Miscelánea Matemática **65** (2018) 29-37 SMM

Un tamiz muy fino

Carlos Bosch Giral
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, Cd. de México 01080
bosch@itam.mx

1. Introducción

El teorema de Baire estudiado en los cursos de análisis matemático, es de tal profundidad que, podríamos decir que cualquier parte de las matemáticas que se relacione con él es digna de mirarse con detenimiento pues algo interesante nos va a mostrar. En este trabajo vamos a estudiar con detenimiento qué sucede con el producto de espacios de Baire, y así poder concluir que el espacio $\mathbb{R}^I$, donde I es un conjunto cualquiera, es de Baire. René Baire se interesó en este tipo de problemas desde que hizo sus primeras investigaciones y en particular en su tesis doctoral «Sur les fonctions de variables réelles» presentada en la Escuela Normal Superior, donde combina la teoría de conjuntos y el análisis para estudiar y entender mejor los espacios de funciones, define el concepto de «denso en ninguna parte».

2. Densidad y Baire

Un conjunto $A \subset B$ es denso en otro conjunto B si su cerradura es el conjunto B, es decir si todo abierto de B intersecta al conjunto A. Es claro que la unión no vacía arbitraria de conjuntos densos es también un conjunto denso. Sin embargo esto no es cierto ni siquiera para la intersección finita de conjuntos densos, ya que incluso esta puede ser vacía. En efecto, tal vez el ejemplo más simple de esta situación es el caso de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, los cuales son densos en $\mathbb{R}$ y ajenos. El teorema de Baire en análisis matemático aborda precisamente esta situación. En efecto, se tiene que la intersección de dos conjuntos densos abiertos en un espacio métrico completo es un conjunto denso. De hecho, también es el caso para intersecciones numerables.

Teorema 2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo (no vacío) y $\{U_n\}$ una familia numerable de conjuntos abiertos densos en X. Entonces la intersección de los conjuntos U_n es denso en X.*

Este teorema, que lleva el nombre de Baire, fue inicialmente probado por William Osgood en 1887 cuando $X = \mathbb{R}$. Posteriormente en 1889 René Louis Baire lo probó para $\mathbb{R}^n$.

Unos veinte años después en Topología se empiezan a usar los llamados métodos de categoría, que permitían discernir de forma provechosa entre subconjuntos «grandes» y «pequeños» de un espacio topológico. Estos métodos parecen haber tenido su origen precisamente en unos trabajos de W. Osgood de 1897.

El interés principal de Baire en esa época era el estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas, actualmente llamadas funciones de la primera clase de Baire. Es sobre estos temas que presenta el 24 de marzo de 1899 su tesis de doctorado. De ahí, se obtiene una caracterización de las propiedades de continuidad que tienen tales funciones, lo que se conoce como el Gran Teorema de Baire, y los métodos de categoría juegan un papel clave en su demostración.

Junto con Emile Borel y Henri Lebesgue, René Louis Baire (Paris 21 de Enero de 1874 – Chambéry 5 Julio de 1932) es uno de los matemáticos franceses del principio del siglo XX que con sus novedosas ideas más influyó en el desarrollo del análisis matemático. De familia modesta logra llegar a estudiar en la Escuela Normal Superior donde se distingue como un estudiante excepcional. Sin embargo después de hacer un muy buen examen escrito su timidez hace que no obtenga los resultados que él hubiera querido en el examen oral por lo cual lo destinan como maestro a un liceo (bachillerato) en Troyes y posteriormente en Bar-le-Duc al noreste de Francia en la provincia de Lorena. Lo bueno es que así obtiene ingresos fijos, lo malo es que se encuentra lejos de la actividad científica del momento y los centros de importancia. Se dedica entonces a escribir su tesis doctoral y eso le permite trasladarse a la Universidad de Montpellier. En 1907 se convierte en profesor en la Universidad de Dijon en donde enseña hasta 1914, cuando pide una licencia por enfermedad la cual dura hasta su muerte.

3. El teorema y los ejemplos

El teorema que actualmente lleva el nombre de Baire es el siguiente.

Teorema 3.1. *En un espacio métrico completo (no vacío) las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) La intersección numerable de conjuntos abiertos densos es un conjunto denso.
ii) La unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío es un conjunto con interior vacío.
iii) Si el espacio es una unión numerable de conjuntos cerrados entonces al menos uno de ellos contiene un abierto no vacío.

