

La función de Takagi

Alejandra Gaitan

Department of Mathematics
Purdue University,
West Lafayette, IN 47907-2067, USA
ygaitanm@purdue.edu

y Ricardo A. Sáenz

Facultad de Ciencias
Universidad de Colima
Colima, Mexico, 28045
rasaenz@ucol.mx

Resumen

La función de Takagi es un ejemplo de una función continua que es no diferenciable en cada uno de los puntos de su dominio. En este artículo discutimos su definición y algunas de sus propiedades más interesantes.

1. Introducción

Desde nuestras primeras clases de cálculo, en las cuales aprendemos la definición de diferenciabilidad, observamos que la función $x \rightarrow |x|$, el valor absoluto de x , es diferenciable en todo \mathbb{R} excepto en el punto $x = 0$, donde tiene un «pico». Si trasladamos $1/2$ en ambas direcciones y reflejamos su gráfica, podemos describir la función $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que resulta en el intervalo $[0, 1]$ como

$$\phi(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|,$$

que se muestra en la figura 1. Tenemos ahora una función que no es diferenciable en $1/2$.

La función ϕ está definida solo en el intervalo $[0, 1]$. Ahora bien, si la extendemos a todo \mathbb{R} periódicamente, es decir, para x en \mathbb{R} fuera del

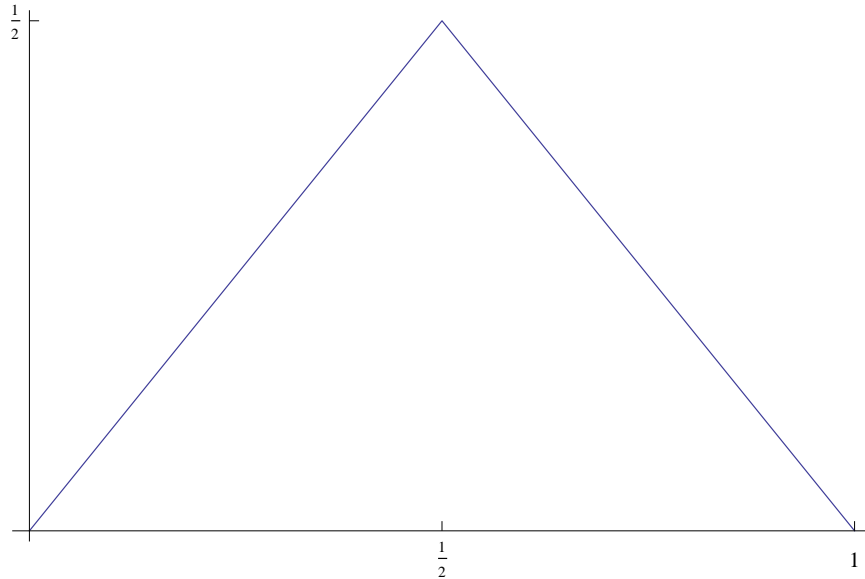


Figura 1. Gráfica de la función ϕ en el intervalo $[0, 1]$. Observamos que no es diferenciable en $1/2$.

intervalo $[0, 1]$ la definimos como

$$\phi(x) = \phi(x - [x]),$$

donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual a x , obtenemos una función periódica en \mathbb{R} que no es diferenciable en los múltiplos enteros de $1/2$, como se muestra en la figura 2.

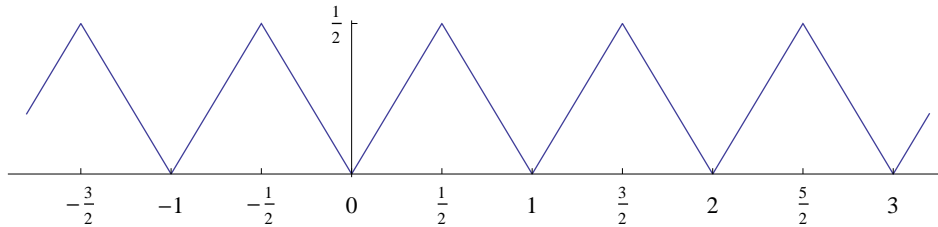


Figura 2. Gráfica de la extensión periódica de ϕ a \mathbb{R} . Observamos que ahora es una función que no es diferenciable en los múltiplos enteros de $1/2$.

