* r es una expresión de la forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \ldots, \sqrt[n_r]{p_r}),$$

donde f, p_1, $p_2, \ldots, p_r$ son funciones racionales y n_1, $n_2, \ldots, n_r$ son números primos. Notemos que la noción de grado no coincide con la del grado de un polinomio, es el número de radicales que aparecen en la expresión. Inductivamente, una función algebraica de orden μ y de grado m es una expresión de la forma

$$f(r_1, r_2, \ldots, \sqrt[p_1]{q_1}, \sqrt[p_2]{q_2}, \ldots, \sqrt[p_r]{q_r}),$$

donde $p_1, p_2, \ldots$ son funciones algebraicas de orden a lo más $\mu - 1$ y $q_1, q_2, \ldots, q_r$ son funciones algebraicas de orden $\mu - 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ siguen siendo números primos. Abel muestra, que después de arreglar los términos con ciudado, una función algebraica v de orden μ y de grado r puede llevarse a la forma

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \tag{8}$$

donde n es un número primo, $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ son funciones algebraicas de orden a lo más μ y de grado a lo más $r - 1$ y p es una función algebraica de orden $\mu - 1$ irreducible en el sentido de que $\sqrt[n]{p}$ no se puede expresar racionalmente en $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$. A modo de ejemplo, veamos lo que sucede con las soluciones de la ecuación de tercer grado

$$x^3 + px + q = 0,$$

las cuales están dadas por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}} + \frac{3}{p\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}}$$

donde

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 .$$

Para dar a esta función algebraica la forma que dice Abel, primero:

$$x = \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{1/3} + \frac{3}{p\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)} \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{2/3}$$

En el denominador aparece una función algebraica de orden 1 y de grado 1. Nos deshacemos de ella de la manera acostumbrada:

$$x = \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{1/3} + \frac{3\left(\frac{q}{2} \mp \sqrt{R}\right)}{p\left(\frac{q}{2} \mp \sqrt{R}\right)\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)} \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{2/3}$$

de donde

$$x = \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{1/3} - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \left(\frac{q}{2} \mp \sqrt{R}\right)\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}\right)^{2/3},$$

la cual tiene la forma requerida. Notemos que la forma que puede darse a una expresión algebraica no es única.

En la segunda parte, Abel da las propiedades que satisface una función algebraica cuando es raíz de un polinomio. Demuestra que a una función algebraica que es raíz de un polinomio puede darsele una forma tal que *cualquiera de las funciones algebraicas que en ella aparecen es función racional de las raíces del polinomio.* Si volvemos al ejemplo de la cúbica, podemos ver que

$$\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Para demostrarlo, Abel toma v una función como en la fórmula (8) que es solución de la ecuación

$$c_0 + c_1 y + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0, \tag{9}$$

al remplazar en esta última v obtenemos una expresión del tipo

$$r_0 + p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0.$$

La irreducibilidad implica que

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-1} = 0,$$

lo cual, a su vez, implica que, al remplazar $p^{\frac{1}{n}}$ en v por $\alpha p^{\frac{1}{n}}$, donde $\alpha^n = 1$, obtenemos raíces de la ecuación (9), es decir

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \\ y_2 & = & q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \\ \cdots & & \\ y_n & = & q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}. \end{array}$$

De donde se puede despejar $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ y $p^{\frac{1}{n}}$ como funciones racionales de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. En efecto, para ver que $p^{\frac{1}{n}}$ es función racional de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, multiplicamos la segunda ecuación por α^{n-1}, la tercera por α^{n-2}, la última por α. Al sumar, obtemenos:

$$y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \cdots + \alpha y_n = n p^{\frac{1}{n}}$$

Procediendo de manera análoga, Abel demuestra que cada una de las expresiones algebraicas que componen a $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ y $p^{\frac{1}{n}}$ también son funciones racionales de las raíces, y así sucesivamente, como se había afirmado.

