Miscelánea Matemática **78** (2024) 33-48 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7803

Una versión topológica del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein

Alejandro Ríos Herrejón
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
chanchito@ciencias.unam.mx

1. Introducción

El teorema de Cantor-Schröder-Bernstein establece que si X y Y son conjuntos de tal forma que existen funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$, entonces existe una función biyectiva $h : X \to Y$. En términos simples, este resultado expresa que si dentro de Y existe un subconjunto que está en correspondencia biyectiva con X, y dentro de X existe un subconjunto que hace lo propio con Y, entonces necesariamente existe una asignación biyectiva entre X y Y.

Este enunciado forma parte de los resultados fundamentales de la teoría de conjuntos. Entre otras cosas, para nosotros es importante saber en distintos contextos si dos conjuntos tienen el mismo número cardinal (es decir, si existe una función biyectiva entre ellos) y el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein provee de una herramienta formidable para resolver esa clase de problemas.

Ahora, en virtud de que el axioma de extensionalidad (véase [3, § 2.2, p. 8]) decreta que todos los conjuntos están determinados de manera única por sus elementos, el hecho de que exista una función biyectiva entre una pareja de conjuntos implica que, para fines de la teoría, ambos conjuntos son el mismo, únicamente, si acaso, cambiaron las etiquetas que tienen sus elementos.

Por ejemplo, si $X := \{0, 1, 2\}$ y $Y := \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\big\}$, la asignación $f : X \to Y$ definida mediante $f(x) := \{x\}$ es una función biyectiva entre los conjuntos X y Y. En consecuencia, si únicamente es de nuestro interés tener un conjunto con tres elementos, para la teoría de conjuntos

---

Palabras clave: Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, espacios topológicos.
Este trabajo fue elaborado con el apoyo económico del CONAHCYT (núm. 814282).

es intrascendente cuál de los conjuntos se elija puesto que ambos tienen la misma «estructura conjuntista».

Con esta idea en mente, observemos que una función inyectiva $f : X \to Y$ induce una función biyectiva entre X y $f[X]$ y, similarmente, una función inyectiva $g : Y \to X$ induce una función biyectiva entre Y y $g[Y]$. De esta manera, dentro de Y se encuentra una «copia conjuntista» del conjunto X, y dentro de X se encuentra una «copia conjuntista» del conjunto Y. A partir de estas hipótesis el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein garantiza que X y Y tienen la misma «estructura conjuntista», es decir, X y Y están en correspondencia biyectiva.

El objetivo de los párrafos anteriores es tratar de hacer una buena interpretación del teorema Cantor-Schröder-Bernstein para poder emigrar hacia otras áreas de las matemáticas el siguiente problema: suponga que X y Y son «estructuras matemáticas» (por ejemplo, espacios vectoriales, grupos algebraicos, espacios métricos, etcétera). Además, suponga que $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son funciones inyectivas que preservan la estructura matemática en cuestión (transformaciones lineales, homomorfismos de grupos, isometrías, etc.). ¿Es posible encontrar una función biyectiva $h : X \to Y$ que preserve nuestra estructura matemática de ida y de regreso? (es decir, un isomorfismo lineal, un isomorfismo de grupos, una isometría biyectiva, etc.).

A pesar de que este tipo de preguntas son interesantes en cada disciplina en las que aparecen, para no saturar el presente texto con demasiada información que perdería en tecnicismos el interés del lector y desviaría su atención de la belleza de este problema, el propósito de este artículo es exponer qué es lo que sucede cuando esta cuestión se presenta en el universo de la topología.

2. Conceptos preliminares

Todos los conceptos conjuntistas que no sean mencionados explícitamente en esta sección deberán entenderse como están expuestos en [3].

Sean X y Y un par de conjuntos. Las expresiones

$$«\exists x \in X \big(\varphi(x)\big)» \quad \text{y} \quad «\forall y \in Y \big(\psi(y)\big)»$$

significarán, respectivamente, que existe un elemento x en X que satisface la propiedad φ y que todos los elementos y de Y verifican la propiedad ψ.

El símbolo «$X \subseteq Y$» será una abreviatura de la frase «X es un subconjunto de Y». De esta manera, la relación $X \subseteq Y$ es verdadera si y solo si cualquier elemento de X es un elemento de Y.