Ahora haremos otra transformación: consideramos la transformación $x \rightarrow nx$, para un entero positivo n . Observamos que, si x recorre el intervalo $[0, 1]$, nx recorre el intervalo $[0, nx]$, y entonces la función $x \rightarrow \phi(nx)$ reproducirá el comportamiento de ϕ n veces en $[0, 1]$, por lo que será no diferenciable en $2n - 1$ puntos (interiores en el intervalo), como se ve en la figura 3.

Tomando el entero n tan grande como sea necesario, podemos construir entonces una función continua en $[0, 1]$ con el número impar de

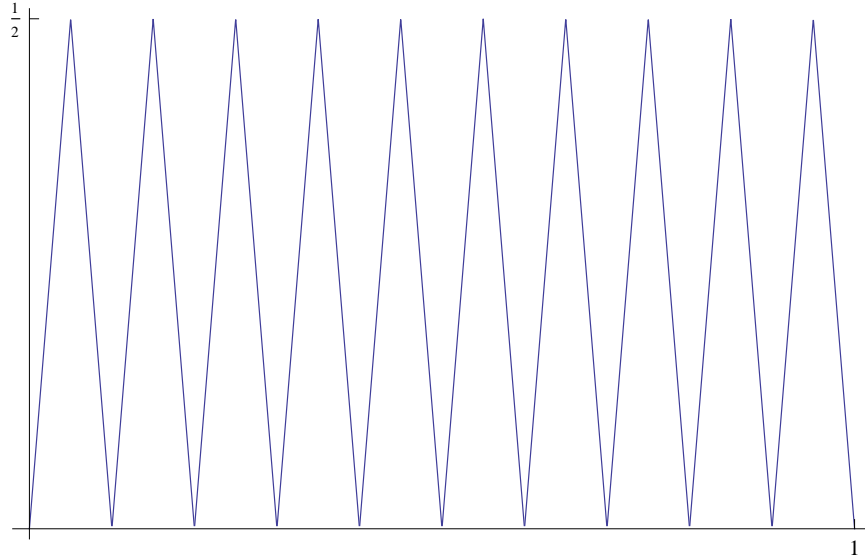


Figura 3. Gráfica de $\phi(nx)$ para $n = 10$. Observamos que ϕ se reproduce 10 veces en el intervalo $[0, 1]$.

puntos donde no sea diferenciable que queramos. De hecho es posible, con la ayuda de ϕ , construir una función continua con un número infinito de ellos.

2. La función de Takagi

Consideremos ahora la función

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(2^k x)}{2^k}. \quad (1)$$

La serie converge uniformemente en el intervalo $[0, 1]$ porque cada $|\phi(2^k x)| \leq 1/2$ y $\sum 1/2^k < \infty$, por el criterio M de Weierstrass [6]. Más aún, la convergencia uniforme nos garantiza que T es una función continua.

Como cada $\phi(2^k x)$ no es diferenciable en cada uno de los puntos de la forma $j/2^{k+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{k+1}$, no es muy difícil ver que T no será diferenciable en una infinidad de puntos. En la figura 4 podemos ver una aproximación a la gráfica de la función T .

La función (1) fue introducida por Teiji Takagi en 1903 [10]. Resulta que no solo no es diferenciable en una infinidad de puntos. Takagi demostró que, de hecho, no es diferenciable en todo el intervalo.

