

Conjuntos espectaculares del plano y el espacio

Alejandro Illanes

IM - UNAM

illanes@matem.unam.mx

Resumen

En este artículo hablaremos de algunos subconjuntos especiales del plano y el espacio. Muchos de los conjuntos que mostraremos aquí han sido construidos para resolver alguna cuestión y algunos de ellos son altamente contraintuitivos.

Este artículo pretende ser un escaparate de subconjuntos del plano \mathbb{R}^2 y el espacio \mathbb{R}^3 , que tienen alguna propiedad especial que los hace diferentes y, en algunos casos, espectaculares.

Para captar el sabor de muchas cosas que se dicen aquí bastará que el lector esté familiarizado con conceptos de topología de los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Como es costumbre, a los espacios \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , etc. les llamaremos *espacios euclidianos*. En principio, bastaría con que conociera lo que son los abiertos, cerrados, conexos, interiores, cerraduras y funciones continuas. Por supuesto, alguien que haya estudiado topología podrá apreciar más las propiedades, sutilezas y dificultades que presentan estos conjuntos. Esperamos que hasta la mayoría de los topólogos encuentren algo nuevo en este catálogo.

Como se ve, nuestro plan es ambicioso, pretendemos poner a la vista de un público amplio de matemáticos y estudiantes de matemáticas este conjunto de bichos raros, por lo mismo no podemos detenernos mucho en cada uno de ellos y apenas ofreceremos algunas pinceladas de formalidad.

En topología decimos que dos objetos (subconjuntos de un espacio euclidiano) A y B son *equivalentes* si existe una biyección entre A y B que es continua y cuya inversa es continua. A estas funciones les llamamos *homeomorfismos*. En términos intuitivos, dos objetos son equivalentes si uno de ellos puede ser deformado en el otro, como si estuvieran contruidos con hule, sin romper, ni pegar nada.

A los subconjuntos de los espacios euclidianos que son cerrados, conexos y tienen más de un punto, les llamamos *continuos*. Muchos de los comentarios históricos que incluimos fueron tomados del magnífico artículo sobre la historia de la Teoría de los Continuos escrito por J.J. Charatonik [5].

Arcos

Por muchos motivos, el intervalo $[0, 1]$ es el continuo más simple que se puede construir. Diremos que un *arco* es cualquier subconjunto A de algún espacio euclideo que es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

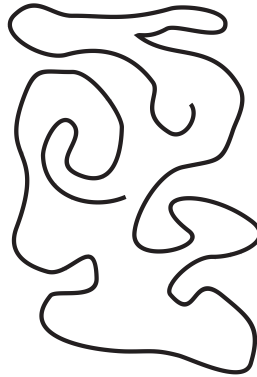


Figura 1. Arco.

En la figura 1 hemos puesto un intervalo un poco complicado, y a pesar de que podríamos hacer dibujos todavía más elaborados, parecería que no hay nada de espectacular en un arco. Efectivamente, no se puede hacer mucho más con un arco en el plano.

Lo que destacaremos aquí es que en \mathbb{R}^3 sí se pueden construir arcos con propiedades topológicas sobresalientes.

Un continuo homeomorfo a una circunferencia (digamos la circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 , centrada en el origen) es llamada por los topólogos «*curva cerrada simple*». Como para esta exposición no tenemos necesidad de usar este nombre largo, a un continuo homeomorfo a una circunferencia, le llamaremos simplemente un *aro*.

Uno podría imaginarse que si se toma un pequeño aro rodeando un arco, entonces podemos mover el aro hasta que deje de rodear al arco. Observemos la figura 2. Si vamos recorriendo el pequeño aro dibujado en el lado derecho, podemos zafarlo del arco y hasta alejarlo de él.

Pero, ¿qué le parece el arco representado en la figura 3? Este arco se construye anudándolo una y otra vez, con una infinidad de nudos que convergen a dos puntos finales. Ahora imaginemos que tomamos

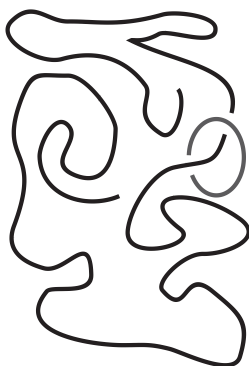


Figura 2. Arco con aro.

un pequeño aro rodeando al arco, digamos que lo situamos cerca de la parte central de él. La propiedad que se tiene ahora es que dicho aro no se puede zafar del arco.



Figura 3. Arco anudado.

Esto muestra que aunque un arco sigue siendo un continuo muy simple, es posible encontrar arcos en \mathbb{R}^3 cuyo complemento tiene propiedades complicadas. Aunque no lo definamos formalmente, en el complemento (en \mathbb{R}^3) del arco de la figura 3, podemos distinguir dos clases de aros, los que rodean al arco y los que no. Un buen ejercicio de imaginación, para entrar en calor, es el de imaginarse un arco en \mathbb{R}^3 cuyo complemento tenga una cantidad infinita de clases de aros.

Circunferencia

Los aros son otros conjuntos que parecen inofensivos a primera vista. En realidad no lo son pues, al igual que a un arco, podemos anudarlos muchas veces en \mathbb{R}^3 . El teorema de Jordan-Schoenflies [21], sin embargo, dice que si tomamos un aro S de \mathbb{R}^2 , entonces S se puede domar. Esto quiere decir que no importa que tan complicado sea S , existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que transforma a S en la circunferencia unitaria.

Este teorema no se generaliza a \mathbb{R}^3 , pues una curva S que forme nudos no se puede domar en \mathbb{R}^3 .

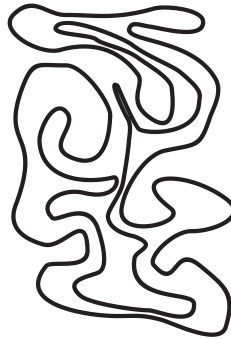


Figura 4. Aro.

Esfera

Podríamos pensar que la cuestión de domar aros en \mathbb{R}^3 es un problema mal planteado, pues tal vez sería más apropiado trabajar con esferas que con aros en el espacio \mathbb{R}^3 . Entonces cabría conjeturar que un subespacio T de \mathbb{R}^3 tal que T es homeomorfo a una esfera se puede domar en \mathbb{R}^3 . En la siguiente figura se muestra que esto no siempre es posible. Observemos que el conjunto T es homeomorfo a la esfera, que tiene un número infinito de nudos y se puede probar que no existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que lleve a T en una esfera.

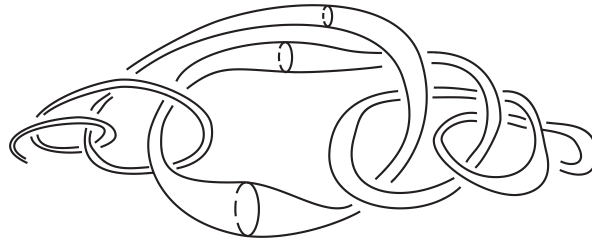


Figura 5. Esfera anudada.

El lector interesado puede echarle un ojo al capítulo 4 del libro [7], en donde se discuten más ampliamente estos y otros ejemplos. Además se incluye un buen dibujo de la famosa *Esfera cornuda de Alexandroff* [7, p. 176].

Gráficas finitas

El Teorema de Jordan-Schoenflies tiene muchas aplicaciones interesantes. Con él se pueden probar hechos que todos podemos intuir después de un rato.

Una de estas aplicaciones consiste en lo siguiente. Tomemos los cinco vértices de un pentágono regular en el plano. Unamos estos puntos por arcos, todos con todos, de manera que si dos arcos se intersectan, entonces lo hacen en un punto que es extremo de ambos. Por supuesto que lo que estamos tratando de construir es lo que se llama la *gráfica completa* K_5 . Si usted nunca ha tratado de dibujarla, inténtelo y después de un rato seguramente se dará cuenta de que esta gráfica no se puede construir en el plano. Hay que dibujar 10 arcos. No hay problema en dibujar 9 de ellos en el plano, pero el décimo es imposible. En la figura 6 pusimos una manera de dibujar los 10 arcos, el décimo lo pusimos pasando por abajo de otro, para completar la figura, claramente, esto se puede construir en \mathbb{R}^3 . La demostración formal de que no es posible construir esta gráfica en el plano pasa por el teorema de Jordan-Schoenflies [21].

