Interpolar con volados, o los Polinomios de Bernstein

Ana Meda
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán, 04510
México D. F.
MEXICO
amg@hp.fciencias.unam.mx

Pensaba dedicarle este artículo a Robert Bartle porque lo considero un gran divulgador y murió recientemente. Ahora que Juan José Rivaud ya no está, me doy cuenta de que en Juanjo tuvimos un extraordinario difusor de la ciencia. Él me hizo involucrarme con la divulgación, no sólo con su ejemplo y entusiasmo, con sus invitaciones y las tareas que me dejó. Una más de las ausencias que tendremos es el artículo que ya no escribió para este número de la Miscelánea, el *número de los editores*, que él se inventó.

1. Introducción

Supongamos que queremos interpolar el valor de una función continua. Por ejemplo, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, y conocemos $f\left(\frac{k}{n}\right)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, y toda $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Digamos que f no es analítica o que no es derivable en ningún punto,[1] así que olvidémonos de los polinomios de Taylor. ¿Qué hacer?

[0]Con el apoyo económico del Proyecto CONACYT-37922E.

[1]Aunque pudiera parecer que tardamos mucho (históricamente) en conocer el primer ejemplo de una función así, y se conoce bastante la construcción de Weier-

Muy fácil: Si queremos aproximar $f(x)$, con $x \in [0,1]$, lanzamos n veces una moneda cargada con Probabilidad de águila igual a x, y contamos cuántas veces salió águila. Si cayó águila k veces, entonces elegimos el valor $f(x) \approx f\left(\frac{k}{n}\right)$.

El teorema de Bernstein nos garantiza que, en promedio, esta estrategia es maravillosa.

El promedio al que nos referimos es la *esperanza* de esta estrategia aleatoria, y resulta ser un polinomio en x conocido como polinomio de Bernstein. Lo maravilloso de la estrategia es que los polinomios de Bernstein de f convergen uniformemente a f, lo cual de paso es una prueba constructiva del teorema de Weierstrass[2].

Dos moralejas: Una, que a veces usar el azar es igual de efectivo que realizar una aproximación harto juiciosa. La otra, como suele suceder en matemáticas, muchos objetos o modelos *deterministas* son la *esperanza* de su contraparte aleatoria.

Los resultados de S. Bernstein que discutiremos en este artículo parecen haber sido publicados en [Bernstein(1912)] y en [Bernstein(1943)] y aparecen en varios libros de matemáticas, tanto de Probabilidad como de Análisis (ver, por ejemplo [Feller(1971)], [Pólya y Szegö(1998)]). En particular fueron rescatados por [Bartle(1982)], quien, aunque los *disfrazó* de Análisis, quitando toda referencia a la Probabilidad, debe ser el responsable de que aún estén en los programas de algunas materias de Análisis[3]. Según una biografía de Bernstein, ([O'Connor and Robertson()]) éste habló de estos polinomios en el Congreso Mundial de Matemáticas celebrado en Cambridge en 1912. En 1937 Marc Kac trabajó con estos polinomios ([Kac(1937)]), y si hoy buscamos en la página de la Sociedad Matemática Estadounidense (AMS,

strass (para lo cual recomiendamos ver el artículo de Guillermo Grabinsky en la Miscelánea Matemática dedicada a Weierstrass ([Grabinsky(1997)]), y de paso todo ese volumen), resulta que hay muchas funciones continuas no derivables en ningún punto. De hecho es el caso más probable: De acuerdo a la medida de Wiener (o Movimiento Browniano), las funciones con derivada lateral en algún punto es un subconjunto bastante insignificante desde el punto de vista de la medida. Por ejemplo, con Probabilidad 1, las trayectorias del movimiento Browniano no son Lipschitz continuas (y por tanto no son diferenciables) en ningún punto. Este último resultado es un hecho elemental sobre el Movimiento Browniano cuya prueba se atribuye a Paley, Wiener y Zygmund en 1933. Erdös también tiene una prueba de ello, de 1961, que se puede ver en [Durrett(1996)], p.338.