Teorema 2.1. *La función T no es diferenciable en cada punto de $[0, 1]$.*

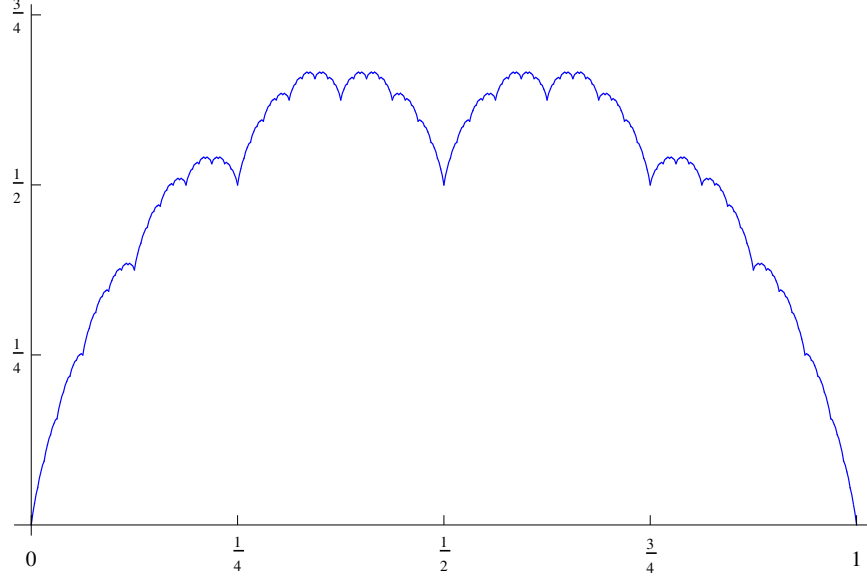


Figura 4. Función de Takagi.

Demostración. Empecemos por estudiar el comportamiento de T en los números de la forma $i/2^k$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$, para k consecutivos. Como la función ϕ es cero en los enteros (figura 2), tenemos que

$$\phi\left(2^j \frac{i}{2^k}\right) = 0,$$

si $j \geq k$.

Entonces

$$T\left(\frac{i}{2^k}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \phi\left(2^j \frac{i}{2^k}\right), \quad (2)$$

porque el resto de los sumandos es cero.

Ahora bien, si $k > j$ e $i < 2^{k-j-1}$, entonces

$$2^j \frac{i}{2^k} = \frac{i}{2^{k-j}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{y} \quad 2^j \frac{(i+1)}{2^k} = \frac{i+1}{2^{k-j}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$

en el caso $i \geq 2^{k-j-1}$, ambos

$$2^j \frac{i}{2^k}, 2^j \frac{(i+1)}{2^k} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Como ϕ es lineal en cada uno de estos intervalos (figura 5), el valor de ϕ en el punto medio de $\frac{2^j i}{2^k}$ y $\frac{2^j (i+1)}{2^k}$, $\frac{2i+1}{2^{k-j+1}}$, es el promedio de los valores de ϕ en ambos, es decir,

$$\phi\left(\frac{2i+1}{2^{k+1-j}}\right) = \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \phi\left(\frac{2^j (i+1)}{2^k}\right) \right).$$

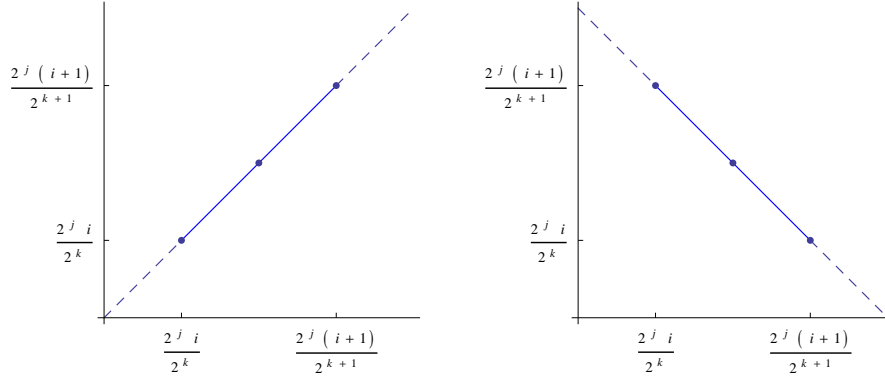


Figura 5. La gráfica de ϕ en el intervalo $[\frac{2^j i}{2^k}, \frac{2^j(i+1)}{2^{k+1}}]$. A la derecha se muestra el caso $i < 2^{k-j-1}$, mientras que a la izquierda muestra el caso $i \geq 2^{k-j-1}$.

De lo anterior, para $0 \leq i \leq 2^k - 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 T\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} \phi\left(2^j \cdot \frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{2} \left(\phi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \phi\left(\frac{2^j(i+1)}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \phi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \phi\left(\frac{2^j(i+1)}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(T\left(\frac{i}{2^k}\right) + T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado (2). Obtenemos entonces las relaciones

$$T\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) - T\left(\frac{i}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \left(T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - T\left(\frac{i}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}}, \quad (3)$$

y

$$T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - T\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \left(T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - T\left(\frac{i}{2^k}\right) \right) - \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (4)$$