Utilizaremos el símbolo $P(X)$ para representar la colección de todos los subconjuntos de X, es decir, un conjunto A es un elemento de $P(X)$ si y solo si $A \subseteq X$. Además, un conjunto $\mathscr{A}$ será una *familia de subconjuntos de* X si $\mathscr{A}$ es un subconjunto de $P(X)$.

Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de X, la *unión sobre* $\mathscr{A}$ es la colección

$$\bigcup \mathscr{A} := \left\{ x \in X : \exists A \in \mathscr{A} \, (x \in A) \right\}.$$

En particular, observemos que para todo $A \in \mathscr{A}$ se satisface la relación $A \subseteq \bigcup \mathscr{A}$.

Una colección $\mathscr{A}$ formada por subconjuntos de X es *ajena por pares* si para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ se satisface que $A \cap B = \emptyset$ siempre que $A \neq B$. Además, $\mathscr{A}$ será llamada una *descomposición de* X cuando $\mathscr{A}$ sea ajena por pares y $X = \bigcup \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de X y $\mathscr{B}$ es una familia de subconjuntos de Y, diremos que una función $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es *creciente* si para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ se satisface que la contención $A \subseteq B$ implica la inclusión $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

Una función $f : X \to Y$ será llamada *inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ la condición $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$; *suprayectiva* si para cualquier $y \in Y$ existe $x \in X$ con $f(x) = y$; y *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Cuando f sea una función biyectiva, el símbolo $f^{-1} : Y \to X$ representará la *función inversa de* f, esto es, la única función $g : Y \to X$ que satisface las relaciones $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, donde $\mathrm{Id}_X : X \to X$ y $\mathrm{Id}_Y : Y \to Y$ son la función identidad en el conjunto respectivo.

Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, «$f[A]$» y «$f^{-1}[B]$» representarán, correspondientemente, la *imagen directa de* A *bajo* f y *la imagen inversa de* B *bajo* f; en símbolos,

$$f[A] := \Big\{ y \in Y : \exists x \in A \left(f(x) = y \right) \Big\} \text{ y}$$
$$f^{-1}[B] := \Big\{ x \in X : \exists y \in B \left(f(x) = y \right) \Big\}.$$

Cuando B consta de un solo elemento, digamos $B = \{y\}$, a la preimagen $f^{-1}[B] = f^{-1}[\{y\}]$ la denotaremos simplemente por $f^{-1}\{y\}$ y le llamaremos la *fibra de* y. Por otra parte, la expresión $f\restriction_A$ representa la *restricción de* f *al conjunto* A, es decir, $f\restriction_A : A \to Y$ es la función dada por $(f\restriction_A)(x) := f(x)$.

El símbolo $\mathbb{N}$ representará al conjunto de números naturales, es decir, los elementos de $\mathbb{N}$ son precisamente 0, 1, 2, 3, etc. Similarmente, $\mathbb{Z}$ será el conjunto de números enteros, esto es, $\mathbb{Z} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

Un conjunto X será llamado *finito* si existen $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \to X$. Es posible demostrar que si un conjunto X está en correspondencia biyectiva con $n \in \mathbb{N}$ y con

$m \in \mathbb{N}$, entonces $n = m$ (véase [3, cor. 7.3, p. 140]). Por este motivo, cuando un conjunto X admite una biyección con $n \in \mathbb{N}$, tiene sentido decir que X *tiene cardinalidad* n y denotar esta situación por $|X| = n$. Verbigracia, el conjunto vacío $\emptyset$ tiene cardinalidad 0, el conjunto $\{\mathbb{N}\}$ tiene cardinalidad 1, el conjunto $\{\emptyset, \mathbb{Z}\}$ tiene cardinalidad 2, el conjunto $\big\{\{\emptyset\}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{Z}\}\big\}$ tiene cardinalidad 3, etc.

En el siguiente resultado reunimos dos propiedades fundamentales que tienen los conjuntos finitos. Para no apartarnos del tema central del artículo con sus demostraciones que son de naturaleza exclusivamente conjuntista, estas serán omitidas. No obstante, se le recomienda al lector interesado consultar los detalles en [3, teo. 7.4, p. 140] y [3, teo. 7.8, p. 142].