Rápidamente vemos que i) es equivalente a ii) usando complementos, ya que A es denso si y solo si su complemento es de interior vacío puesto que, usando la definición de densidad, pedir que cualquier abierto intersecte a A es lo mismo que decir que ningún abierto está enteramente contenido en el complemento de A. También es muy sencillo ver que iii) es equivalente a ii).

En la práctica para usar el teorema de Baire la elección de los abiertos o los cerrados requiere de cierta imaginación.

Ejemplo 3.1. *Probemos que el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, es no numerable. La demostración de este hecho se hace usando la propiedad iii) del teorema 2. Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable. Sea $\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$. Observemos que cada $\{x\}$ es cerrado. Como el interior de $\{x\}$ es vacío y estamos suponiendo que $\mathbb{R}$ es numerable, tenemos a $\mathbb{R}$ expresado como una unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío y como $\mathbb{R}$ es métrico completo podemos usar el inciso ii) del teorema 2 para concluir que $\mathbb{R}$ tiene interior vacío lo cual es absurdo. Con esto probamos entonces que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable.*

Algo análogo se puede argumentar para ver que $\mathbb{R}^2$ no es la unión numerable de rectas o de circunferencias o de parábolas, etc.

También se puede demostrar este hecho usando el inciso iii) del teorema 2 de la siguiente manera. Nuevamente supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable y que $\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$. Tenemos ahora que como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo y cada $\{x\}$ es un conjunto cerrado, al aplicar el teorema 2 inciso iii) podemos concluir que algún $\{x\}$ contiene un abierto no vacío lo cual es absurdo y entonces podemos concluir que $\mathbb{R}$ es no numerable.

Ejemplo 3.2. *Probemos que un espacio de Banach es de dimensión finita o bien no numerable. De este hecho se puede concluir que un espacio vectorial normado con una base numerable (infinita) no puede ser completo, este es el caso por ejemplo del espacio de polinomios.*

Hagamos la prueba de esta propiedad para lo cual vamos a suponer que el espacio de Banach $(E, \| \|)$ es de dimensión infinita. Consideremos los subespacios E_n generados por los primeros vectores de la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es decir que $\mathrm{E}_n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$. Los espacios E_n son de dimensión finita y por lo tanto son completos así que cada E_n es cerrado. Además E_n es de interior vacío ya que si no fuese así, habría un abierto de E contenido en E_n y por lo tanto una bola del tipo $x \in E$ tal que $\|x - a\| < r$ que al ser E_n un espacio vectorial, cualquier múltiplo de esa bola estaría en E_n y por lo tanto E sería igual a E_n lo cual no es posible. En resumen tenemos que E, espacio de Banach, es la unión numerable de los espacios E_n, que son cerrados y de interior vacío así que por el teorema 2 inciso iii) concluimos que E es de interior vacío lo cual es absurdo. Entonces tenemos que nuestra suposición es falsa y por tanto un espacio de Banach es de dimensión finita o bien no numerable.

S. Banach (1882-1945) observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire, no solo es cierto en $\mathbb{R}^n$ sino también, usando la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico localmente compacto, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como Teorema de Baire.

4. La demostración general

Vamos a demostrar un teorema un poco más general que el enunciado en la sección anterior por lo cual empezaremos con algunas observaciones.

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A es **denso en ninguna** parte si el interior de su cerradura es vacío. Por ejemplo, los racionales como subconjunto de los números reales no tienen esa propiedad. El espacio X es un **espacio de Baire** si todo conjunto que sea unión numerable de densos en ninguna parte resulta tener interior vacío.

Estamos listos para enunciar el teorema de Baire.

Teorema 4.1. *En un espacio topológico X son equivalentes:*

i) X es de Baire.
ii) La intersección numerable de conjuntos abiertos densos es un conjunto denso.
iii) La unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío es un conjunto con interior vacío.

Por completez haremos aquí esta prueba, a pesar de que se puede encontrar en cualquier libro de análisis matemático.