[2] Ver por ejemplo la p. 199 en el libro de Robert G. Bartle, (1927–2003), ([Bartle(1982)]).

[3] [Rudin(1980)] no los menciona, pero su prueba del Teorema de Stone-Weierstrass es constructiva.

en su [AMS]) encontraremos 20 páginas de artículos registrados en cuyo título aparecen los polinomios de Bernstein.

Por cierto, si queremos averiguar algo sobre Bernstein,[4] es casi increíble que, a pesar de haber resuelto los problemas 19 y 20 de Hilbert, no aparece en muchos libros de Historia de las Matemáticas. No resulta el caso más patético porque incluso Kolmogorov suele ser extirpado de los mismos textos. No sé si es por ser en parte Probabilistas, por ser rusos (Bernstein era ucraniano) o por lo que sea, el caso es que no es fácil encontrar referencias a estos grandes matemáticos en muchos libros de Historia de las Matemáticas. Es más recomendable incluso buscar en internet. La página web de la American Mathematical Society tiene biografías y genealogías matemáticas muy interesantes ([AMS]), y parecen querer cambiar esta tendencia.

2. Rollo

Una parte del Análisis Matemático son los procesos de aproximación. En algunos casos se trata de acercarse a un objeto por medio de otros más simples, más manejables o *mejor portados*, con la esperanza de poder manipular el primer objeto o que algunas propiedades de los objetos *bien portados* se *hereden*.

En cursos básicos de Análisis se enseña que *los polinomios son densos en las funciones continuas,* esto es, que los polinomios aproximan cualquier función continua. Aún antes, parte de los cursos de Cálculo se ocupan en probar que ciertas funciones son aproximables por polinomios: con el Teorema de Taylor estos polinomios aproximantes se construyen explícitamente. En textos básicos de Análisis como en [Bartle(1982)], [Kolmogorov and Fomín(1975)], o [Rudin(1980)], se presentan distintos teoremas de aproximación como los de Bernstein, Weierstrass, Stone, Stone–Weierstrass; que en distintos grados de generalidad dicen lo mismo. (En el Teorema de Stone–Weierstrass la familia densa es un Álgebra que separa puntos).

Estas notas tratan de los polinomios y del Teorema de Bernstein (Fórmula (1) y Teorema (3.1)). Hay varias razones para hacerlo:

1. Se trata de un resultado importante y útil, que tememos está en riesgo de desaparecer de programas de Análisis para dar paso a teoremas menos constructivos y más abstractos y generales. Esperamos apoyar, con este ejemplo, la opinión de que las pruebas

[4] [O'Connor and Robertson()], [AMS] y ligas allí disponibles.

constructivas son preferibles a las de pura existencia. Con los polinomios de Bernstein, dada una función continua f, se construye una sucesión explícita de polinomios que convergen uniformemente a f.

2. Es frecuente que los estudiantes de matemáticas le tengan miedo a las fórmulas. Una manera de revertir esta situación es haciendo que las fórmulas sean naturales. Creo que con la interpretación Probabilística los polinomios de Bernstein son naturales y hasta intuitivos.

3. Los Polinomios de Bernstein tienen una estrecha relación con Probabilidad, algo que es elemental pero me temo que sólo para los probabilistas (ver, por ejemplo, [Feller(1971)]). Una forma de entenderlos es lanzando volados (variables Bernoulli) y calculando la esperanza de una variable aleatoria muy parecida a la Binomial[5].

4. Otra bondad del Teorema que queremos discutir es que a diferencia del Teorema de Taylor, que requiere que la función que se va a aproximar f sea entre otras cosas diferenciable, [6] para el Teorema de Bernstein sólo necesitamos que la función sea continua, lo cual es más a nuestro favor (o de los Polinomios de Bernstein).