Lema 2.1. *Los siguientes enunciados son ciertos para un conjunto finito X.*

1. *Si Y es un subconjunto de X, entonces Y es finito.*
2. *$P(X)$ es finito.*

Si X es un conjunto finito de cardinalidad $n \in \mathbb{N}$, entonces para cualquier $m \in \mathbb{N}$ las expresiones «$|X| \leq m$» y «$|X| \geq m$» significan, correspondientemente, que $n \leq m$ y $n \geq m$ con el orden que tiene $\mathbb{N}$. Además, si Y es un conjunto finito de cardinalidad $m \in \mathbb{N}$, el símbolo «$|X| + |Y|$» representa la suma de números naturales $n + m$.

Observemos ahora que si $f : X \to Y$ es una función entre conjuntos finitos, entonces la inyectividad y la suprayectividad de f están caracterizadas en términos de la cardinalidad de sus fibras. Formalmente, un argumento rutinario puede emplearse para demostrar el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos finitos.*

1. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*
   (a) *f es inyectiva.*
   (b) *Para cualquier $y \in Y$ se satisface que $\left|f^{-1}\{y\}\right| \leq 1$*
2. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*
   (a) *f es suprayectiva.*
   (b) *Para toda $y \in Y$ se cumple que $\left|f^{-1}\{y\}\right| \geq 1$.*

Cerramos esta sección con un resultado acerca de las funciones entre conjuntos finitos de la misma cardinalidad. Antes de empezar conviene mencionar dos cosas: primero, utilizaremos el lema 2.2 constantemente, y segundo, la demostración del lema 2.3 únicamente necesita razonamientos simples de conteo.

Lema 2.3. *Sean X y Y un par de conjuntos finitos de cardinalidad $n > 0$. Los siguientes enunciados son equivalentes para una función $f : X \to Y$.*

1. *f es inyectiva.*
2. *f es suprayectiva.*
3. *f es biyectiva.*

Demostración. Nuestra hipótesis al respecto de la cardinalidad de Y permite fijar una enumeración sin repeticiones $\{y_k : k < n\}$ del conjunto Y. Observemos que la colección de fibras, $\{f^{-1}\{y_k\} : k < n\}$, forma una descomposición de X. En consecuencia, se satisface la relación

$$|X| = \sum_{k<n} \left| f^{-1}\{y_k\} \right| .$$

Ahora, para comprobar que las condiciones (1)–(3) son equivalentes, es suficiente verificar que (1) y (2) son equivalentes. Con este objetivo en mente, notemos primero que si f es una función inyectiva no suprayectiva, existe $j < n$ con $f^{-1}\{y_j\} = \emptyset$. De esta manera,

$$n = \sum_{k<n} \left| f^{-1}\{y_k\} \right| = \sum_{\substack{k<n \\ k \neq j}} \left| f^{-1}\{y_k\} \right| \leq \sum_{\substack{k<n \\ k \neq j}} 1 = n - 1,$$

una contradicción.

Por otra parte, cuando f es una función suprayectiva no inyectiva, existe $j < n$ con $\left| f^{-1}\{y_j\} \right| \geq 2$. Luego,

$$n = \sum_{k<n} \left| f^{-1}\{y_k\} \right| = \left| f^{-1}\{y_j\} \right| + \sum_{\substack{k<n \\ k \neq j}} \left| f^{-1}\{y_k\} \right| \geq 2 + \sum_{\substack{k<n \\ k \neq j}} 1 = n + 1,$$

un absurdo.

En suma, f es inyectiva si y solo si f es suprayectiva. □

3. Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein

Para no tener un carencia sustancial en la temática de este artículo, en esta breve sección expondremos una demostración sintética del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. Conviene mencionar que las pruebas «clásicas» de este resultado utilizan una combinación un tanto elaborada del teorema de recursión con el principio de inducción (véase, por ejemplo, [3, § 7.5, p. 150]). Afortunadamente, la demostración que expondremos a continuación fue extraída de [1, § 3.3, p. 164] y tiene la virtud de ser, en palabras de los autores, «más simple y elegante».

El siguiente resultado es una versión débil del conocido teorema de Knaster-Tarski, pero es suficiente para alcanzar nuestro objetivo.

Lema 3.1. *Si X es un conjunto y $\varphi : P(X) \to P(X)$ es una función creciente, entonces φ admite un punto fijo, es decir, existe $B \in P(X)$ con $\varphi(B) = B$.*

Demostración. Sean $\mathscr{A} := \big\{A \in P(X) : A \subseteq \varphi(A)\big\}$ y $B := \bigcup \mathscr{A}$. Observemos primero que, como para cualquier $A \in \mathscr{A}$ se satisface la inclusión $A \subseteq B$, entonces se cumplen las relaciones $A \subseteq \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$; en consecuencia, $B \subseteq \varphi(B)$. Luego, la condición $B \subseteq \varphi(B)$ garantiza que $\varphi(B) \subseteq \varphi\big(\varphi(B)\big)$ y, por ende, $\varphi(B) \in \mathscr{A}$, lo cual a su vez implica que $\varphi(B) \subseteq B$. En suma, $\varphi(B) = B$. □

Con el resultado anterior disponible, estamos listos para demostrar el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein.