Demostración. Veamos primero que i) implica ii). Para esto, sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos densos y abiertos en X, y sea $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Para cualquier n en $\mathbb{N}$ sea $F_n = X \setminus A_n$. Como A_n es abierto y denso tenemos que

$$\operatorname{int}(F_n) = \operatorname{int}(\overline{F_n}) = \operatorname{int}(\overline{X - A_n}) = \varnothing,$$

así que F_n es denso en ninguna parte. Ahora consideremos

$$X \setminus A = X \setminus (\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(F_n),$$

es decir que es la unión numerable de densos en ninguna parte y por ser X de Baire entonces esa unión es de interior vacío y por lo tanto A resulta ser denso.

Para verificar que ii) implica iii) basta usar cuidadosamente complementos. Finalmente veamos que iii) implica i). Para esto tomemos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos densos en ninguna parte y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Como para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathrm{int}(\overline{A_n}) = \varnothing$ y $A \subset \cup_{n\in N}(\overline{A_n})$, entonces por la propiedad iii) tenemos que

$$\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(\cup_{n\in N}(\overline{A_n})) = \varnothing$$

de donde $\mathrm{int}(A) = \varnothing$ por lo tanto el espacio X es de Baire. $\square$

La propiedad de ser de Baire se hereda a conjuntos abiertos pero no nos vamos a ocupar de este hecho aquí. Nosotros nos vamos a orientar hacia el producto de espacios de Baire.

5. El producto cartesiano de espacios de Baire

Tal vez una de las preguntas más profundas sobre los espacios de Baire es saber si el producto de espacios de Baire es un espacio de Baire. Hay múltiples artículos al respecto pero aquí solamente daremos una visión general de la situación para explicar en la siguiente sección un caso sencillo donde el producto de espacios de Baire resulta ser de Baire. Fue Oxtoby, J. C. en [3] uno de los primeros que trató de dar una respuesta general a la pregunta sobre el producto de espacios de Baire. En su artículo define el concepto de pseudo-base: En un espacio topológico X, una familia B de conjuntos abiertos no vacíos es una pseudo-base (a veces $\pi-$base) si todo abierto no vacío de X contiene al menos un elemento de B. La pseudo-base es localmente numerable (numerable sobre sí misma) si cada subconjunto de B tiene a lo más un número numerable de subconjuntos de B. Con estas definiciones prueba que si X_1 y X_2 son espacios de Baire y al menos uno de ellos tiene una pseudo-base localmente numerable entonces el producto de X_1 y X_2 es de Baire. Además en la seccion 4 de su artículo prueba que existe un espacio de Baire cuyo producto consigo mismo **no** es de Baire, para lo cual usa la Hipótesis del Continuo. Pocos años después Paul Cohen en [2] prueba, sin usar la Hipótesis del Continuo, la misma propiedad, el problema es que lo hace usando una técnica especial de la teoría de conjuntos que es conocida como «forcing», incomprensible para este autor.

Otra de las investigaciones clave en este problema es el artículo de Zsilinszky, L. [4] en donde se enfoca en ver cuándo se preserva que el producto de espacios de Baire sea de Baire. Separa el caso en que la topología del producto sea la topología caja, producto de abiertos de cada espacio, o bien el caso en que la topología del producto esté dada por el producto de un número finito de subconjuntos propios abiertos y el resto el espacio completo. El problema de saber en qué caso un producto de espacios de Baire es un espacio de Baire es un problema complicado que todavía no tiene una respuesta completa salvo en casos específicos. Me siento orgulloso de ver que en un tema tan complicado y con tanta historia como este hay varios colegas en México que han trabajado en él o en temas muy relacionados. Aquí solamente citaré a algunos de ellos como por ejemplo García Maynez, García Ferreira, Tkachuk, Dorantes-Aldama, Rojas-Hernández, Tamariz, Pichardo-Mendoza, Tkachenko, etc.

En el artículo de Zsilinszky citado arriba, se explica claramente la situación de los productos de espacios y cual es el estatus del producto de espacios de Baire así como en qué se esta trabajando en este tema.

Nosotros presentaremos el caso de los espacios tamizables que introdujo Gustave Choquet en [1] en donde presenta una clase de espacios de Baire, los tamizables que tienen la propiedad de ser estables bajo el producto de espacios.

6. Espacios «tamizables»

Aquí definiremos una clase de espacios de Baire que resulta ser invariante bajo productos y veremos las propiedades básicas de este tipo de espacios. Como ya lo indicamos fue G. Choquet el que introdujo este tipo de espacios. Las demostraciones son sencillas pero a pesar de eso las vamos a escribir con detalle.