Resumiendo: los Polinomios de Bernstein nos dan una construcción particular y explícita de polinomios densos en el espacio de funciones continuas con dominio en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. No se necesita que la función que se va a aproximar f sea ni siquiera derivable en algún punto. Sólo se necesita poder evaluarla en una retícula de puntos del dominio, (en una sucesión de particiones del intervalo con normas que tiendan a cero), y para cada $x \in [0,1]$ lanzar volados con Probabilidad de águila igual a x.

En la siguiente Sección daremos algunas definiciones necesarias y enunciaremos el Teorema de Bernstein.

[5]La Binomial consiste en sumar el número de éxitos después de realizar n experimentos independientes que pueden resultar en éxito o fracaso, y la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de los experimentos.

[6]Debemos añadir a esto que la diferenciabilidad no basta para tener polinomios aproximantes explícitos con Taylor. Tenemos el clásico ejemplo de la función $\exp(-x^{-2})$, que es de clase C_∞ pero su serie de Taylor en cero es la constante cero, i.e. los polinomios de Taylor no aproximan esta función en ninguna vecindad del origen.

A continuación desmenuzaremos los polinomios de Bernstein. Para ello usaremos Probabilidad y Cálculo. No incluimos la prueba del Teorema de Bernstein porque se puede consultar en muchos sitios. En particular recomiendo la prueba que da [Bartle(1982)], que me parece clara, sencilla y bella.

3. Definiciones y Resultados

Que *los polinomios aproximan a las funciones continuas* quiere decir que dados un número real $\epsilon > 0$ y una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe un polinomio $p_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|f - p_\epsilon\|_\infty = \sup\{|f(x) - p_\epsilon(x)| : \ x \in [0,1]\} < \epsilon.$$

A $\|\cdot\|_\infty$ se le conoce como la *norma infinito* en el espacio vectorial de funciones continuas f con dominio $[0,1]$ y con valores en $\mathbb{R}$. Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, el $n-$ésimo polinomio de Bernstein de f de "grado" n es (usando la misma notación que [Bartle(1982)], p. 196)

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Observemos que:

1. Escribimos grado entre comillas porque dependiendo de la función f, $B_n(f,x)$ puede ser incluso una constante. Lo correcto es decir que $B_n(f,x)$ es un polinomio de grado *a lo más n*.

2. Habíamos anunciado que se calculaba f en una retícula y que su dominio era un intervalo compacto. Por comodidad, (y porque así se suele definir), dicha retícula serán los puntos de la forma $\frac{k}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y el dominio de f será el intervalo $[0,1]$. Dejaremos al lector justificar la primera afirmación generalizando estos resultados.

3. Tal vez no lleguemos al punto en el que al lector le parezca, como a mí, que estos polinomios son una monada, pero sí espero que se vean naturales, por lo menos un poco.

En fin, el Teorema que queremos discutir es el siguiente:

Teorema 3.1 (Teorema de Bernstein). *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f,x)\|_\infty = 0.$$

4. Cálculos y Fórmulas

Primero recordemos la fórmula del *binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde $\binom{n}{k}$, o *las combinaciones de* n *(elementos) tomados de* k *en* k es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ y se puede entender como el $(k+1)-$ésimo número del $(n+1)-$ésimo renglón del Triángulo de Pascal[7], pero esa es otra historia. Por lo pronto, veamos que si $a = x \in [0,1]$ y $b = 1-x$, obtenemos que

$$1 = 1^n = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2}$$

Esta identidad nos dice muchas cosas. Para empezar, ya sabemos calcular el polinomio de Bernstein de las funciones constantes: Si $g(x) \equiv \alpha \in \mathbb{R}$, $B_n(g,x) \equiv \alpha$. Para ver eso basta observar que $g\left(\frac{k}{n}\right) \equiv \alpha$, factorizar α en (1) y usar (2). Veremos otros usos de esta identidad más adelante.