En la tercera parte, Abel estudia el número de valores que toma una función racional de n variables, $v(x_1, \ldots, x_n)$. Primero demuestra, siguiendo a Cauchy, que si σ es una permutación de los primeros n naturales y si definimos

$$\sigma \cdot v(x_1, \ldots, x_n) = v(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

entonces el número de valores distintos que toma v, es decir, el cardinal de $\{\sigma \cdot v(x_1, \ldots, x_n) : \sigma \in \mathrm{S}_n\}$, es un divisor de $n!$ y es mayor o igual al mayor primo que divide a n, a menos que sea dos o uno. Luego demuestra que si $m = 5$ y v es una función racional que toma a lo más 5 valores, entonces o bien v es simétrica (toma un único valor); o bien $v = \alpha + \beta\Delta$ donde α y β son funciones simétricas de las variables y Δ es la función racional que toma dos valores dada por

$$\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j);$$

o bien $v(x_1,\ldots,x_n)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_4 x^4$ donde x es cualquiera de las variables y las α_i son funciones simétricas de aquéllas. De esta última expresión es posible despejar x :

$$x=\beta_0+\beta_1 v+\cdots+\beta_4 v^4$$

donde, también, β_i es función simétrica de las variables. Demuestra igualmente que si v es una función racional de n variables que toma exactamente m valores al hacer variar $\sigma\in \mathrm{S}_n$, entonces existe un polinomio de grado m cuyos coeficientes son funciones simétricas de las n variables de la cual todos los valores que toma v son raíces y no hay un polinomio de grado menor con estas características.

Después de estos preliminares, con todos los elementos necesarios, Abel demuestra en la cuarte parte que *el polinomio general de quinto grado no puede resolverse algebraicamente.* Supone lo contrario, es decir, que la solución general es función algebraica de los coeficientes. Entonces, según demostró en la segunda parte, existe una expresión de la raíz

$$x=q_0+q_1 p^{\frac{1}{n}}+q_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+q_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}$$

donde n es primo y p, $q_0,q_1,\ldots,q_n$ son funciones algebraicas de los coeficientes de la ecuación y, a la vez, funciones racionales de $x_1,\ldots,x_5$. Como, claramente, la solución general no puede expresarse mediante funciones racionales de los coeficientes, debe aparecer en la expresión, al menos una función algebraica de primer orden, digamos $\sqrt[m]{R}$, donde R es una función racional de los coeficientes y, por lo tanto, función simétrica de las raíces y m es un número primo. Tenemos que $v=\sqrt[m]{R}$, es función racional de $x_1,\ldots,x_5$ y raíz de $z^m-R=0$. Además no puede ser solución de ningún polinomio de grado menor, entonces v toma exactamente m valores y, como es un número primo que divide a 5!, $m=2,3$ ó 5. Pero Abel ya había demostrado que m no podía ser igual a 3. Veamos que m tampoco es igual a 5. Supongamos que $m=5$, entonces

$$R^{\frac{1}{5}}=r_0+r_1x+\cdots+r_4x^4,$$

con $r_0,r_1,\ldots,r_4$ funciones simétricas, de donde

$$x=s_0+s_1R^{\frac{1}{5}}+\cdots+s_4R^{\frac{4}{5}},$$

y

$$s_1R^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\left(x_1+\alpha^4x_2+\alpha^3x_3+\alpha^2x_4+\alpha x_5\right),$$

donde α es una de las raíces complejas de $x^5-1=0$. Lo cual es imposible puesto que el lado derecho de la igualdad toma 120 valores, pero debe ser solución de la ecuación de quinto grado $x^5-s_1^5R=0$.