Definición 6.1. Sea E un espacio topológico. Un tamiz en E es una relación binaria (denotada por $\sqsubset$) en el conjunto de los abiertos no vacíos de E, tal que cumple:

a) $A \sqsubset B \Longrightarrow A \subset B$.
b) $A \sqsubset B \subset C \Longrightarrow A \sqsubset C$.
c) Para todo conjunto abierto $B \neq \emptyset$, existe un abierto A tal que $A \sqsubset B$.
d) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de abiertos tal que $\cdots \sqsubset A_{n+1} \sqsubset A_n \sqsubset \cdots \sqsubset A_1$ entonces se tiene que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Definición 6.2. Un espacio topológico E es tamizable si admite un tamiz.

Teorema 6.1. *Si X es tamizable entonces X es de Baire.*

Demostración. Usaremos el teorema 4.1, sea $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos abiertos densos en X, demostraremos que la intersección es densa en X. Sea V un abierto de X. Como D_1 es un abierto denso entonces $D_1 \cap V$ es un conjunto abierto no vacío. Por ser X tamizable existe V_1 abierto en X tal que $V_1 \sqsubset D_1 \cap V$ y por a) $V_1 \subset D_1$ y $V_1 \subset V$. Como D_2 es abierto denso $D_2 \cap V_1$ es un conjunto abierto no vacío. Nuevamente por ser X tamizable existe V_2 abierto en X tal que $V_2 \sqsubset D_2 \cap V_1$ y por a) $V_2 \subset D_2$ y $V_2 \sqsubset V_1$ ya que $V_2 \sqsubset D_2 \cap V_1 \subset V_1$. Podemos entonces construir inductivamente una familia $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos tal que $V_n \subset D_n$ y $V_n \sqsubset V_{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además $V_n \subset V_{n-1} \subset \cdots \subset V$ para toda n en $\mathbb{N}$. De donde tenemos que $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset V$ y como tenemos un tamiz se obtiene $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ por lo tanto podemos concluir que $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \cap V \neq \emptyset$ así $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ resulta ser denso y entonces X es un espacio de Baire. $\square$

Teorema 6.2. *Sea X un espacio topológico.*

a) Si X es localmente compacto entonces X es tamizable.
b) Si X es métrico completo entonces X es tamizable.

En ambos casos se tiene entonces que X es de Baire.

Demostración. Para probar que los espacios son tamizables basta dar una relación binaria y probar que esa relación es un tamiz.

Empecemos por a). Para U, V abiertos, definimos $U \sqsubset V$ como $\overline{U} \subset V$ y $\overline{U}$ compacto. Las primeras tres propiedades son evidentes así que para probar que $\sqsubset$ es un tamiz veamos que la propiedad de la intersección se cumple. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de abiertos tal que $\cdots \sqsubset U_{n+1} \sqsubset U_n \sqsubset \cdots \sqsubset U_1$ entonces $\ldots U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n \subset \overline{U_n} \cdots \subset \overline{U_2} \subset U_1$. Es claro que $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ así que vamos a probar que $\{\overline{U_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea J un subconjunto de $\mathbb{N}$ finito, se tiene que $\cap_{j\in J} \overline{U_i} = \overline{U_k}$, donde $k = \max\{j : j \in J\}$ así que la familia $\{\overline{U_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, y como $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subset \overline{U_2}$ que es compacto podemos afirmar que $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \neq \emptyset$ y por lo tanto $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$, y entonces $\sqsubset$ es un tamiz.

Veamos ahora el caso b). Si U, V son abierto y definimos $U \sqsubset V$ como $\overline{U} \subset V$ y $\operatorname{diam}(U) \leq \min\{1, \frac{\operatorname{diam}(V)}{2}\}$. Nuevamente las primeras tres propiedades son evidentes así que para probar que $\sqsubset$ es un tamiz veamos que la propiedad de la intersección se cumple. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de abiertos tal que $\cdots \sqsubset U_{n+1} \sqsubset U_n \sqsubset \cdots \sqsubset U_1$ tenemos que probar que $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Para esto tomemos $x_n \in \overline{U_n}$ y denotemos por $d_n = \operatorname{diam} U_n$. Como $d_2 \leq \frac{1}{2}$ y $d_i \leq \min\{1, \frac{d_{i-1}}{2}\}$ entonces $d_i \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ y $d_i \to 0$. Veamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Si tomamos