5. Los polinomios de Bernstein

Al polinomio de grado n que no depende de f en el k-ésimo término del polinomio de Bernstein (1) le llamamos φ_k aunque también depende de n ($\varphi_k = \varphi_{k,n}$; y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} \varphi_k &: [0,1] \to \mathbb{R}, \\ \varphi_k(x) &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Primero, es claro que para toda $x \in [0,1]$, $\varphi_k(x) \geq 0$. Además, (2) nos indica que $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) = 1$, y por estas dos razones $\varphi_k(x) \leq 1$. Esto último no es tan obvio, pues aunque x y $1-x$ son números reales entre 0 y 1, $\binom{n}{k}$ es un número natural[8] que puede ser muy grande.

---

[7]

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \ldots & & & & & \end{array}$$

[8] ¿Por qué es entero?

Más sobre φ_k :

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x) &= \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x)-(n-k)x] \\ &= \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k-nx],\end{aligned}$$

y esta derivada es cero en cero, en uno y en $x = \frac{k}{n}$ (los casos especiales $n = 0$, $n = 1$ o bien $k = 0$, y $k = n$, se dejan al lector). También le dejamos al lector decidir que en $x = \frac{k}{n}$ el polinomio alcanza un máximo, y encontrar el valor $\varphi_k(\frac{k}{n})$.

El punto importante es que si fijamos $x \in [0, 1]$, los términos que más van a contribuir a $B_n(f, x)$ son aquéllos $f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_k(x)$ para los cuales $\frac{k}{n}$ está cerca de x. A esto le sacaremos jugo más adelante.

φ_k también se puede entender desde la Probabilidad: Si lanzamos n veces una moneda (de ser necesario cargada) con Probabilidad de águila igual a x, y los lanzamientos son independientes entre sí, entonces $\varphi_k(x)$ es la probabilidad de que exactamente k de esos lanzamientos sean águila[9].

6. Un poco más de Probabilidad

Al experimento que consiste en: *lanzar n veces una moneda con probabilidad de obtener águila x y sumar las veces que aparece águila*, se le conoce como *variable aleatoria Binomial* (n, x).

Las *variables aleatorias Bernoulli* toman valores cero o uno, y la Binomial (n, x) es la suma de n variables Bernoulli(x) (independientes) [10].

Esto nos da otra forma de entender (2): sumamos las probabilidades de todos los resultados posibles que tiene la distribución Binomial (casos disjuntos, claro), y esa suma es uno, i.e., es la probabilidad de un evento seguro.

Ahora ya tenemos una manera probabilística de entender a los polinomios de Bernstein como la *esperanza* de una variable aleatoria. Si queremos aproximar $f(x)$, hacemos el siguiente experimento:

1. Lanzamos n veces una moneda cargada con Probabilidad de águila igual a x,

[9] La probabilidad de una secuencia de n lanzamientos con exactamente k águilas es, por independencia, $x^k(1-x)^{n-k}$. Ahora sólo falta contar cuántas de esas secuencias de n volados tienen k águilas. Numerando los lanzamientos y eligiendo los exitosos, el problema es el mismo que encontrar subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

[10] Las variables aleatorias Bernoulli son las que modelan un volado. Esta variable vale uno si cayó águila y cero si fue sol.

2. Contamos cuántas veces salió águila.
3. Si cayó águila k veces, entonces elegimos el valor $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

$B_n(f,x)$ es la esperanza de la variable aleatoria que acabamos de describir, i.e., la suma de los valores que toma esta variable aleatoria ponderada por la probabilidad de que los tome:

$$\begin{aligned} B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\tbinom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \end{aligned} \tag{4}$$