Ya que estamos en éstas, otra gráfica que no se puede construir en el plano es la gráfica $K_{3,3}$. Ésta se forma tomando dos conjuntos de tres puntos: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ en el plano. La gráfica consiste en unir cada elemento de A con cada elemento de B , para tal efecto, se usan 9 arcos y la regla de intersección es la misma, es decir, si dos arcos se intersectan, entonces lo hacen en un punto que es extremo de ambos. Como en K_5 , es fácil trazar 8 de los arcos necesarios en el plano, pero es imposible trazar el noveno también en el plano. Esto se ilustra en la segunda parte de la figura 6.

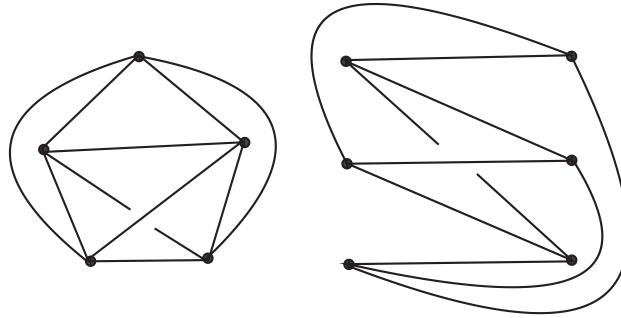


Figura 6. K_5 y $K_{3,3}$.

En la figura 7, hay otras dos ilustraciones de las dos gráficas. Las incluimos sólo para ponerlas en una forma más simétrica. Ya dijimos que no se pueden construir en el plano, pero poniendo algunos arcos detrás de otros, es posible construirlos en \mathbb{R}^3 de tal manera que, desde arriba se vean como en la figura.

En Teoría de Continuos una *gráfica finita* es un continuo que es una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito.

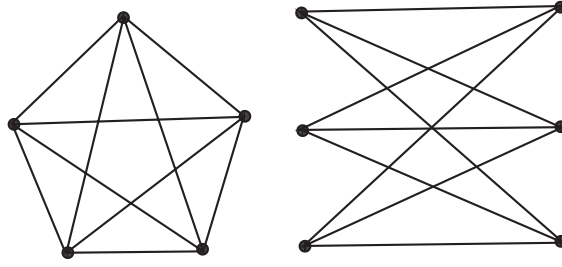


Figura 7. K_5 y $K_{3,3}$.

Un hecho sobresaliente sobre las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ fue descubierto por K. Kuratowski. Este investigador probó en [15] que una gráfica finita se puede construir en el plano si y sólo si no contiene copias homeomorfas de K_5 ni de $K_{3,3}$.

Un buen ejercicio es mostrar cuál de las dos gráficas K_5 o $K_{3,3}$ se puede meter en la gráfica de la figura 8. La gráfica de la figura 8 es una representación de una gráfica en \mathbb{R}^3 , los segmentos no se deben cruzar, donde se ve un cruce, en realidad tenemos que poner un arco por detrás de otro.

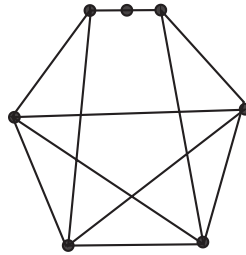


Figura 8. Gráfica de ejercicio.

Triángulo de Sierpiński

A finales del siglo XIX los matemáticos buscaban una buena definición de curva. La primera y más natural idea fue definir curvas como las imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$. Esta idea fue echada a perder por G. Peano quien en 1890 mostró que existe una función continua y suprayectiva $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Por tanto $[0, 1]^2$ es una imagen continua y suprayectiva de $[0, 1]$ (ver [7, Theo. 3.30]).

Usando la función f uno puede definir la función $g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$ por $f(s, t) = (s, f(t))$ y con esto obtener una función continua y suprayectiva. De modo que $g \circ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$ es continua y suprayectiva.

Por tanto también $[0, 1]^3$ es imagen continua de $[0, 1]$. En forma similar es posible ver que $[0, 1]^4, [0, 1]^5, \dots$ son imágenes continuas de $[0, 1]$. También se sabe que todos los continuos localmente conexos son imágenes continuas de $[0, 1]$ [7, Theo. 3.30].

Esto ya era demasiado, nadie quería que las curvas incluyeran a todos estos espacios. De manera que se buscó otra definición mejor.

Otra definición más aceptable es que una curva es un continuo en \mathbb{R}^2 que es imagen continua de $[0, 1]$ y que tiene interior vacío en \mathbb{R}^2 (esto último es lo mismo que pedir que no contenga ningún disco). Al estudiar los alcances de esta definición, a W. Sierpiński se le ocurrió estudiar, en 1915, el siguiente continuo, que encaja en esta definición de curva (es fácil ver que es un continuo localmente conexo).

Este continuo se llama el *triángulo de Sierpiński*. Sierpiński mismo mencionó que la idea de esta construcción fue de S. Mazurkiewicz.

Se construye empezando con un triángulo equilátero relleno T_1 . Tomando los puntos medios de los lados, se divide T_1 en cuatro triángulos equiláteros y se borra la parte interior del de en medio. Obteniendo de esta manera un continuo T_2 que es la unión de los tres triángulos restantes.

A cada uno de los tres triángulos que constituyen T_2 se les hace la misma operación, es decir, se dividen en cuatro pequeños triángulos y se les borra el de en medio, quedando así un continuo T_3 que es unión de nueve triángulos equiláteros pequeños.

Se hace la misma operación a los nueve triángulos pequeños que forman a T_3 , obteniendo un continuo T_4 .

Se continúa esta operación una cantidad (infinita) numerable de veces obteniendo los continuos T_1, T_2, \dots . Al final el triángulo de Sierpiński X es lo que queda de haber quitado todos los pequeños triángulos. O dicho de otra manera, el continuo X se define como

$$X = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap \dots$$

Con su triángulo, Sierpiński mostró la complejidad que podrían tener las curvas. Una propiedad importante de este triángulo es que todos sus puntos resultan de ramificación. Este triángulo cobró mayor notoriedad cuando se estudiaron los fractales y los sistemas dinámicos. De hecho hay varias maneras de definirlo usando sistemas dinámicos. También se puede definir usando procesos aleatorios. Es bueno mencionar que en algunas iglesias muy antiguas de Italia, existen mosaicos que tienen alguna semejanza con los primeros pasos de la construcción de este triángulo.

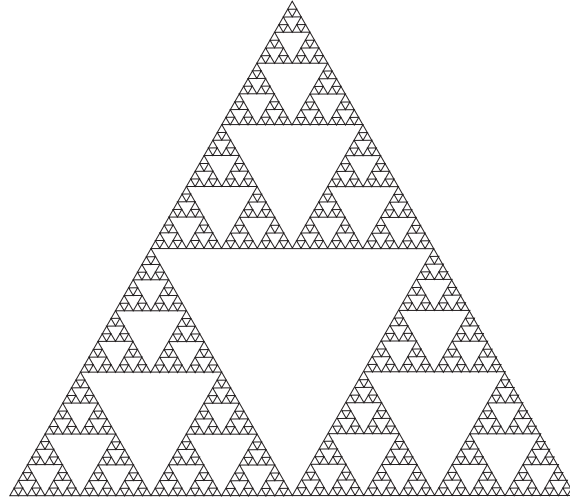


Figura 9. Triángulo de Sierpinski.

Carpeta de Sierpiński

Ya encarrerado, Sierpiński también construyó su *Carpeta de Sierpiński*, la cual ilustramos en la figura 10. La construcción es parecida pero con cuadrados en lugar de triángulos.

Se empieza con un cuadrado relleno C_1 de lado 1. Se divide a C_1 en nueve pequeños cuadrados, dividiendo los lados del cuadrado en tercios. El continuo C_2 es el resultado de omitir la parte interior del cuadradito de en medio. De manera que C_2 es la unión de 8 pequeños cuadrados de lado $\frac{1}{3}$. El continuo C_3 es el resultado de hacer la misma operación a cada uno de los 8 cuadraditos, quitándoles su cuadrado central. Siguiendo de esta manera se obtienen C_4 , C_5 , etc., y se define

$$X = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$

¿Qué hizo la carpeta de Sierpiński para merecer estar en esta lista? Para empezar, es un continuo en \mathbb{R}^2 , es imagen continua de $[0, 1]$ y no contiene a ningún disco de \mathbb{R}^2 , por lo que califica como curva. Además posee dos propiedades más espectaculares.