Teorema 3.2. *Sean X y Y un par de conjuntos. Si existe una función inyectiva $f : X \to Y$ y existe una función inyectiva $g : Y \to X$, entonces existe una función biyectiva $h : X \to Y$.*

Demostración. Sea $\varphi : P(X) \to P(X)$ la función determinada mediante

$$\varphi(A) := g\Big[Y \setminus f\big[X \setminus A\big]\Big].$$

Nuestro primer objetivo es verificar que φ es una función creciente. Efectivamente, observemos que si $A, B \in P(X)$ satisfacen $A \subseteq B$, entonces $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ y, por ende, $f\big[X \setminus B\big] \subseteq f\big[X \setminus A\big]$. De esta manera, $Y \setminus f\big[X \setminus A\big] \subseteq Y \setminus f\big[X \setminus B\big]$, lo cual implica que

$$g\Big[Y \setminus f\big[X \setminus A\big]\Big] \subseteq g\Big[Y \setminus f\big[X \setminus B\big]\Big],$$

es decir, $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

Utilicemos el lema 3.1 para obtener $A \in P(X)$ con $\varphi(A) = A$. Notemos ahora que, como f es una función inyectiva, $f\restriction_{X\setminus A}\colon X \setminus A \to f[X \setminus A]$ es una función biyectiva. Además, como g es una función inyectiva y A es un punto fijo de φ, $g\restriction_{Y\setminus f[X\setminus A]}\colon Y \setminus f\big[X \setminus A\big] \to A$ también es una función biyectiva. Sean $j := g\restriction_{Y\setminus f[X\setminus A]}$ y $h : X \to Y$ la función determinada mediante

$$h(x) := \begin{cases} j^{-1}(x), & \text{si } x \in A, \\ f(x), & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

La demostración terminará cuando logremos verificar que h es biyectiva.

Para comprobar que h es suprayectiva observemos que si $y \in Y$, entonces $y \in f[X \setminus A]$ o $y \in Y \setminus f\big[X \setminus A\big]$. En el primer caso existe $x \in X \setminus A$ con $f(x) = y$, mientras que en el segundo el punto $x := g(y)$ pertenece a A y satisface que $j^{-1}(x) = y$. En resumen, existe $x \in X$ con $h(x) = y$.

La inyectividad de h es porque si $x, y \in X$ cumplen $h(x) = h(y)$, entonces el hecho de que $f[X \setminus A] \cap \big(j^{-1}\big)[A] = \emptyset$ implica que no puede suceder $x \in A$ y $y \in X \setminus A$, ni $x \in X \setminus A$ y $y \in A$. Por lo tanto,

$x, y \in A$, o bien, $x, y \in X \setminus A$. En cualquier caso, la inyectividad de f y la inyectividad de j^{-1} garantizan que $x = y$.

En conclusión, h es una función biyectiva entre X y Y. □

Conviene mencionar que la idea detrás de la demostración del teorema 3.2 es, de hecho, bastante simple: por medio del lema 3.1 descomponemos a X y a Y en dos conjuntos que están en correspondencia biyectiva con los conjuntos del otro; luego, la función biyectiva deseada entre X y Y se obtiene al «pegar» ambas funciones biyectivas. Para cerrar esta sección incluimos una representación gráfica de este razonamiento en la figura 1.

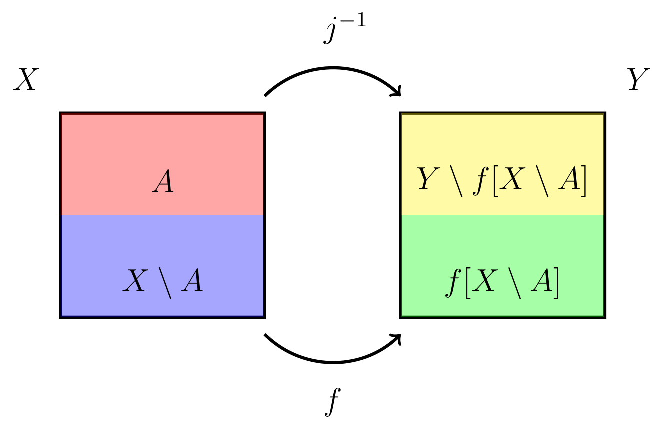

Figura 1. El teorema de Cantor-Schröder-Bernstein.