En realidad esta *nueva* variable es la composición de la variable Binomial que describimos arriba con una función determinista $F_n\colon \{0,1,2,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ que hace $F_n(k) = f\left(\frac{k}{n}\right)$. Por supuesto la esperanza de esta variable es la misma, si la vemos como variable o como composición de una variable Binomial con F_n. Basta recordar las fórmulas elementales de esperanza matemática, que en este caso (si Y es la Binomial(n,x)) nos dan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_n(Y)] &= \sum_{k=0}^{n} F_n(k)\mathbb{P}[F_n(Y) = F_n(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{n} F_n(k)\mathbb{P}[Y = k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_k(x) = B_n(f,x). \end{aligned}$$

La posibilidad de lanzar volados y de paso obtener una aproximación a la función no deja de ser algo atractivo; es tal vez más divertido que calcular derivadas y desde luego este método sí sirve para todas las funciones continuas y no sólo para las analíticas.

Ahora bien, por ahora la idea de lanzar un volado con Probabilidad de águila igual a x, para cualquier $x \in [0,1]$ pudiera parecer experimento pensado de ésos que no se pueden hacer, y que sólo podemos realizar si $x = \frac{1}{2}$. Éste no es el caso. Si tenemos un buen generador de números aleatorios entre cero y uno, la probabilidad de que un número generado esté en el intervalo $[0,x]$ es x (una vez más, $0 \le x \le 1$) y de que caiga en $[x,1]$ es $1-x$. Ahora basta con generar dicho número, observar en qué intervalo cayó y decir que fue águila en el primer caso y sol en el segundo.

Los generadores de números aleatorios tratan de simular la distribución uniforme en el $[0,1]$, la cual se entiende como *cae en intervalos de longitudes iguales con probabilidades iguales*, y es la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$.

Regresemos a la interpretación de los polinomios de Bernstein, ahora jugando con distintas funciones f (por ahora sólo hemos calculado los polinomios de Bernstein de las funciones constantes). Si $f(x)=x$, sus polinomios de Bernstein son:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}k\tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

que es $1/n$ veces la *esperanza* de la variable aleatoria Binomial(n,x), que se calcula en los cursos básicos de Probabilidad. Cancelando, reenumerando y reescribiendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}x^{k-1}(1-x)^{[(n-1)-(k-1)]}\\
&= x\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(j)![(n-1)-(j)]!}x^{j}(1-x)^{(n-1)-j}\\
&= x\sum_{j=0}^{n-1}\tbinom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{(n-1)-j}\\
&= x[x+(1-x)]^{n-1}=x\,, \qquad (5)
\end{aligned}$$

con lo que acabamos de probar que el polinomio de Bernstein (de cualquier grado) de la función identidad es otra vez la identidad.

Ahora calculemos los polinomios de Bernstein para la función $f(x)=x^2$. Después tendremos una fórmula recursiva, pero este cálculo es bastante ilustrativo. Imitando lo que hicimos para $f(x)=x$, cancelando k con los factoriales, reenumerando y factorizando n :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{nx}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

Hay un k que pasa a ser $k+1$ por la reenumeración (cambio de variable, pues). Aquí separamos $k+1$ en dos términos, para repetir el mismo truco:

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^k(1-x)^{n-1-k} + \frac{x}{n}\cdot 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2(n-1)}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!}x^{k-1}(1-x)^{n-1-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{x^2(n-1)}{n} + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}, \qquad (6)
\end{aligned}$$

de donde vemos que la distancia uniforme entre x^2 y su polinomio de Bernstein está acotada por $1/4n$, que es $1/n$ veces el máximo de la función $x(1-x)$ en [0,1].

La *esperanza* se conoce también como el *primer momento*. Naturalmente, los $j-$ésimos momentos de la Binomial(n, x) están relacionados con los polinomios de Bernstein de las funciones x^j de la siguiente manera: Si $f(x) = x^j$ y $Y\sim$Binomial(n, x),

$$\begin{aligned}
B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^j \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{k=0}^{n} k^j \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^j \mathbb{E}[Y^j],
\end{aligned}$$

que es $1/n^j$ por el $j-$ésimo momento de Y.