Ahora bien, dado cualquier $x \in [0, 1]$, escribimos su expansión binaria

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{2^j}$$

como $.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots$, donde cada $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, y sus sumas parciales

$$\sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j}$$

como $.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_k$. Escribimos $.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots(\varepsilon_k + 1)$ para denotar al número

$$\sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^k}.$$

Si escribimos

$$x = \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{2^j},$$

podemos observar que

$$\sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j} \leq x \leq \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^k},$$

por lo que, para toda k ,

$$.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_k \leq x \leq .\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{k-1}(\varepsilon_k + 1).$$

Para llegar a una contradicción, suponemos que T es diferenciable en x . Entonces el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(. \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots (\varepsilon_k + 1)) - T(. \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)}{2^{-k}}$$

debe existir y es igual a $T'(x)$. Si definimos t_k como

$$t_k = \frac{T(. \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots (\varepsilon_k + 1)) - T(. \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)}{2^{-k}},$$

entonces t_k es una sucesión convergente y, en particular, es una sucesión de Cauchy.

La relación entre t_k y t_{k+1} depende del valor de ε_{k+1} . Si $\varepsilon_{k+1} = 0$, entonces

$$.\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = .\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \quad \text{y} \quad .\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k (\varepsilon_{k+1} + 1) = .\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k 1.$$

Como $. \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k 1$ es el punto medio entre $. \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ y $. \varepsilon_1 \dots (\varepsilon_k + 1)$, la ecuación (3) implica que

$$t_{k+1} = t_k + 1.$$

Ahora bien, si $\varepsilon_{k+1} = 1$,

$$.\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \varepsilon_{k+1} = .\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k 1 \quad \text{y} \quad .\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k (\varepsilon_{k+1} + 1) = .\varepsilon_1 \dots (\varepsilon_k + 1),$$

por lo que la ecuación (4) implica que

$$t_{k+1} = t_k - 1.$$

Entonces

$$|t_{k+1} - t_k| = 1,$$

por lo que t_k no puede ser una sucesión de Cauchy. Esto contradice la existencia de $T'(x)$, y por lo tanto T no es diferenciable en x . \square

Que T no sea diferenciable en cada punto x significa que el cociente

$$\frac{T(x) - T(y)}{x - y} \quad (5)$$

no tiene límite cuando $y \rightarrow x$. De hecho, este cociente ni siquiera está acotado. Tomemos, por ejemplo, los puntos $x = 0$ y $y = 2^{-N}$, para $N \in \mathbb{N}$. Vemos que $T(0) = 0$, y

$$T(2^{-N}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(2^k \cdot 2^{-N})}{2^k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^k \cdot 2^{-N}}{2^k} = N \cdot 2^{-N},$$

porque $\phi(x) = x$ para $x \in [0, 1/2]$ y $\phi(j) = 0$ para cualquier entero j . Así,

$$\left| \frac{T(2^{-N}) - T(0)}{2^{-N} - 0} \right| = N,$$

por lo que el cociente no está acotado cuando $y \rightarrow x$ ($N \rightarrow \infty$).

Sin embargo, podemos ver que la relación entre el denominador, 2^{-N} , y el cociente, N , es logarítmica, porque $|\log 2^{-N}| = N \log 2$. Esto es, de hecho, lo «peor» que podemos obtener para los cocientes (5), como lo establece el siguiente resultado [4].

Teorema 2.2. *Existe una constante $A > 0$ tal que, para todo $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$,*

$$\left| \frac{T(x) - T(y)}{x - y} \right| \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right). \quad (6)$$

Demostración. Dados $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$, sea N el número natural tal que

$$2^{-N} \leq |x - y| < 2^{-N+1},$$

y separemos la diferencia

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(2^k x) - \phi(2^k y)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^N \frac{|\phi(2^k x) - \phi(2^k y)|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|\phi(2^k x) - \phi(2^k y)|}{2^k}, \end{aligned}$$

usando la desigualdad del triángulo. De las estimaciones

$$|\phi(2^k x) - \phi(2^k y)| \leq \begin{cases} 2^k |x - y|, & k \leq N, \\ 1, & k > N, \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &\leq \sum_{k=0}^N \frac{2^k |x - y|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (N + 1)|x - y| + \frac{1}{2^N} \\ &\leq (N + 2)|x - y|, \end{aligned}$$

porque $2^{-N} \leq |x - y|$. Como también $|x - y| < 2^{-N+1}$, tenemos que $2^N |x - y| < 2$, por lo que

$$N \log 2 + \log |x - y| < \log 2,$$

y entonces

$$N + 2 < 3 + \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right),$$

para una constante apropiada A^1 . Así,

$$|T(x) - T(y)| \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right) |x - y|. \quad \square$$