La primera es que todos sus puntos tienen orden infinito (de hecho, para ningún punto es posible encontrar una base de vecindades con frontera finita). El continuo de la figura 11 se llama *Abanico Armónico*, se construye tomando una sucesión de arcos convergiendo a otro (más precisamente, es la unión de los segmentos que unen a $(0, 0)$ con cada uno de los puntos $(1, 0)$ y $(1, \frac{1}{n})$, donde n varía en los enteros positivos).

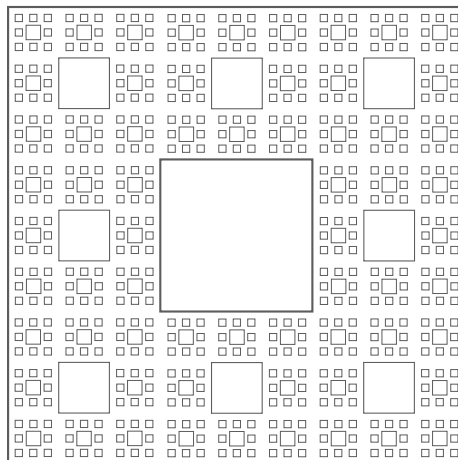


Figura 10. Carpeta de Sierpinski.

Aunque sea difícil creerlo, en cada punto p de X se puede poner una copia homeomorfa de un Abanico Armónico $E \subset X$, de tal manera que p es el punto de unión de todos los segmentos.

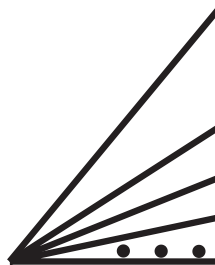


Figura 11. Abanico armónico.

La otra propiedad, todavía menos clara, es que cualquier continuo en \mathbb{R}^2 que no contenga discos se puede meter (tiene una copia homeomorfa) en la Carpeta de Sierpiński [20]. Si a usted no le impresiona esto, trate de encontrar un subcontinuo de X homeomorfo al Abanico Armónico.

La Carpeta de Sierpiński también se puede definir usando sistemas dinámicos, y alcanzó su buena dosis de popularidad cuando se hicieron famosos los conjuntos fractales.

Esponja de Menger

Después de que Sierpiński y otros dieran ejemplos interesantes que mostraron que las curvas podían ser bastantes extrañas, se decidió llamar curvas simplemente a los continuos de dimensión uno. Aquí es pertinente mencionar que un continuo tiene *dimensión uno* si posee una base

de abiertos, tales que para cada uno de esos abiertos los únicos conexos de su frontera son los conjuntos de un solo punto. En el plano \mathbb{R}^2 un continuo tiene dimensión uno si y solo si tiene interior vacío.

Esto dio lugar a dos cambios importantes. Primero, ya no se pidió que una curva sea la imagen continua de $[0, 1]$; y segundo, ya no se pidió que una curva fuera un continuo en el plano. Por ejemplo, el abanico armónico (figura 11) tiene dimensión uno y no es imagen continua de $[0, 1]$. Por otra parte, las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ son continuos de dimensión uno que no se pueden encajar en el plano.

Esta definición dio cupo a continuos todavía más extraños. Veamos uno de ellos.

Hagamos una construcción similar a la Carpeta de Sierpiński en \mathbb{R}^3 . Empecemos con el cubo unitario $E_1 = [0, 1]^3$. Se subdivide marcando las terceras partes de los lados, de manera que la subdivisión nos da 27 pequeños cubos, como en el cubo de Rubik. Se le quitan los interiores de los seis cubos centrales de las caras y el cubo que ocupa el centro. Esto nos deja 20 pequeños cubos, vea la figura 12. Le llamamos E_2 a la unión de estos 20 cubitos. Se repite el proceso con cada uno de estos cubitos para obtener un continuo E_3 que es la unión de 400 pequeños cubos cuyo lado mide $\frac{1}{9}$. Se continúa el proceso, perforando cada uno de los cubitos que nos quedan para obtener E_4, E_5 , etc. Finalmente, se define

$$M = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots .$$

A este continuo se le conoce como *Esponja (o Queso) de Menger*.

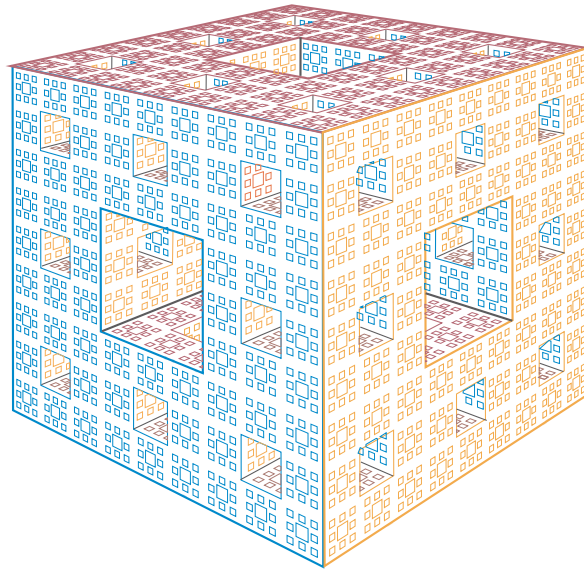


Figura 12. Esponja de Menger.

Después de haber visto la Carpeta de Sierpiński, tal vez no se sorprenda si le digo que cualquier continuo de dimensión uno se puede encajar en la Esponja de Menger. Tal vez tampoco le parezca una cualidad muy importante que esta esponja es un continuo de dimensión uno y que es imagen continua de $[0, 1]$ (esto último se debe a que es un continuo localmente conexo, lo cual es fácil de probar) aunque si intenta probar lo de la dimensión, verá que tiene su chiste. Pero le voy a platicar otra propiedad todavía más sorprendente.

Para hacer esto necesitamos otra definición. Se dice que un continuo X es *homogéneo*, si para cualquier par de puntos $p, q \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(p) = q$. Como los homeomorfismos preservan todas las propiedades topológicas, la idea intuitiva de la homogeneidad es que el continuo tiene el mismo aspecto cuando se observa desde cualquiera de sus puntos.

Es fácil observar que una circunferencia, una esfera y un toro son continuos homogéneos y que el intervalo $[0, 1]$ no lo es, pues no existe un homeomorfismo de $[0, 1]$ que envíe el 0 al $\frac{1}{2}$, esto se debe a que $[0, 1] - \{0\}$ es conexo y que $[0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$ no lo es.

Con herramientas un poco más avanzadas de Topología se puede mostrar que $[0, 1]^2$ tampoco es homogéneo, pues los puntos del interior lo agujeran mientras que los de la orilla no lo hacen. Se puede probar que en la Carpeta de Sierpiński, los puntos que pertenecen a la frontera de alguno de los cuadrados no se pueden intercambiar con homeomorfismos con los demás, por lo que la carpeta no es homogénea [13].

Uno podría esperar que la esponja tampoco sea homogénea pues tiene unos puntos en las paredes y otros internos. Por esto resultó sorprendente que R. D. Anderson probara en 1958 que la esponja sí es homogénea [1].

Lagos de Wada

A principios del siglo XX, A. Schoenflies, afirmó que no existen tres subconjuntos abiertos y conexos en el plano que tengan exactamente la misma frontera. Schoenflies era un topólogo destacado, pero en esta ocasión su intuición le falló. No hay que culparlo mucho, si uno no tiene mucha experiencia con los continuos y le dijeran que la afirmación de Schoenflies es un teorema, no sería difícil creerlo, pues para contradecirlo se tiene que hacer una construcción ingeniosa que no salta a la vista fácilmente. En 1910, L.E.J. Brouwer mostró que Schoenflies estaba equivocado. Veamos un ejemplo diferente del de Brouwer que se construye con unos conjuntos llamados *Lagos de Wada*.