$p \leq q$ se tiene que $\overline{U_q} \subset \overline{U_p}$ y por lo tanto $x_p, x_q \in \overline{U_q}$ de donde $d(x_p, x_q) < \frac{1}{2^{p-1}}$ donde d denota la métrica del espacio X. Así que $\{x_n\}$ es de Cauchy y por ser completo el espacio obtenemos que $x_n \to x$ con $x \in X$. Además $x \in \overline{U_n}$ para toda n en $\mathbb{N}$ por lo que se puede concluir que $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{U_n} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ así que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{U_n} \neq \emptyset$. Entonces $\sqsubset$ es un tamiz. $\square$

7. Finalmente el producto

Teorema 7.1. *Sea $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Supongamos que $\sqsubset_i$ es un tamiz en E_i, entonces el producto $\Pi_{i\in I}E_i$ es tamizable.*

Demostración. Demos un tamiz para el producto. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos en el producto, es decir que $\Omega_1 = \Pi_{i\in J_1}V_{1,i}\ \Pi_{j\in I\setminus J_1}E_j$, y análogamente $\Omega_2 = \Pi_{i\in J_2}V_{2,i}\ \Pi_{j\in I\setminus J_2}E_j$ donde $J_1, J_2 \subset I$, son conjuntos finitos y $V_{k,j} \in \tau_j$ para toda $k \in \{1, 2\}$, $j \in J_1 \cup J_2$. Definimos en la topología producto la relación:

$$\Omega_1 \sqsubset \Omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} J_2 \subset J_1 \\ V_{1,i} \sqsubset_i V_{2,i}, \quad \forall i \in J_2 \\ V_{1,i} \sqsubset_i E_i \quad \forall i \in J_1 \setminus J_2 \end{cases}$$

Veamos ahora que en efecto la relación que acabamos de definir es un tamiz. Esta vez solamente probaremos la propiedad b). Sean Ω_1, Ω_2 y Ω_3 abiertos en el producto tales que $\Omega_1 \sqsubset \Omega_2 \subset \Omega_3$, entonces $J_3 \subset J_2 \subset J_1$. Sea $i \in J_3 \subset J_2$ entonces se cumple $V_{1,i} \sqsubset_i V_{2,i} \subset V_{3,i}$ por la propiedad b) del tamiz $\sqsubset_i$ tenemos que $V_{1,i} \sqsubset_i V_{3,i}$. Tomemos ahora $i \in J_1 \setminus J_3$. Si $i \in J_2$, se tiene que $V_{1,i} \sqsubset_i V_{2,i} \subset E_i$ y por lo tanto $V_{1,i} \sqsubset_i E_i$, ahora si $i \in J_1 \setminus J_2$ se tiene que $V_{1,i} \sqsubset_i E_i$, de manera que en ambos casos se tiene que $V_{1,i} \sqsubset_i E_i$ por lo tanto $\Omega_1 \sqsubset \Omega_3$. $\square$

Corolario 7.1. $\mathbb{R}^I$ *donde I es cualquier conjunto resulta ser un espacio tamizable y por lo tanto de Baire.*

Observemos que los ejemplos de espacios que tienen la propiedad de que su producto no sea de Baire son espacios que no son tamizables. Sin embargo no se sabe si la clase de espacios tamizables es la clase más grande de espacios de Baire con la propiedad de que el producto de dos espacios de esa clase sea un espacio de Baire, no obligatoriamente de esa clase. Terminaremos diciendo que después de más de un siglo sigue habiendo problemas fascinantes de espacios de Baire así como en la mayoría de las matemáticas.

Bibliografía

[1] G. Choquet, «Une classe régulière d'espaces de Baire. C. R.», *Acad. Sci. Paris*, vol. 246, 1958, 218–220.

[2] P. Cohen, «Products of Baire spaces», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, núm. 1, 1976, 119–124.

[3] J. C. Oxtoby, «en Cartesian products of Baire spaces», *Fund. Math.*, vol. 49, 1960/1961, 157–166.

[4] L. Zsilinszky, «Products of Baire spaces revisited», *Fund Math.*, vol. 183, núm. 2, 2004, 115–121.