4. Nociones básicas de topología

Esta sección está dedicada al impávido lector que, sin conocer la definición de «espacio topológico», decidió revisar el presente texto para aprender cosas nuevas. Aquellas personas que pertenezcan al conjunto anterior no tienen nada que temer puesto que los siguientes párrafos tienen como propósito familiarizarnos con los conceptos topológicos básicos que serán necesarios para entender el resto del artículo.

Una pareja (X, τ) es un *espacio topológico* si X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;
2. si $\mathscr{U} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$; y
3. para cualesquiera $U, V \in \tau$ se cumple que $U \cap V \in \tau$.

En estas circunstancias, la colección τ es una *topología en* X y a los elementos de τ se les denomina como *conjuntos abiertos*.

Por ejemplo, en cualquier conjunto no vacío X se constata que las colecciones $\{\emptyset, X\}$ y $P(X)$ son topologías en X conocidas como la *topología indiscreta* y la *topología discreta*, respectivamente. Por otra parte, cuando X es infinito, la familia $\{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ determina una topología en X denominada como la *topología cofinita.* Finalmente, si $X = \{0, 1\}$, entonces la colección $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ es una topología en X nombrada como la *topología de Sierpiński.*

En la recta real, $\mathbb{R}$, existe una topología fundamental que conocemos desde nuestros primeros pasos en el cálculo diferencial. Efectivamente, el lector podrá comprobar sin problema que la colección

$$\tau_{\mathbb{R}} := \Big\{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 \, \big((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U\big)\Big\}$$

es una topología en $\mathbb{R}$ conocida como la *topología euclidiana.*

Ahora, sería injusto continuar nuestra exposición sin tratar de dar una explicación «amigable» de qué es exactamente lo que estudia la topología. A grandes rasgos, pienso que toda persona que trabaje en alguna disciplina de esta inmensa área (por ejemplo, topología algebraica, topología diferencial, topología de continuos, etc.) entenderá que la topología es aquella parte de las matemáticas que estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas cuando estos son deformados continuamente.

Si bien la noción intuitiva del párrafo previo es suficiente para tener una idea genérica de cuál es el trabajo cotidiano del topológo promedio, creo que esa definición realmente no alcanza para cubrir enteramente lo que hace el «topólogo general»; peor aún, no tengo claro si comprende íntegramente lo que haga algún «topólogo en general».

Tratar de dar una definición que abarque totalmente el quehacer matemático de aquella persona dedicada a la topología general sería ingenuo de mi parte; no obstante, es conveniente mencionar que una parte amplia de la topología general escapa considerablemente de la noción de «cuerpo geométrico» y, más bien, está dedicada a los objetos que no admiten intrínsecamente algún tipo de geometría, pero sí admiten una noción de «proximidad entre sus elementos».

En fin, de regreso a nuestra exposición, recordemos que la definición tradicional del cálculo diferencial establece que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua* si para cualesquiera $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que si $x \in \mathbb{R}$ cumple $|x - x_0| < \delta$, entonces $\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$ (véase la figura 2).

Un agradable ejercicio para el lector entusiasta es demostrar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y solo si para cualquier $U \in \tau_{\mathbb{R}}$ se tiene que $f^{-1}[U] \in \tau_{\mathbb{R}}$. De esta manera, la noción intuitiva de que las funciones continuas cumplen que «puntos cercanos en el dominio son enviados en puntos cercanos en el contradominio» – que está expresada

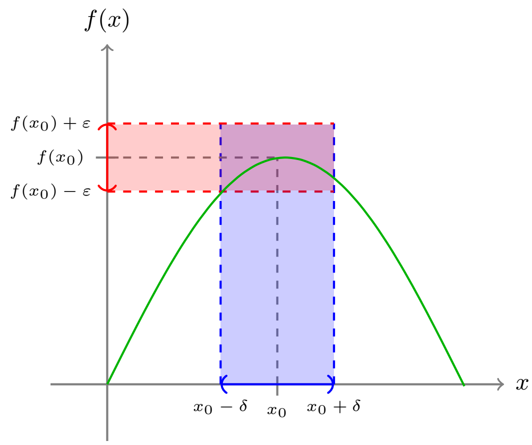

Figura 2. Una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

formalmente en la definición analítica de continuidad – es equivalente a una condición enunciada exclusivamente en términos de la topología de $\mathbb{R}$.