Le queda al lector probar[11] la fórmula recursiva para Y como arriba y $X\sim$Binomial$(n-1, x)$:

$$\mathbb{E}[Y^j] = nx\mathbb{E}[(X+1)^{j-1}],$$

de modo que ya conocemos B para cualquier polinomio. Otro fácil de calcular es el polinomio para la función exponencial $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned}
B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{n}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{\frac{1}{n}}x)^k(1-x)^{n-k} = [x(e^{\frac{1}{n}}-1)+1]^n.
\end{aligned}$$

[11] O ver en [Ross(1984)], p.149.

Que conste que desde el punto de vista del teorema de Bernstein y del de Weierstrass, todos los cálculos que acabamos de hacer son irrelevantes, pues para los polinomios y para la exponencial conocemos perfectamente sucesiones de polinomios que los aproximan uniformemente.

7. Extensiones y Agradecimientos

Como se puede ver en el artículo de [Kac(1937)], se puede ir más allá con estos polinomios, preguntándonos por la velocidad de convergencia, lo cual nos acerca a versiones del Teorema Central de Límite, que, especulando, deben haber sido la razón por la cual Bernstein hizo todo esto ([Bernstein(1939)]).

Quiero agradecer a todos mi colegas y amigos, a quienes (desinteresada y frecuentemente) plagio comentarios que me parecen brillantes y que más adelante creo son míos. También a mis alumnos, en particular a los que han llevado conmigo cursos de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Es discutiendo con todos ellos que disfruto de una manera especial algunos temas del Análisis Clásico y muchas otras cosas.

Referencias

[AMS] The mathematical genealogy, a. URL `http://www.genealogy.ams.org/`.

[AMS] Mathscinet, b. URL `http://www.ams.org/mathscinet`.

[Bartle(1982)] R. G. Bartle. *Introducción al análisis matemático.* Editorial Limusa, México, 1982. ISBN 968-18-0997-1. Traducción de Ma. Cristina Gutiérrez González.

[Bernstein(1912)] S. Bernstein. *Communic. Soc. Math. Charkow*, 13 (Ser. 2):1–2, 1912. Citado por Polya y Szego, Vol. 1.

[Bernstein(1939)] S. Bernstein. Some remarks concerning the limit theorem of Liapunov. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 24:3–7, 1939.

[Bernstein(1943)] S. Bernstein. Sur les domains de convergence des polynomes $\sum_0^n C_n^m f(m/n)x^m(1-x)^{n-m}$. *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]*, 7:49–88, 1943.

[Durrett(1996)] R. Durrett. *Probability: theory and examples.* Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996. ISBN 0-534-24318-5.

[Feller(1971)] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[Grabinsky(1997)] G. Grabinsky. La función continua no diferenciable de Weierstrass. *Miscelánea Mat.*, (25):29–38, 1997. Dedicado a la memoria de Karl Weierstrass.

[Kac(1937)] M. Kac. Sur les polinomies de Bernstein. *Annals of Mathematics*, 8:29–38., 1937.

[Kolmogorov and Fomín(1975)] A. Kolmogorov and S. V. Fomín. *Introductory real analysis.* Dover Publications Inc., New York, 1975. Translated from the second Russian edition and edited by Richard A. Silverman, Corrected reprinting.

[O'Connor and Robertson()] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. Sergi natanovich bernstein. URL `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Bernstein_Sergi.html`.

[Pólya y Szegö(1998)] G. Pólya and G. Szegö. *Problems and theorems in analysis. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. ISBN 3-540-63640-4. Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by Dorothee Aeppli, Reprint of the 1978 English translation.

[Ross(1984)] S. Ross. *A first course in probability.* Macmillan Co., New York, second edition, 1984. ISBN 0-02-403910-1.

[Rudin(1980)] W. Rudin. *Principios de análisis matemático.* Editorial Mc Graw Hill, México, 1980. ISBN 968-6046-82-8. Traducción de Miguel Irrán Alcerreca Sánchez.