La observación hecha después del teorema 2.1 establece que T no es una función de Lipschitz. Sin embargo, el hecho que el cociente (6) tenga una estimación logarítmica implica que la función de Takagi es más regular que cualquier función de Hölder. Es decir, para cualquier $\alpha < 1$, existe $A_\alpha > 0$ tal que

$$|T(x) - T(y)| \leq A_\alpha |x - y|^\alpha,$$

para todo $x, y \in [0, 1]$. En particular, esto implica que la gráfica de T , como subconjunto del plano, tiene dimensión de Hausdorff igual a 1.²

La función de Takagi no fue la primera función continua que no es diferenciable en ningún punto. Los primeros ejemplos fueron descubiertos en el siglo XIX, entre los cuales destacan las funciones de Weierstrass. Una breve historia de estas funciones puede ser encontrada en [7].

3. Valor máximo

En esta sección estudiaremos el valor máximo de la función $T(x)$ y el conjunto donde toma su máximo. Empezamos por observar que el valor máximo de $\phi(x)$ es $1/2$, y por lo tanto

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(2^k x)}{2^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

¹ $A = 5 + 1/\log 2$ funciona para todo $N \geq 2$.

²De hecho es posible demostrar que, si una función es de Hölder de orden $\alpha < 1$, entonces su gráfica es una curva con dimensión de Hausdorff a lo más $2 - \alpha$. Las demostraciones de todos estos hechos pueden encontrarse en [11].

Entonces podemos asegurar que el valor máximo de T se encuentra entre 0 y 1. Jean-Pierre Kahane demostró en [9] que el máximo valor de T es $2/3$, y aquí presentaremos otra demostración de este hecho, siguiendo la idea en [2].

Teorema 3.1. *La función de Takagi tiene valor máximo igual a $2/3$.*

Demostración. Comenzamos probando que, para $x \in [0, 1]$ y $k \geq 1$,

$$\frac{\phi(2^{2k-2}x)}{2^{2k-2}} + \frac{\phi(2^{2k-1}x)}{2^{2k-1}} \leq \frac{2}{4^k}, \quad (7)$$

o, equivalentemente,

$$\phi(2^{2k-2}x) + \frac{\phi(2^{2k-1}x)}{2} \leq \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Dado que $\phi(x)$ es periódica con periodo 1, la desigualdad anterior también es equivalente a

$$\phi(x) + \frac{\phi(2x)}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

De la definición de ϕ ,

$$\phi(x) + \frac{\phi(2x)}{2} = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1/2, & \text{si } 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 2 - 2x, & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y es claro que esta función es menor o igual a $1/2$ para toda $x \in [0, 1]$ (como se ve en la figura 6). Por la periodicidad de ϕ , concluimos (7).

Ahora podemos usar la desigualdad (7) para obtener

$$\begin{aligned} T(x) &= \phi(x) + \frac{1}{2}\phi(2x) + \frac{1}{2^2}\phi(2^2x) + \frac{1}{2^3}\phi(2^3x) + \dots \\ &= \left(\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(2x)\right) + \left(\frac{1}{2^2}\phi(2^2x) + \frac{1}{2^3}\phi(2^3x)\right) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k-2}}\phi(2^{2k-2}x) + \frac{1}{2^{2k-1}}\phi(2^{2k-1}x)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4^k} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(x) \leq 2/3$. Solo basta mostrar que existen x tal que $T(x) = 2/3$, los cuales deben satisfacer la igualdad en (7) para todo k .