Nos resta descartar $m = 2$. Si así fuese, $\sqrt{R} = v$ es función racional de las raíces y raíz del polinomio

$$z^2 - R = 0.$$

Por lo tanto $\sqrt{R}$ toma dos valores, de donde $\sqrt{R} = \alpha + \Delta\beta$ donde α y β son funciones simétricas de $x_1, \dots, x_5$. Como $-\sqrt{R}$ también es raíz, tendremos que $-\sqrt{R} = \alpha - \Delta\beta$, lo cual implica que $\alpha = 0$. Por lo tanto, toda función algebraica de primer orden que aparece en la expresión de la raíz es de la forma $\alpha + \Delta\beta$ con α y β funciones simétricas de las raíces. Como, de nuevo, la raíz de la ecuación general no puede ser de la forma anterior, debe haber, al menos una función algebraica de segundo orden, es decir, en la expresión de la raíz deberá haber una expresión de la forma

$$v =^m\sqrt{\alpha + \Delta\beta},$$

donde m es primo, α y β funciones simétricas no nulas. De nuevo, como v es función racional de las raíces toma dos valores:

$$v_1 =^m\sqrt{\alpha + \Delta\beta}, \quad v_2 =^m\sqrt{\alpha - \Delta\beta},$$

donde v_1 y v_2 son funciones racionales. Al multiplicarlas se obtiene

$$v_1 v_2 =^m\sqrt{\alpha^2 - \Delta^2\beta^2}.$$

Como $\alpha^2 - \Delta^2\beta^2$ es una función simétrica, si $v_1 v_2$ no lo fuese, $m = 2$, lo cual implicaría que $v = \sqrt{\alpha + \Delta\beta}$ y v tomaría 4 valores, lo cual no es posible. Llamemos $\gamma := v_1 v_2$. Abel muestra de manera análoga a lo anteriormente hecho que $m = 5$ y considera

$$p =^5\sqrt{S} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{S}},$$

donde $S = \alpha + \Delta\beta$. Como antes, p toma 5 valores y, por lo tanto

$$p = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

y

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

o bien

$$x = t_0 + t_1 S^{\frac{1}{5}} + t_2 S^{\frac{2}{5}} + t_3 S^{\frac{3}{5}} + t_4 S^{\frac{4}{5}}.$$

Otra vez el mismo razonamiento muestra que $t_1 S^{\frac{1}{5}}$ es raíz de un polinomio de grado 10 y, a la vez, toma 120 valores. Esta imposibilidad descarta $m = 2$ y concluye la demostración.

Después de haber demostrado este resultado, Abel abordó el problema de caracterizar las ecuaciones cuyas soluciones pueden expresarse como funciones algebraicas de sus coeficientes, algunas de ellas, como las ciclotómicas

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

con n primo, ya habían sido tratadas por Gauss. En este caso tenemos que todas las raíces son funciones racionales de una de ellas α. En efecto,

$$\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}.$$

Abel generaliza este resultado de la manera siguiente.

Teorema. Si todas las raíces de una ecuación algebraica pueden expresarse racionalmente a partir de una de ellas, digamos x y si se satisface que, para dos raíces cualesquiera, θx y $\theta_1 x$

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x,$$

entonces la ecuación se puede resolver algebraicamente.

Notemos que es debido a este resultado que los grupos conmutativos se llaman *grupos abelianos.*

6. Integrales Elípticas

Si bien los problemas de derivación y antiderivación de funciones iniciaron su desarrollo de la mano, pronto se hizo claro que el cálculo de primitivas presenta dificultades adicionales pues, aunque toda fórmula de derivación tiene asociada una de integración y viceversa, los esquemas para derivar funciones elementales no son reversibles, por lo que es necesario desarrollar otras técnicas y métodos para el cálculo de primitivas.

Estas dificultades aparecen ya en el caso de las funciones racionales (cocientes de polinomios de una variable). En este caso la derivada es también una función racional, pero no así su primitiva, puesto que las integrales de las funciones racionales

$$\frac{1}{x+a} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{a^2 - x^2}$$

son, como sabemos,

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + c$$

y, usando la identidad,

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a-x}\right),$$

la segunda integral es igual a

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+c.$$

Si aceptamos, como lo hicieron Leibniz y John Bernoulli, el uso de números complejos como un artilugio formal, también obtenemos que

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2a\imath}\ln\frac{a+\imath x}{a-\imath x}+c \qquad \left(=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c\right).$$

es en estos ejemplos donde está el origen del método de integración por medio del desarrollo en fracciones parciales, así como el uso formal de expresiones complejas para resolver problemas de cálculo.