Vamos a construir tres abiertos conexos B , R y V del plano que tendrán por frontera común a un continuo que llamaremos X .

Para hacerlo, pensemos a $[0, 1]^2$ como una isla tal que el agua de su complemento es de color blanco (B). Supongamos que dentro de la isla hay dos lagos, uno con agua roja (R) y otro con agua verde (V) (ver figura 13).

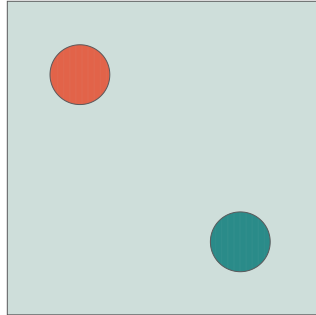


Figura 13. Lagos de Wada 1.

El primer paso consiste en cavar un canal, desde la orilla, para que entre el agua blanca a la isla y que tenga la propiedad de que todo punto de tierra firme diste de algún punto de agua blanca en menos que $\frac{1}{2}$ (como en la figura 14).



Figura 14. Lagos de Wada 2.

El segundo paso consiste en extender el lago verde, cavando un canal, de tal forma que todo punto de lo que resta de tierra firme se aleje de algún punto de agua verde en menos que $\frac{1}{3}$ (como en la figura 15).

El tercer paso consiste en extender el lago rojo, cavando un canal de tal forma que todo punto de lo que resta de tierra firme se separe de algún punto de agua roja en menos que $\frac{1}{4}$.

El cuarto paso consiste en extender el canal de agua blanca, continuando el canal del primer paso, de tal forma que ahora todo punto



Figura 15. Lagos de Wada 3.

de lo que resta de tierra firme diste de algún punto de agua blanca en menos que $\frac{1}{5}$.

Este proceso continúa, inductivamente, hasta completar una cantidad numerable infinita de pasos, en cada paso se alarga alguno de los tres canales de manera que los puntos de lo que resta de tierra firme se alejen de algún punto del agua correspondiente cada vez menos. Notemos que cada paso se puede hacer de manera que lo que resta de tierra firme es homeomorfo a $[0, 1]^2$. Llamemos X_n a lo que queda de tierra firme después del paso n . Entonces $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$.

Definimos $X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \dots$. Resulta que X es un continuo. Sean B_0 , V_0 y R_0 las respectivas uniones de los canales de agua blanca, verde y roja. Entonces B_0 , R_0 y V_0 son abiertos conexos, ajenos dos a dos, de $[0, 1]^2$, y X es la frontera común de los tres.

Tal vez usted haya observado que se puede empezar con cuatro canales en lugar de tres. Efectivamente, con el mismo proceso, se puede construir un continuo en el plano que es frontera común de cuatro abiertos conexos. Y claro, también se puede hacer con cinco, seis o una cantidad numerable de canales.

Arcoiris de Knaster

Otro concepto importante dentro la teoría de los continuos es el de descomponibilidad. Se dice que un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$.

¡Sí!, ¡casi todos los continuos que hemos mencionado hasta ahora son descomponibles!

Decimos casi todos, porque el continuo que producen los lagos de Wada, puede ser construido de manera que sea indescomponible.

Hay otro continuo indescomponible más simple. Fue descubierto por L.E.J. Brouwer, usado por Z. Janizewski y construido de manera más simple por B. Knaster en [14, pp. 209-210], (figura 16).

Por esas cosas raras que se dan en las autorías en las matemáticas, se le asocia más regularmente el nombre de Knaster.

Para construir este continuo, tomemos el conjunto de Cantor usual C_0 contenido en el intervalo $[0, 1]$. Hacemos $C = C_0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Tomando como centro el punto $(\frac{1}{2}, 0)$, trazamos todas las semicircunferencias que pasan por alguno de los puntos de C y que están contenidas en el semiplano superior, como se muestra en la figura 16. A la unión de todas estas semicircunferencias le llamamos A_1 . El segundo paso consiste en hacer algo parecido con la segunda mitad del conjunto de Cantor, la contenida en $[\frac{2}{3}, 1] \times \{0\}$, y con semicircunferencias en el semiplano inferior. Para ser más precisos, tomamos todas las semicircunferencias, centradas en el punto $(\frac{5}{6}, 0)$, que pasan por alguno de los puntos de $C_1 = ((C \cap [\frac{2}{3}, 1]) \times \{0\})$ y que están contenidas en el semiplano inferior. A la unión de todas estas semicircunferencias le llamamos A_2 . El tercer paso consiste en hacer algo similar con la parte del conjunto de Cantor contenida en el intervalo $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ y con semicircunferencias en el semiplano inferior. A la unión de las circunferencias respectivas le llamamos A_3 . Para el cuarto paso se toma el conjunto $[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}]$, para construir A_4 . Se continúa este proceso una cantidad numerable de veces para obtener una sucesión de conjuntos A_1, A_2, \dots . Finalmente se define el arcoiris de Knaster como $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$.

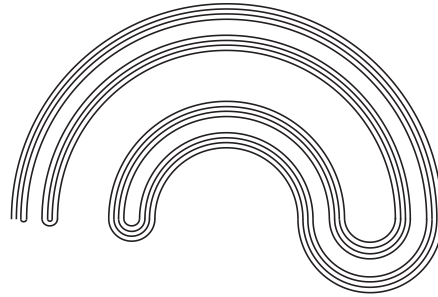


Figura 16. Arcoiris de Knaster.

Si se observa con cuidado este continuo, después de un rato se puede uno convencer de que es indescomponible, la idea básica de esto es que si tomamos un subcontinuo propio B de A , entonces B está contenido en lo que queda de darle una mordida a A , (tomar A menos un disco centrado en un punto de A). Lo que es un poco más complicado es ver que A mordido sólo tiene subcontinuos que son arcos, así que B es un arco y A no es la unión de dos arcos.

Solenoide Diádico

Como ya habíamos dicho, el arcoiris de Knaster es indescomponible. Existe otro continuo muy relacionado con el arcoiris y que también resulta indescomponible. Se construye de la siguiente manera.

Se empieza con un toro sólido T_1 , sólido quiere decir que se toma con todo su relleno, como una dona. Adentro de T_1 se construye otro toro sólido T_2 , otra dona deformada, pero que dé dos vueltas dentro de T_1 . A continuación se construye otro toro sólido T_3 , otra dona deformada, dentro de T_2 , pero que dé dos vueltas dentro de T_2 , y como resultado, da 4 vueltas dentro de T_1 . Así sigue uno construyendo toros sólidos T_4 , T_5 , etc. Al final se define

$$S_2 = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap \dots$$

A S_2 se le llama *solenoide diádico*, por lo de las dos vueltas. No tiene nada de especial lo de las dos vueltas, se podría definir algo parecido dando tres vueltas, o cuatro, o cinco, etc.

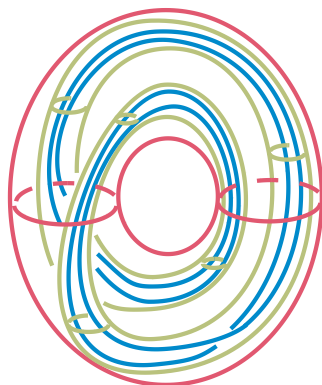


Figura 17. Solenoide.

Tal vez no parezca nada espectacular el solenoide diádico. Se puede probar sin mucho esfuerzo, que el solenoide diádico es indescomponible. Como ya habíamos construido el arcoiris que también lo es, no parece que estemos dando nada nuevo, pero tal vez lo siguiente sí parezca más interesante.

Hay una manera de definir al solenoide con la que se ve que es un grupo topológico [17, Ejercicio 2.16]. Esto quiere decir que se le puede dar una operación de grupo que resulta continua (de $S_2 \times S_2$ en S_2) y que la función tomar el inverso del grupo y que va de S_2 en S_2 también es continua. De manera que las traslaciones (usando la operación del grupo) son homeomorfismos, lo que hace que S_2 también sea homogéneo. Además, otra cualidad que tiene es que si definimos la relación que a

cada elemento de S_2 se le identifica con su inverso, entonces el espacio cociente de S_2 tomando esta equivalencia da como resultado un espacio homeomorfo al arcoiris de Knaster.