Nos concentraremos en encontrar los puntos x donde (8) es una igualdad. Escribimos

$$\phi_k(x) = \phi(2^{2k-2}x) + \frac{\phi(2^{2k-1}x)}{2},$$

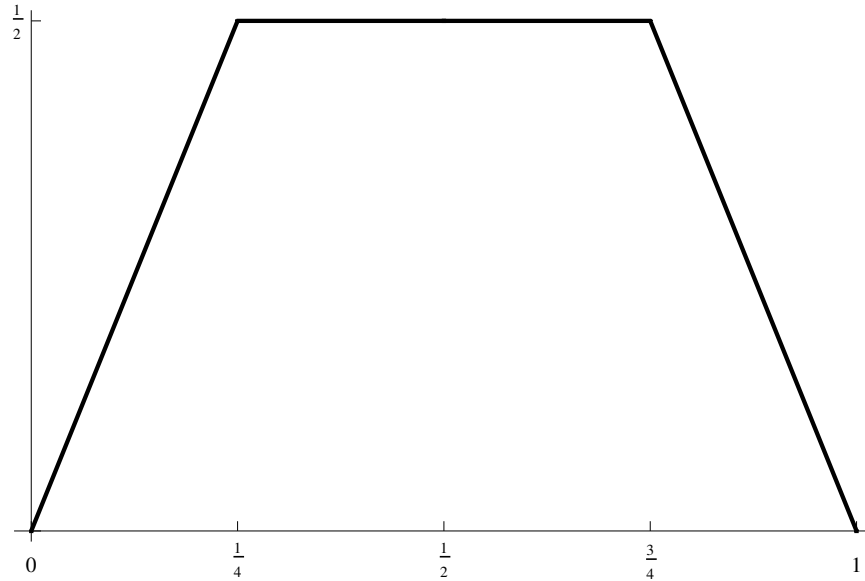


Figura 6. Gráfica de la función $\phi(x) + \phi(2x)/2$, donde se aprecia que su máximo es $1/2$.

y notamos que

$$\begin{aligned} \phi_k\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right) &= \phi\left(2^{2k-2}\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right)\right) + \frac{1}{2}\phi\left(2^{2k-1}\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right)\right) \\ &= \phi(1 + 2^{2k-2}x) + \frac{\phi(2 + 2^{2k-1}x)}{2} \\ &= \phi(2^{2k-2}x) + \frac{\phi(2^{2k-1}x)}{2} = \phi_k(x), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\phi(x+1) = \phi(x)$.

Por lo tanto, ϕ_k es periódica con periodo $1/4^{k-1}$ y la gráfica de ϕ_k es la unión de 4^{k-1} «copias» de ϕ_1 , con la misma altura $1/2$, pero con anchura $1/4^{k-1}$, como se ve en la figura 7.

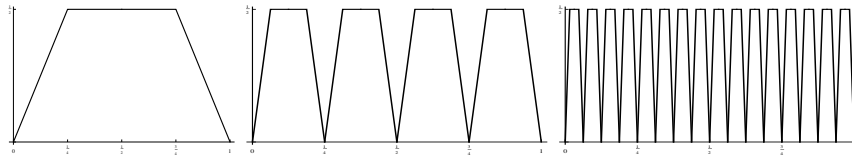


Figura 7. $\phi_k(x)$ for $k = 1, 2, 3$. Notamos que ϕ_k es igual a $1/2$ en la unión de 4^{k-1} subintervalos de $[0, 1]$, cada uno de longitud $2/4^k$.

Así que definimos $A_1 = [1/4, 3/4]$ y, para cada $k \geq 1$, construimos A_{k+1} como el conjunto dado por la unión de los 2^k subintervalos de longitud $2/4^{k+1}$ donde ϕ_{k+1} es igual a $1/2$ que están contenidos en A_k .

Por ejemplo,

$$A_2 = \left[\frac{5}{16}, \frac{7}{16} \right] \cup \left[\frac{9}{16}, \frac{11}{16} \right]$$

y

$$A_3 = \left[\frac{21}{64}, \frac{23}{64} \right] \cup \left[\frac{25}{64}, \frac{27}{64} \right] \cup \left[\frac{37}{64}, \frac{39}{64} \right] \cup \left[\frac{41}{64}, \frac{43}{64} \right].$$

En la figura 8 mostramos los primeros conjuntos A_k .



Figura 8. Primeros seis conjuntos A_k .

Sea $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Como cada A_k es la unión finita de intervalos cerrados, su intersección A no es vacía y, para $x \in A$, tenemos que $T(x) = 2/3$. \square

Podemos caracterizar los puntos del conjunto A de la demostración del teorema 3.1 por medio de la expansión cuaternaria de sus puntos, es decir, la expansión

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{4^i}, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

De la construcción de A , $x \in A$ si y solo si $\varepsilon_i = 1, 2$ para todo $i \geq 1$. Así, podemos escribir

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{4^i} : \varepsilon_i = 1, 2 \right\}.$$

Por ejemplo, como

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i},$$

$1/3 \in A$ y $T(1/3) = 2/3$.