Relacionadas con diversas situaciones de índole físico o geométrico aparecieron integrales de la forma $\int R(x,\sqrt{p(x)})dx$, con R una función racional en las variables x e y donde además $y=\sqrt{p(x)}$ con $p(x)$ polinomio en x. Para $p(x)$ de grado uno o dos, el desarrollo en fracciones parciales, la integración por partes y algunas transformaciones algebraicas permitieron resolver, al menos en teoría, el problema en términos de funciones racionales, logaritmos y funciones trigonométricas inversas.

Sin embargo, para polinomios de tercer y cuarto grado (sin raíces dobles) no fue posible solucionar el problema[7]. Las integrales correspondientes son las llamadas *elípticas*. Se desarrollaron acercamientos para describir el comportamiento de estas integrales sin conocer su forma explícita. Con este propósito se redujeron estas integrales a unos cuantos tipos específicos. El resultado principal en esta dirección se debe a A. M. Legendre en su “Traité des fonctions elliptiques” (2 volúmenes, 1825-26), demuestra que las integrales elípticas de la forma

$$\int\frac{R(x)}{\sqrt{p(x)}}dx=\int\frac{R(x)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4}}dx, \tag{10}$$

[7]En 1833, J. Liouville en su “Mémoire sur les trascendentes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude”, publicado en el Journal de l’École Polytechnique, XIV, Secciones 24 y 25, demostró que, efectivamente, dichas integrales no eran funciones elementales.

con $R(x)$ función racional y $p(x)$ un polinomio de grado 3 ó 4, puede reducirse a integrales de los siguientes tipos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{Primera Clase}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{Segunda Clase}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{Tercera Clase,}$$

las cuales pueden llevarse, mediante la sustitución $x = \text{sen}\phi$, a las formas de Jacobi:

$$\int\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}}, \int\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}d\phi \quad \text{y} \quad \int\frac{d\phi}{(1+n\text{sen}^2\phi)\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}}$$

(con $0 < k < 1$ y n constante arbitraria).

Notemos además que Weierstrass y otros matemáticos propusieron otras formas normales más adecuadas a sus propósitos. Estas clases están directamente relacionadas con problemas geométricos o físicos relevantes, como son, entre otros, la longitud de un arco de lemniscata o de una elipse[8] o el período de un péndulo simple.

En el trayecto para conseguir sus clases, Legendre prueba que las integrales del tipo (10) puden reducirse a la forma

$$\int \frac{\tilde{R}(y^2)}{\sqrt{a+by^2+cy^4}}dx$$

donde, de nuevo, $\tilde{R}$ es una función racional, resultado de por sí interesante.

Otra vertiente de los trabajos sobre integrales elípticas se inicia con los trabajos de G. C. Fagnano (1682-1766) quien, en 1714, empieza a tratar problemas geométricos sobre parábolas de orden superior, elipses o lemniscatas, cuyas longitudes de arco vienes dadas por integrales elípticas, pero que, como él demuestra, bajo ciertas condiciones, las diferencias de longitudes de tales arcos pueden expresarse algebraicamente (ver [Kl], pp. 413-420).

Estos problemas interesan a L. Euler, quien los generaliza y sintetiza en su llamado "Teorema de adición" para integrales elípticas (L. Euler

[8]Precisamente de este problema toman su nombre esta familia de integrales.

"Cálculo Integral, Vol. 1, 1786). A continuación enunciamos una versión del resultado que es más conveniente para nuestra exposición posterior.