El monstruo sagrado de los continuos, el Seudoarco

Cuando Knaster estudió el arcoiris, surgió la pregunta de si era posible construir un continuo X que no sólo sea indescomponible, sino también hereditariamente indescomponible, esto quiere decir que no sólo X sea indescomponible, sino que todos sus subcontinuos sean indescomponibles. Por supuesto que el arcoiris no califica, pues sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y los arcos son descomponibles. Investigar esta pregunta fue el tema de tesis de doctorado de Knaster. Finalmente pudo producir tal fenómeno, en el plano.

Resultó que tuvo que construir un continuo bastante complicado. Su tesis constó de 40 páginas dedicadas a construir el monstruo y probar que era hereditariamente indescomponible. Fue un reto interesante, le sirvió a Knaster para doctorarse, pero los topólogos interesados en estos temas lo vieron como una curiosidad digna de construirse y tenerla en la vitrina de los ejemplos raros. La tesis de Knaster fue publicada en 1922, en la revista *Fundamenta Mathematicae* [12].

En 1920, en el primer volumen de *Fundamenta*, B. Knaster y K. Kuratowski hicieron una pregunta muy natural. ¿Es la circunferencia el único continuo homogéneo del plano?

En 1924, S. Mazurkiewicz mostró que la circunferencia es el único continuo homogéneo localmente conexo. En 1937, Z. Waraszkiewicz, en un momento de ofuscación, soñó que resolvía esta pregunta, escribió un artículo probando que esta pregunta tiene una respuesta positiva, es decir, que la circunferencia es el único, fue tan bueno su sueño que consiguió engañar a un árbitro de los *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris* que le publicó su artículo. No sólo engañó al árbitro sino que, entre otros, también engañó a G. Choquet, quien basándose en el resultado de Waraszkiewicz publicó un artículo en los *Comptes*, clasificando a todos los compactos homogéneos del plano. Según esta clasificación falsa, los compactos homogéneos son: (a) los conjuntos finitos, (b) la circunferencia, (c) el conjunto de Cantor, (d) una unión finita y ajena de circunferencias, y (e) el producto cartesiano del conjunto de Cantor con la circunferencia. Algo rescatable tuvo el trabajo de Waraszkiewicz, en realidad probó que la circunferencia es el único continuo homogéneo que cumple algunas condiciones extra, no las detallaremos pues queremos caminar por otro sendero.

En 1921, S. Mazurkiewicz se preguntó si el intervalo $[0, 1]$ es el único continuo *hereditariamente equivalente*. Esto quiere decir: ¿es $[0, 1]$ el único continuo X tal que todos los subcontinuos no degenerados de X son homeomorfos a X ? Es claro que $[0, 1]$ es hereditariamente equivalente, pues sus subcontinuos no degenerados también son intervalos cerrados y son homeomorfos a $[0, 1]$.

No vaya a creer el lector que ya estamos desvariando, y que nos pusimos a hablar de cosas no conectadas entre sí.

Resulta que en 1948, E.E. Moise publicó su tesis doctoral, en la que construyó un continuo en el plano que es hereditariamente equivalente y que no es un arco, por compartir esta propiedad con el arco, le llamó *Seudoarco*.

Por esa época, Moise y RH Bing estaban empeñados en perseguir los problemas más importantes de la Teoría de los Continuos así que produjeron resultados muy profundos. En ocasiones resolvieron el mismo problema de manera independiente. Para no variar, Bing también estaba investigando ideas parecidas a las de Moise con respecto al Seudoarco.

Para poner en contexto lo que hicieron, necesitamos unas definiciones.

Una familia finita $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de subconjuntos de un continuo, es una *cadena* si se cumple que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$. A los conjuntos U_i se les llama *eslabones* de la cadena.

El *diámetro* de un conjunto no vacío X en \mathbb{R}^2 se define como

$$\text{diámetro}(X) = \sup\{\|p - q\| : p, q \in X\}.$$

Aquí estamos usando barras dobles para denotar la norma en \mathbb{R}^2 . Notemos que el diámetro de un conjunto puede ser infinito.

Un continuo X en \mathbb{R}^2 es *encadenable* si para toda $\varepsilon > 0$, existe una cadena de abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ en \mathbb{R}^2 tal que $X \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $X \cap U_i \neq \emptyset$ y $\text{diámetro}(U_i) < \varepsilon$.

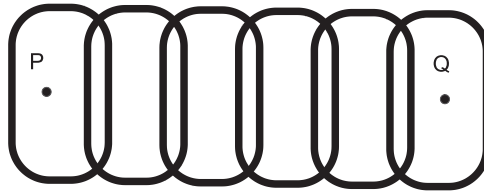


Figura 18. Cadena.

Por supuesto que un segmento en \mathbb{R}^2 es encadenable. El continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ se define como la cerradura de la gráfica de la función $\text{sen}(\frac{1}{x})$, definida en el intervalo $(0, 1]$ (ver figura 19). Viendo la figura 20, se puede uno convencer de que el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ también es encadenable.

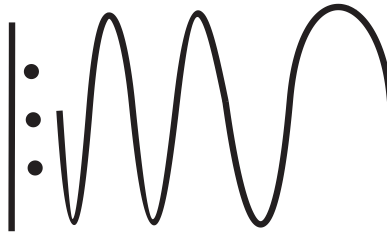


Figura 19. Gráfica del seno($1/x$).

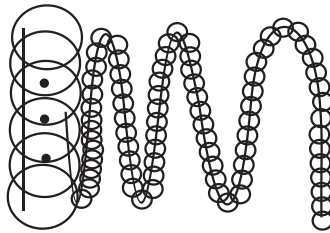


Figura 20. Encadenable.

Un buen ejercicio geométrico es el de mostrar que el arcoiris de Knaster es encadenable.

Para construir continuos encadenables uno puede partir al revés. Podemos poner una cadena $\mathcal{U}_1 = \{U_1^{(1)}, \dots, U_{n_1}^{(1)}\}$ en \mathbb{R}^2 , con eslabones de diámetro menor que 1 y hacer $W_1 = U_1^{(1)} \cup \dots \cup U_{n_1}^{(1)}$. Dentro de W_1 se puede construir una cadena $\mathcal{U}_2 = \{U_1^{(2)}, \dots, U_{n_2}^{(2)}\}$, con eslabones de diámetro menor que $\frac{1}{2}$ y hacer $W_2 = U_1^{(2)} \cup \dots \cup U_{n_2}^{(2)}$.

Dentro de W_2 se puede construir una cadena $\mathcal{U}_3 = \{U_1^{(3)}, \dots, U_{n_3}^{(3)}\}$, con eslabones de diámetro menor que $\frac{1}{3}$ y hacer $W_3 = U_1^{(3)} \cup \dots \cup U_{n_3}^{(3)}$.

Si se continúa este proceso, construyendo una sucesión de cadenas $\{\mathcal{U}_m\}_{m=1}^\infty$, y hacemos

$$X = \bigcap \{\text{la cerradura de } (W_m) : m \in \mathbb{N}\},$$

resulta que X es un continuo encadenable.

Por supuesto que para que el continuo X resulte interesante, necesitamos que el comportamiento de las cadenas no sea simple. Aquí entra una definición crucial.

Dadas dos cadenas $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ y $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ en \mathbb{R}^2 , decimos que \mathcal{V} *refina* a \mathcal{U} si todo eslabón de \mathcal{V} está contenido en algún eslabón de \mathcal{U} . Una *subcadena* de la cadena \mathcal{V} es un conjunto de la forma $\{V_i, \dots, V_j\}$, donde $1 \leq i \leq j \leq m$.

Decimos que \mathcal{V} *está torcida* en \mathcal{U} si \mathcal{V} refina a \mathcal{U} y para que una subcadena de \mathcal{V} avance desde un eslabón de \mathcal{U} a otro que esté al menos

cuatro eslabones aparte, primero tiene que visitar el penúltimo eslabón y después el segundo.

En la figura 21 se ilustra cómo funciona el torcimiento. Se empieza con una cadena \mathcal{U} de seis eslabones y se mete en ella una cadena \mathcal{V} . El primer eslabón de \mathcal{V} se encuentra en el primer eslabón de \mathcal{U} . Para poder construir un eslabón de \mathcal{V} situado en el último eslabón de \mathcal{U} , primero se tiene que visitar el quinto eslabón de \mathcal{U} y después se tiene que visitar el segundo eslabón de \mathcal{U} .