Se puede demostrar que A es entonces un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor, solo que en la construcción de A cada intervalo disjuncto de la k -ésima iteración es reescalado con factor $1/4$ para después

ser duplicado. Más aún, A es un conjunto autosimilar [11]. De hecho,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{4^i} : \varepsilon_i = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{4^i} : \varepsilon_i = 1, 2 \right\} \cup \left\{ \frac{2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{4^i} : \varepsilon_i = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{4^j} : \varepsilon_j = 1, 2 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{4^j} : \varepsilon_j = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Así, A satisface la ecuación de autosimilaridad

$$A = \psi_1(A) \cup \psi_2(A)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son las contracciones

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x \quad \text{y} \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x,$$

ambas con factor de contracción $1/4$. Las contracciones ψ_1 y ψ_2 satisfacen la condición del conjunto abierto del teorema de Hutchinson [8] y, por lo tanto, tenemos que la dimensión de Hausdorff de A es igual a $1/2$.

En los últimos años ha habido un gran interés en el estudio de los conjuntos de nivel

$$T^{-1}(y) = \{x \in [0, 1] : T(x) = y\},$$

$0 \leq y \leq 2/3$, de la función de Takagi. Por ejemplo, Buczolic [5] demostró que, para casi todo $y \in [0, 2/3]$, la cardinalidad de $T^{-1}(y)$ es finita. Por la simetría de T , si $T^{-1}(y)$ es finito, entonces tiene un número par de elementos. Más aún, Allaart [1] demostró que para cualquier número par positivo p existe y tal que $T^{-1}(y)$ tiene exactamente p elementos.

El conjunto $A = T^{-1}(2/3)$ no es el único conjunto de nivel con dimensión de Hausdorff positiva. Anderson y Pitt [2] demostraron que el conjunto de valores y tales que $T^{-1}(y)$ tiene dimensión positiva tiene dimensión de Hausdorff igual a 1. Sin embargo, De Amo *et. al* [3] demostraron que la dimensión de los conjuntos de nivel no es mayor que $1/2$.

Invitamos a los lectores de este artículo a conocer más de la función de Takagi. El extenso artículo de Allaart y Kawamura [2] contiene una lista de los últimos resultados relacionados con esta función.

Bibliografía

- [1] P. C. Allaart, «The finite cardinalities of level sets of the Takagi function», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 388, núm. 2, 2012, 117–119.
- [2] P. C. Allaart y K. Kawamura, «The Takagi function: a survey», *Real Analysis Exchange*, vol. 37, núm. 1, 2011, 1–54.
- [3] E. D. Amo, I. Bhourri, M. D. Carrilo y J. Fernández-Sánchez, «The Hausdorff dimension of the level sets of Takagi function», *Nonlinear Anal.*, vol. 74, núm. 15, 2011, 5081–5087.
- [4] J. M. Anderson y L. D. Pitt, «Probabilistic behavior of functions in the Zygmund spaces λ^* and λ^{**} », *Proc. London Math. Soc.* 59, núm. 3, 1989, 558–592.
- [5] Z. Buczolich, «Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions», *Acta Math. Hungar.*, vol. 121, núm. 4, 2008, 371–393.
- [6] E. Gaughan, *Introduction to Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, 1987.
- [7] G. Grabinsky, «La función continua no diferenciable de Weierstrass», *Miscelánea Matemática*, vol. 25, 1997, 29–38.
- [8] J. E. Hutchinson, «Fractals and self-similarity», *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 30, núm. 5, 1981, 713–747.
- [9] J.-P. Kahane, «Sur l'exemple, donné par m. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée», *Enseignement Math.*, vol. 5, 1959, 53–57.
- [10] T. Takagi, «A simple example of the continuous function without derivate», *Phys-Math. So. Japan*, vol. 1, 1903, 176–177, The Collected Papers of Teiji Takagi, S. Kuroda, Ed., Iwanami (1973), 5-6.
- [11] M. Yamaguti, M. Hata y J. Kigami, *Mathematics of fractals*, American Mathematical Society, 1997.