Empecemos por considerar el polinomio $1 + mz^2 + nz^4$ el cual suponemos sin raíces dobles (es decir, $m^2 - 4n \neq 0$). Definamos

$$t(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$$

y denotemos por $s(t) = x$ a la función inversa de $t(x)$. Entonces el Teorema de Adición de Euler establece que:

$$s(\alpha + \beta) = \frac{s(\alpha)\sqrt{1 + ms^2(\beta) + ns^4(\beta)} + s(\beta)\sqrt{1 + ms^2(\alpha) + ns^4(\alpha)}}{1 + ns^2(\alpha)s^2(\beta)}.$$

Nótese que si $m = -1$ y $n = 0$, entonces $s(t) = \text{sen}t$ y, en este caso, el Teorema de Adición de Euler dice que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\sqrt{1 - \text{sen}^2(\beta)} + \text{sen}(\beta)\sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)}$$

o sea

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

y cuando $m = 1$ y $n = 0$, la fórmula corresponde al senh. Por esta razón, las funciones $s(t)$ son llamadas *senos generalizados.* Para una exposición elemental detallada de este resultado y de sus implicaciones, remitimos al lector al trabajo de A. I. Markushévich [M]).

En nuestra definición anterior así como en la parte previa de nuesra exposición sobre este tema no hemos mencionado que la función $t(x)$ es multivariada ni las razones para ello, pero por causas de espacio sólo diremos que este punto está relacionado con la génesis de la idea de superficie de Riemann de $\sqrt{z}$.

7. Funciones Elípticas

El Teorema de Adición es el punto de partida de Abel para sus contribuciones al tema. Abel expresa las integrales de primera clase en términos ligeramente distintos a los que Legendre utiliza: $p(x) = (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)$ En efecto, los plinomios utilizados por Legendre eran de la forma $p(x) = (1 - x^2)(1 - c^2x^2)$, y Abel comenta que las fórmulas serán más sencillas si toma c^2 negativo e igual a $-e^2$ y por razones de simetría toma $1 - c^2x^2$ en lugar de $1 - x^2$. Además, en lugar de estudiar las integrales:

$$\alpha(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}}$$

trabaja con la función inversa, es decir $x = \varphi(\alpha)^9$, e introduce dos funciones auxiliares más:

$$f(\alpha) = \sqrt{1 - c^2\varphi^2(\alpha)} \quad \text{y} \quad F(\alpha) = \sqrt{1 + e^2\varphi^2(\alpha)},$$

para las cuales enuncia los correspondientes teoremas de adición.

Después de probar algunas propiedades de estas tres funciones, las define, partiendo de la integral, para valores imaginarios. Así tenemos que:

$$\int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}} = \int_0^{x} \frac{idt}{\sqrt{(1 + c^2t^2)(1 - e^2t^2)}} =$$
$$= i\int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1 + c^2t^2)(1 - e^2t^2)}}$$

de donde si

$$\alpha = \int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}} \quad \text{y} \quad \alpha^\star = \int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1 + c^2t^2)(1 - e^2t^2)}}$$

tenemos que $\alpha = i\alpha^\star$ (nótese que $\alpha^\star$ es real) y definiendo $x := \varphi^\star(\alpha)$ donde

$$\alpha = \int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1 + c^2t^2)(1 - e^2t^2)}},$$

tenemos que se puede extender formalmente la definición de φ para valores imaginarios como:

$$\varphi(i\alpha) = i\varphi^\star(\alpha).$$

Finalmente, Abel define $\varphi(\alpha + i\beta)$ en concordancia con la fórmula de adición como:

$$\varphi(\alpha + i\beta) =$$
$$= \frac{\varphi(\alpha)\sqrt{(1 - c^2\varphi^2(i\beta))(1 + e^2\varphi^2(i\beta))} + \varphi(i\beta)\sqrt{(1 - c^2\varphi^2(\alpha))(1 + e^2\varphi^2(\alpha))}}{1 - c^2e^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(i\beta)}$$
$$= \frac{\varphi(\alpha)\sqrt{(1 + c^2(\varphi^\star(i\beta))^2)(1 + e^2(\varphi^\star(i\beta))^2)} + i\varphi^\star(i\beta))\sqrt{(1 - c^2\varphi^2(\alpha))(1 + e^2\varphi^2(\alpha))}}{1 + c^2e^2\varphi^2(\alpha)(\varphi^\star(\beta))^2}$$
$$= \frac{\varphi(\alpha)f^\star(\beta)F^\star(\beta) + i\varphi^\star(\beta)(\alpha)f(\alpha)F(\alpha)}{1 + (ce\varphi(\alpha)\varphi^\star(\beta))^2}.$$

[9] La ventaja de este cambio es que, mientras que las integrales son funciones multivaluadas, las inversas son univaluadas.

A partir de esta definición, de algunas propiedades de las funciones φ, f y F, que se demuestran directamente, y usando nuevamente la fórmula de adición, Abel demuestra que las tres funciones son doblemente periódicas, con los mismos períodos:

$$2\omega = 4\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad \text{y} \quad 2\omega' i = 4\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

De aquí deduce en forma elegante y concisa muchos resultados conocidos y nuevos que publica en dos memorias, que había empezado a redactar en París en 1825, *Recherches sur les fonctions ellpitiques* aparecidas en el Journal de Crelle, la primera en 1827 y la segunda en 1828. La doble periodicidad es una propiedad esencial en la teoría, que después será tomada como la definición de una función elíptica.

A continuación utiliza los resultados anteriores para abordar y resolver el siguiente problema: Dada

$$\varphi(n\alpha) = \int_0^{n\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

se quiere determinar

$$x = \varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Para ello, ve que el teorema de adición, para n impar le permite expresar

$$\varphi(n\alpha) = \frac{xP_n(x)}{Q_n(x)},$$

donde P_n y Q_n son polinomios pares de grado n^2-1. Y para n par,

$$\varphi(n\alpha) = x\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

donde P_n y Q_n son también polinomios pares de grados n^2-4 y n^2 respectivamente.

Lo anterior quiere decir que el problema inicial es equivalente a resolver una ecuación polinomial

$$xP_n(x) - \varphi(n\alpha)Q_n(x) = 0$$

si n es impar y

$$x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)P_n^2(x) - \varphi^2(n\alpha)Q_n^2(x) = 0$$

cuando n es par.

Para el caso $\varphi(n\alpha) = 0$, Abel observa que estas ecuaciones satisfacen un criterio de solubilidad por radicales descubierto por él tiempo atrás y, con base en ello, expresa $x = \varphi(\alpha)$ en términos de $\varphi(n\alpha)$ en el caso general. La primera prueba que da es muy complicada pero, posteriormente, usando un resultado de Jacobi, consigue una demostración muy simple y elegante (ver [K], pág. 156).

El problema anterior tiene como caso particular al de dividir en n partes iguales el arco de la lemniscata el cual había sido resuelto por Fagnano para $n = 2, 3$ y 5. El caso general había sido comentado por Gauss en sus "Disquisiciones Aritméticas" donde afirma que las herramientas desarrolladas allí para dividir la circunferencia en n partes iguales pueden ser usadas en otros casos, en particular, en el de la lemniscata. En este caso, Abel prueba que el arco completo de la lemniscata puede ser dividido con regla y compás para los mismo valores de n que la circunferencia, es deicr, para $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_s$ donde $m \geq 0$ y los p_i son primos distintos de la forma $2^{2^{q_i}} + 1$.

De esta manera saltan a la vista las interrelaciones entre sus preocupaciones por las ecuaciones polinomiales y la teoría de las funciones elípticas.