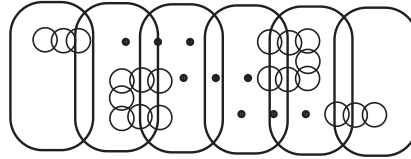


Figura 21. Torcimiento.

Por supuesto que en esta figura los puntos suspensivos representan partes de la cadena que no hemos dibujado. Para hacer la figura completa, necesitamos hacer el torcimiento cuando vamos del primer al cuarto eslabón, cuando vamos del segundo al quinto, etc. En la figura 22 se muestra una manera de completar la figura 21.

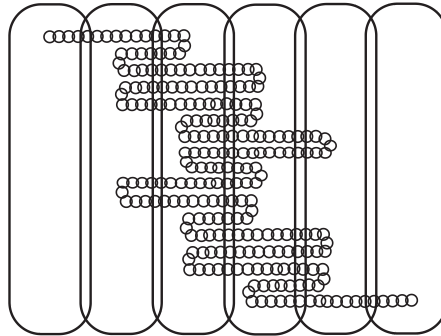


Figura 22. Torcimiento en seis eslabones.

La figura 22 muestra cómo se puede construir una cadena torcida dentro de una cadena de seis eslabones. En el caso en que empecemos con una cadena de siete eslabones $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_7\}$, ya sabemos cómo se puede hacer una cadena torcida en la cadena $\{U_1, \dots, U_6\}$ que vaya de U_1 a U_6 . Como ya sabemos hacer torcimientos en una cadena de cinco eslabones, podemos prolongarla a una que vaya del eslabón U_6 al U_2 . Y como ya sabemos cómo construir cadenas torcidas en una de seis eslabones, podemos prolongarla torcidamente con una que vaya del eslabón U_2 al U_7 . De esta manera, el resultado final será una cadena que vaya del eslabón U_1 al U_7 y que esté torcida en \mathcal{U} .

Este argumento puede generalizarse, por inducción, para construir cadenas torcidas dentro de cadenas con cualquier número de eslabones.

La definición técnica de torcimiento es como sigue: $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ está torcida en $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ si además de que \mathcal{V} refina a \mathcal{U} se tiene que si $k, l \in \{1, \dots, n\}$ con $k + 3 \leq l$ e $i, j \in \{1, \dots, m\}$ son tales que $V_i \subset U_k$ y $V_j \subset U_l$, entonces existen $r, s \in \{1, \dots, m\}$ tales que $V_r \subset U_{l-1}$ y $V_s \subset U_{k+1}$ y se cumple que $i < r < s < j$ o $j < s < r < i$.

Ya se ve que el número de eslabones que tiene una cadena \mathcal{V} para estar torcida en una cadena \mathcal{U} , aumenta dramáticamente cuando aumentamos el número de eslabones de \mathcal{U} . Afortunadamente, no necesitamos construirlas, nada más tenemos que convencernos de que existen.

Con lo que hemos argumentado hasta ahora, tenemos que dentro de cualquier cadena \mathcal{U} , existe una cadena torcida \mathcal{V} que empieza en el primer eslabón de \mathcal{U} y termina en el último.

Usando un argumento recursivo, es posible construir una sucesión de cadenas de abiertos conexos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots$ en el plano tal que

- (a) \mathcal{U}_{n+1} está torcida en \mathcal{U}_n ,
- (b) el diámetro de cada eslabón de \mathcal{U}_n es menor que $\frac{1}{2^n}$,
- (c) el primer elemento de \mathcal{U}_{n+1} está contenido en el primero de \mathcal{U}_n y el último elemento de \mathcal{U}_{n+1} está contenido en el último de \mathcal{U}_n .

Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por A_n a la cerradura de la unión de los elementos de \mathcal{U}_n .

Entonces el pseudoarco se define como

$$P = A_1 \cap A_2 \cap \dots .$$

Para darnos una idea más precisa de la complejidad de las cadenas torcidas, diremos que si usted empieza con una cadena \mathcal{U}_1 de 5 eslabones, entonces \mathcal{U}_2 tiene al menos 13 eslabones, \mathcal{U}_4 al menos 12,000 eslabones y \mathcal{U}_5 al menos 10^{5000} . Se estima que el número de partículas elementales en el universo observable es del orden de 10^{80} . De manera que no hay esperanza de dibujar la quinta cadena.

Un detalle curioso y extraño, con el que se constata que hay que leer con cuidado lo que son las cadenas torcidas para entenderlas es el siguiente.

El famoso libro Topología de J.G. Hocking y G.S. Young [7], tiene dos ediciones, la primera de Addison-Wesley de 1961, y la segunda de Dover de 1988. En la primera incluyen un dibujo terrible que titulan: tres pasos en la construcción del pseudoarco. En la segunda edición, por lo que dicen, parece que lo único que corrigieron fue precisamente ese dibujo, por favor búsquelo y verá que se trata de otro dibujo terrible.

En este momento vamos a salirnos de tono, vamos a poner el teorema que dice que el pseudoarco es hereditariamente indescomponible. Si usted quiere saltarse esta prueba, no hay ningún problema, puede

seguir leyendo sobre la importancia de este objeto y no pierde nada. Lo incluimos porque es una buena muestra de lo simple que es. De hecho, si Knaster lo hubiera sabido, su tesis doctoral se hubiera reducido a unas cuatro páginas.

Teorema. *El pseudoarco es hereditariamente indescomponible, esto quiere decir que todos los subcontinuos no degenerados de P son indescomponibles.*

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo descomponible X del pseudoarco. Entonces existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Elegimos puntos $a \in X \setminus B \subset A$ y $b \in X \setminus A \subset B$. Dada $\varepsilon > 0$, denotemos por $B(p, \varepsilon)$ a la bola en \mathbb{R}^2 , centrada en p y de radio ε . Entonces escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap B(b, \varepsilon) = \emptyset$, $B(a, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ y $B(b, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 3$ y $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Consideramos las cadenas $\mathcal{U}_N = \{U_1^{(N)}, U_2^{(N)}, \dots, U_{m_N}^{(N)}\}$ y $\mathcal{U}_{N+1} = \{U_1^{(N+1)}, U_2^{(N+1)}, \dots, U_{m_{N+1}}^{(N+1)}\}$. Sabemos que $X = A \cup B \subset U_1^{(N+1)} \cup \dots \cup U_{m_{N+1}}^{(N+1)}$. Sean $r, s \in \{1, 2, \dots, m_{N+1}\}$ tales que $a \in U_r^{(N+1)}$ y $b \in U_s^{(N+1)}$. Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, m_N\}$ tales que $U_r^{(N+1)} \subset U_i^{(N)}$ y $U_s^{(N+1)} \subset U_j^{(N)}$. Entonces $a \in U_i^{(N)}$ y $b \in U_j^{(N)}$.

Supongamos, por ejemplo, que $i < j$. Consideremos la subcadena $\{U_i^{(N)}, \dots, U_j^{(N)}\}$. Sabemos que $U_i^{(N)} \cap U_{i+1}^{(N)} \neq \emptyset$, $\text{diámetro}(U_i^{(N)}) < \frac{1}{2^N}$ y que $\text{diámetro}(U_{i+1}^{(N)}) < \frac{1}{2^N}$. Así $\text{diámetro}(U_i^{(N)} \cup U_{i+1}^{(N)}) < \varepsilon$ y $U_i^{(N)} \cup U_{i+1}^{(N)} \subset B(a, \varepsilon)$. De manera similar obtenemos que $U_{j-1}^{(N)} \cup U_j^{(N)} \subset B(b, \varepsilon)$. Así que $U_{i+1}^{(N)} \notin \{U_{j-1}^{(N)}, U_j^{(N)}\}$, lo cual implica que $i < i+1 < j-1 < j$. Así que $3 \leq j-i$.

Podemos suponer que $r < s$, el caso opuesto se trata de manera similar.