Gauss había trabajado sobre las mismas líneas, centrándose en el problema de la lemniscata, la cual da origen a la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - x^4}}$$

y cuando lee el primero de estos trabajos escribe a Bessel

> *"Parece que por el momento no me será posible volver al estudio de funciones transcendentales, mismo que he estado desarrollando durante muchos años (desde 1798), puesto que tengo que terminar muchas otras cosas. Según puedo ver, el Sr. Abel ahora me ha tomado la delantera y me ha descargado más o menos de la tercera parte de estos asuntos y más aún ha llevado a cabo los cálculos con precisión y elegancia. Ha tomado exactamente el mismo camino que tomé en 1798 y, por lo tanto, no es de extrañar que nuestros resultados coincidan en gran medida. Para mi sorpresa esto se extiende también a la forma y en parte a la notación que él emplea, de tal suerte que muchas de sus fórmulas parecen*

copia exacta de las mías. Para evitar cualquier malentendido, debo decir, sin embargo, que no recuerdo haber discutido sobre este tema con nadie. "

En esta problemática y desde un punto de vista más geométrico, también trabaja Carl Gustav Jacobi (1804-1851) quien sostiene con Abel una competencia, la mayor parte de las veces sin incidencias. Como ya señalamos, Jacobi es uno de sus principales promotores y continúa , junto con muchos otros matemáticos como Liouville, Weierstrass y Noether, desarrollando estas ideas.

8. Integrales abelianas e hiperelípticas.

La memoria de Paris de 1826 está principalmente dedicada al estudio de una clase de integrales que generalizan a las elípticas y que Jacobi bautiza como abelianas. Éstas son de la forma $\int R(x, y)dx$, donde $R(x, y)$ es una función racional y las variables x, y están relacionadas por medio de una ecuación polinomial $f(x, y) = 0$. En este caso no es suficiente dar los extremos x_0 y x de la integral, sino que necesitamos fijar la trayectoria de integración que los une. En general esta viene dada por una rama univaluada y continua de la función multivaluada $y(x)$, donde $f(x, y(x)) = 0$.

Notemos que si $f(x, y) = y^2 - p(x)$ donde el grado de $p(x)$ es menor o igual a 4, estamos en el caso elíptico; cuando $n > 4$ obtenemos las llamadas integrales hiperelípticas.

En el caso general, Abel demuestra un teorema de adición del que deriva interesantes consecuencias para el caso hiperelíptico. Sin embargo, tratar esta problemática nos sacaría por completo del espacio del que disponemos, pero baste decir que da lugar a muchos de los temas de geometría algebraica, así como a la teoría de superficies de Riemann. También en este campo, Jacobi es el promotor y continuador directo de la obra de Abel.

Bibliografía.

[A] Abel, N. H. *Obras Completas.* S. Sylow y S. Lie Ed. 1881, Editions Jacques Gabay, reimpresión, 1992.

[Bi] Birkhoff, G. Ed. *Source book in classical Analysis.* Harvard University Press, Cambridge, Ma. ,1973.

[I] Infeld, L. *El elegido de los dioses.* Trad. Roberto Bixio. Siglo XXI Editores, México, 1974.

[Kl] Kline, M.

[K] Kolmogorov, A. N. y Yushkevitch, A. P. Ed. *Mathematics in the 19th. century. Geometry, Analytic function theory.* Capítulo 2: Analytic Functions por A. I. Markushévich. Birkhäuser, 1996.

[L] Lakatos, I. *Proofs and refutations* John Worral y Elie Zahar Ed., Cambridge University Press, 1976.

[M] Markushévich, A. I. *Funciones Maravillosas.* Lecturas populares de matemáticas. Editorial MIR, Moscú, 1977.

[O] Ore, O. *Niels Henrik Abel: Mathemacian Extraordinary.* Chealsey Publishing Company, N.Y., 1957.

[Sm] Smith, D.E. *A source book in mathematics.* Primera edición McGraw Hill Book, Co., 1929. Re-impresión, Dover Pub. Inc.,1999.

[St] Stubhaug, A. *Niels Henrik Abel and his times. Called Too Soon by Flames Afar.* Springer-Verlag, 2000.