Como \mathcal{U}_{N+1} está torcida en \mathcal{U}_N , existen $u, v \in \{1, 2, \dots, m_{N+1}\}$ tales que $r < u < v < s$, $U_u^{(N+1)} \subset U_{j-1}^{(N)}$ y $U_v^{(N+1)} \subset U_{i+1}^{(N)}$. Entonces $U_v^{(N+1)} \subset B(a, \varepsilon)$ y $U_u^{(N+1)} \subset B(b, \varepsilon)$. De manera que $U_v^{(N+1)} \cap B = \emptyset$ y $U_u^{(N+1)} \cap A = \emptyset$.

Como $X \cap U_r^{(N+1)} \neq \emptyset$, $X \cap U_s^{(N+1)} \neq \emptyset$, X es conexo y $r < v < s$, tenemos que $X \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$. Elegimos $p \in X \cap U_v^{(N+1)}$, entonces $p \notin B$, lo cual implica que $p \in A$, por tanto, $A \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$. Tenemos entonces que $A \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$, $r < u < v$ y A es conexo, lo cual implica que $A \cap U_u^{(N+1)} \neq \emptyset$. Ya habíamos observado que esto no ocurre. Hemos obtenido una contradicción que nació de suponer que P contiene un subcontinuo descomponible. Por lo tanto el pseudoarco es hereditariamente indescomponible. \square

El gran salto de las propiedades del pseudoarco lo dio Bing en 1948, cuando probó que el pseudoarco es homogéneo [2].

Este resultado fue verdaderamente sorprendente, espectacular y contraintuitivo. Si uno piensa un poco en su construcción, puede notar que las cadenas que definen al pseudoarco pueden empezar todas en un punto p_0 y terminar en otro punto q_0 . Entonces uno podría pensar que esos dos puntos tienen alguna peculiaridad que los hace topológicamente diferentes de los demás. Como ocurre con el intervalo $[0, 1]$, el 0 y el 1 son los extremos de $[0, 1]$, ocupan una posición diferente de los demás y no hay homeomorfismos que envíen el 0 a un elemento de $(0, 1)$. Pues esa es la impresión que se tenía del pseudoarco cuando se construyó. El teorema de Bing resultó tan inesperado y de lectura tan complicada, que no fue aceptado inmediatamente. Por cierto, en 1949, Moise, pisándole los talones a Bing, publicó una ligera simplificación de la prueba de Bing.

En 1953, I. Kapuano publicó un artículo en los Comptes «probando» que Bing estaba equivocado y que el pseudoarco no es homogéneo, como se vio que la «prueba» tenía una falla, el mismo Kapuano «corrigió» su artículo con otro artículo publicado en los mismos Comptes (que no se ve que tuviera tan buenos arbitros). Las pruebas de Kapuano no estaban bien pero sembró la desconfianza.

En 1955, Esenin-Volpin, refiriéndose a esta situación, y en relación al problema de Knaster y Kuratowski de si los aros son los únicos continuos homogéneos del plano publicó en el «Referativni Zhurnal» lo siguiente: «a la luz de esto, el problema de Knaster y Kuratowski permanece abierto».

Intrigado, el mismo Knaster le pidió a sus destacados alumnos A. Lelek y M. Rochowski, que revisaran con cuidado la prueba de Bing y la expusieran con todo detalle en su seminario en Polonia. Esto se hizo y Lelek escribió una monografía completa de 60 páginas (en Polaco) con los detalles. De maneras similares, los topólogos se fueron convenciendo poco a poco de que Bing tenía razón. Uno podría pensar que para esta época ya deberíamos tener una prueba más simple de la homogeneidad del pseudoarco. Sin embargo, todas las pruebas que puede uno encontrar son pequeñas variantes de la original de Bing. Uno puede encontrar una buena exposición, más detallada y clara en la tesis de maestría de E. Innerst [11], o mejor aún, E.I. Rodríguez Castro, ha simplificado los pasos de la prueba al máximo en [18]. Cabe mencionar aquí que no se conoce un camino diferente al de Bing para probar la homogeneidad del pseudoarco. Lo único que se puede encontrar son pruebas más detalladas o un poco más simples.

El pseudoarco ha resultado toda una caja de sorpresas. Bing también mostró que sólo hay (salvo homeomorfismos, claro) un continuo encañenable y hereditariamente indescomponible. Con esto, obtuvo como corolario que los continuos que construyeron Moise y Knaster (en su tesis doctoral), de manera independiente, son el mismo.

De manera que el pseudoarco no sólo es homogéneo sino que también es hereditariamente equivalente.

Si usted está pensando que estamos hablando de puras cosas viejas, se equivoca. Ya dijimos que el arco y el pseudoarco son hereditariamente equivalentes. Resulta que no se sabe si hay más continuos de éstos. Si quiere usted resolver un problema que lo haría muy apreciado entre los topólogos, puede tratar de resolver éste.

Habiendo encontrado otro continuo homogéneo en el plano, muchos topólogos se dieron a la tarea de tratar de construir más de ellos. Un intento natural consiste en construir cadenas circulares (por favor imagínese la definición de cadena circular, es como la de la figura 23). Se empieza con una como la de la figura 23. Dentro de ella se construye otra cadena circular torcida (donde torcida es lo que usted se imagina, la definición es prácticamente la misma que la que se hizo para cadenas no circulares).

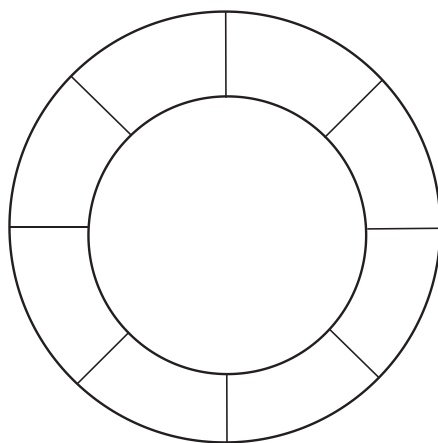


Figura 23. Cadena circular.

Como antes, se empieza con una cadena circular \mathcal{C}_1 , dentro de ella se construye una circular torcida \mathcal{C}_2 , dentro de \mathcal{C}_2 se construye una circular torcida \mathcal{C}_3 , etc. Se cuida que los eslabones se vayan haciendo pequeños. Denotemos por B_n a la cerradura de la unión de los eslabones de \mathcal{C}_n . Definimos

$$B = B_1 \cap B_2 \cap \dots$$

A este objeto se le llama el *Seudocírculo*.

Este continuo fue construido por Bing en 1951. Como se puede observar, en este continuo no hay puntos significativos que pudieran ser llamados sus extremos, así que se podría pensar que también es homogéneo. Sin embargo, en 1968, L. Fearnley [6] y en 1970, J.T. Rogers, Jr. [19], probaron que el seudocírculo no es homogéneo.

Buscando otros continuos planos y homogéneos, Bing y B. Jones en 1959 construyeron, en el plano, lo que llamaron el *Círculo de pseudoarcs*. Muy informalmente hablando, se trata de la unión de una familia de pseudoarcs que se asemejan a un collar, donde los pseudoarcs son las cuentas y están un poco despeinados. Resulta que este continuo también es homogéneo [4].

En resumen, desde 1959 se conocían exactamente tres subcontinuos homogéneos del plano: la circunferencia, el pseudoarco y el círculo de pseudoarcs. Desde entonces muchos especialistas hicieron una gran cantidad de trabajo e intentos para tratar, ya sea de construir otro continuo homogéneo o de probar que son los únicos.

Una noticia que se comienza a antojar un poco vieja es que hace cosa de un par de años se combinaron el colmillo de un investigador maduro, L.G. Oversteegen, y la fuerza y el talento de un joven brillante, L.C. Hoehn, para culminar el gran trabajo desarrollado por muchos. Finalmente pudieron probar que los tres continuos del párrafo anterior son los únicos homogéneos en el plano [8]. Así que después de casi un siglo se ha cerrado el capítulo que abrieron Knaster y Kuratowski.

Por supuesto, siendo el pseudoarco un objeto intrigante con muchas propiedades encontradas y muchas más por encontrar, los topólogos mexicanos no podríamos habernos sustraído de la tentación de trabajar algunos de sus aspectos. Aquí podemos destacar el trabajo de V. Martínez de la Vega, quien mostró que hay una cantidad no numerable de compactaciones del rayo $[0, \infty)$ con residuo el pseudoarco, todas diferentes desde el punto de vista topológico, en su tesis doctoral (este trabajo fue publicado en [16]).

El pseudoarco ha dado muchas señales de ser muy rígido, lo mismo ocurre con el producto de dos pseudoarcs. Por un tiempo se pensó que los subcontinuos del producto de dos pseudoarcs tenían que ser muy limitados. En particular, se pensaba que cualquier subcontinuo con más de un punto de dicho producto tenía que contener pseudoarcs. El autor de este artículo ha mostrado que esta conjetura es falsa [10].

El doble tornado de Bing

Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* (se escribe X tiene la *ppf*) si para cualquier función continua $f : X \rightarrow X$ existe $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

La propiedad del punto fijo es verdaderamente rasposa. Se pueden hacer muchas conjeturas naturales sobre esta propiedad que resultan falsas. De manera que esta área de la Topología ofrece muchos contraejemplos, algunos de los cuales han sido muy difíciles de construir. Por ejemplo, no siempre es cierto que si X tiene la *ppf*, entonces su cilindro ($X \times [0, 1]$) o su cono topológico la tienen.

En el artículo [9] se pueden ver algunos de estos ejemplos. Finalizaremos este artículo mencionando uno más.

Muchos investigadores consideran que el problema abierto más importante de la topología del plano es la siguiente:

Problema. Supongamos que X es un continuo en \mathbb{R}^2 que no separa a \mathbb{R}^2 , esto quiere decir que $\mathbb{R}^2 \setminus X$ es conexo. ¿Será cierto que X tiene la *ppf*?

Es relativamente fácil ver que esta pregunta es equivalente a la siguiente.

Problema. Supongamos que X es un continuo en \mathbb{R}^2 que es intersección de 2-celdas anidadas, esto quiere decir que $X = A_1 \cap A_2 \cap \dots$, donde cada A_n es homeomorfo al cuadrado $[0, 1]^2$ y $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. ¿Será cierto que X tiene la *ppf*?

Posiblemente usted ya sepa que $[0, 1]^2$ y, por tanto, cada espacio homeomorfo a él tiene la *ppf* (esto se llama Teorema del Punto Fijo de Brouwer), y tal vez piense que esto podría ser la base para resolver el problema planteado arriba. ¡La cosa no es tan fácil! Esto nos da pie para hablar de otro ejemplo. El siguiente conjunto X muestra que el problema correspondiente al mencionado, pero para \mathbb{R}^3 , en lugar de \mathbb{R}^2 , tiene una respuesta negativa. Este conjunto X se llama *Doble tornado de Bing* [3]. Su construcción se hace como sigue.

Tomamos dos cilindros infinitos huecos (espacios homeomorfos a $S^1 \times [0, \infty)$, donde S^1 es la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen). Entrelazamos los dos cilindros como se muestra en la figura 24. La parte infinita de cada uno de ellos se enflaca y se alarga para hacer una espiral infinita que se enreda en la base del otro. No se deja ningún espacio entre ellos, es decir, cada uno se embarra en el otro. De manera que la intersección de ellos es una curva infinita. El conjunto X es la unión de los dos conos infinitos representados en la figura 24.

La prueba de que X no tiene la propiedad del punto fijo no es muy difícil, la mejor manera de convencerse de esto es usando argumentos geométricos. Lo que sí es muy difícil es describir estos argumentos por

escrito. Sólo diremos que una función continua que mueve todos los puntos empieza por rotar las bases de los cilindros.

Lo que es menos difícil de describir es la manera en que se puede poner X como una intersección anidada de 3-celdas: $X = A_1 \cap A_2 \cap \dots$, donde cada A_n es homeomorfo al cubo $[0, 1]^3$ y $A_1 \supset A_2 \supset \dots$.

Para hacer esto, imaginemos que tenemos hecho un modelo de X , por ejemplo, de madera (por supuesto que no lo podríamos construir, porque no podemos hacer espirales infinitas, pero nada más supongámoslo para describir la idea). A continuación llevemos X a una tienda de regalos para que nos lo envuelvan, con plástico transparente. Lo primero que hace la encargada es envolver a X con un globo redondo. Le llamamos A_1 a este globo incluyendo a su interior. Entonces A_1 es homeomorfo a $[0, 1]^3$. Al pasar la pistola de aire caliente el plástico del globo se estira y se pega a X , quedando al final algo cercano a la envolvente convexa de X . Llamamos A_2 a lo que contiene el globo deformado de esta manera. Entonces $A_2 \subset A_1$ y A_2 es una 3-celda. A continuación nos conseguimos una bomba para extraer aire del globo estirado a través de un pequeño agujero. Al poner a funcionar la bomba, ésta extrae un poco de aire, de manera que el plástico del globo se pega más a X , esta acción también va extrayendo aire de la parte de «adentro» de los conos. Llamamos A_3 a lo que contiene el globo deformado después de un rato de que funciona la bomba. Notemos que todavía podemos conseguir que $A_3 \subset A_2 \subset A_1$ y que A_3 es una 3-celda.

Extracciones sucesivas de aire nos van dando A_4, A_5 , etc. De manera que en el límite, lo único que queda es X . Es decir, $X = A_1 \cap A_2 \cap \dots$.



Figura 24. Doble tornado de Bing.

El autor agradece a los árbitros su minuciosa y detallada revisión, así como las sugerencias que le hicieron para mejorar este artículo.

Bibliografía

- [1] R. D. Anderson, «A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity», *Ann. of Math.*, vol. 67, 1958, 313–324.
- [2] RH Bing, «A homogeneous indecomposable plane continuum», *Duke Math. J.*, vol. 15, 1948, 729–742.
- [3] ———, «Challenging conjectures», *Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, 56–64.
- [4] RH Bing y F. B. Jones, «Another homogeneous plane continuum», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1959, 171–192.
- [5] J. J. Charatonik, «History of continuum theory», en *Handbook of the History of General Topology*, vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1998, 703–786.
- [6] L. Fearnley, «The pseudo-circle is not homogeneous», *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, 554–558.
- [7] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1961.
- [8] L. C. Hoehn y L. G. Oversteegen, «A complete classification of homogeneous plane continua», *Acta Math.*, vol. 216, 2016, 177–216.
- [9] A. Illanes, «La veleidosa propiedad del punto fijo», *Miscelánea Matemática*, núm. 51, 2010, 1–27.
- [10] ———, «Hereditarily non-weakly chainable continua in products of plane continua», *Fund. Math.*, vol. 239, 2017, 19–27.
- [11] E. Innerst, «An introduction to some properties of the pseudo-arc», http://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4143&context=etd%_theses.
- [12] B. Knaster, «Un continu dont tout sous-continu est indécomposable», *Fund. Math.*, vol. 3, 1922, 247–286.
- [13] J. Krasinkiewicz, «On homeomorphisms of the Sierpinski curve», *Prace Mat.*, vol. 12, 1969, 255–257.
- [14] K. Kuratowski, «Théorie des continus irréductibles entre deux points, part I», *Fund. Math.*, vol. 3, 1922, 200–231.
- [15] ———, «Sur le problème de courbes gauches en topologie», *Fund. Math.*, vol. 15, 1930, 271–283.
- [16] V. Martínez de la Vega, «An uncountable family of metric compactifications of the ray with remainder pseudo-arc», *Topology Appl.*, vol. 135, 2004, 207–213.
- [17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1992.
- [18] E. I. Rodríguez Castro, «Homogeneidad del pseudoarco», tesis de maestría, Posgrado de Matemáticas de la UNAM. Director de tesis: Alejandro Illanes, noviembre de 2017.
- [19] J. T. Rogers, Jr., «The pseudo-circle is not homogeneous», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 148, 1970, 417–428.
- [20] W. Sierpiński, «Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée», *C.R. Paris*, 1916, 629–632.
- [21] C. Thomassen, «The Jordan-Schoenflies Theorem and the Classification of Surfaces», *The American Mathematical Monthly*, vol. 99, 1992, 116–130.

Este artículo tuvo apoyo parcial de los proyectos: «Teoría de continuos e hiperespacios (0221413)» of Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), 2013 y «Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II» (IN101216) of PAPIIT, DGAPA, UNAM.