Inspirados en el párrafo anterior es natural decir que si (X,τ) y (Y,σ) son espacios topológicos, entonces una función $f : X \to Y$ es *continua* si para cualquier $U \in \sigma$ se satisface que $f^{-1}[U] \in \tau$ (véase la figura 3).

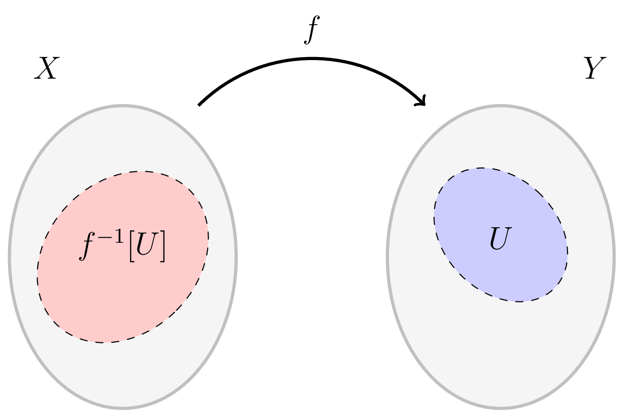

Figura 3. Una función continua entre espacios topológicos.

En este punto del texto nos damos cuenta de que, como un espacio topológico está completamente determinado por los elementos de su topología, las funciones que preservan la «estructura topológica» son precisamente las funciones continuas.

Para terminar esta sección resta ponerle un nombre a las funciones biyectivas que preservan la «estructura topológica» de ida y de regreso. Puntualmente, si (X,τ) y (Y,σ) son espacios topológicos, una función

$f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si f es una función biyectiva, f es continua y f^{-1} es continua.

Finalmente, así como una función biyectiva $f : X \to Y$ indica que X y Y tienen la misma «estructura conjuntista», un homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ garantiza que (X, τ) y (Y, σ) tienen la misma «estructura topológica». En estas circunstancias sucede un fenómeno similar a lo que expresamos en el tercer párrafo de la introducción: para fines de la topología, ambos espacios topológicos son el mismo, únicamente, si acaso, cambiaron las etiquetas que tienen los elementos de sus conjuntos subyacentes y, por consiguiente, también cambiaron los nombres de los elementos de sus topologías.

5. Teorema para espacios topológicos finitos

A lo largo de esta sección y la siguiente, (X, τ) y (Y, σ) serán un par de espacios topológicos. En lo que resta de este trabajo intentaremos contestar la siguiente pregunta.

Pregunta 5.1. *¿Será cierto que si existe una función continua e inyectiva $f : X \to Y$, y existe una función continua e inyectiva $g : Y \to X$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to Y$?*

En este apartado del texto proporcionaremos una respuesta positiva para la pregunta 5.1 cuando X y Y son finitos. Para ello utilizaremos el siguiente enunciado cuya demostración se puede encontrar en [3, teo. 4.49, p. 52]:

Lema 5.2. *Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces para cualquier conjunto $B \subseteq Y$ se satisface la relación $B = f\left[f^{-1}[B]\right]$.*

Sin más preámbulo, el siguiente teorema es uno de los resultados centrales de este trabajo.

Teorema 5.3. *Si X y Y son conjuntos finitos, existe una función continua e inyectiva $f : X \to Y$, y existe una función continua e inyectiva $g : Y \to X$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to Y$.*

Demostración. Nuestra primera observación es que, como $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son funciones inyectivas, el teorema 3.2 garantiza que X y Y están en correspondencia biyectiva. Más aún, como X y Y son finitos, el lema 2.3 constata que f y g son funciones biyectivas. Además, como X y Y son finitos, tanto $P(X)$ como $P(Y)$ son finitos y así, las relaciones $\tau \subseteq P(X)$ y $\sigma \subseteq P(Y)$ implican que τ y σ son finitos (véase el lema 2.1).

La continuidad de f y g permite definir funciones $F : \sigma \to \tau$ y $G : \tau \to \sigma$ mediante $F(U) := f^{-1}[U]$ y $G(V) := g^{-1}[V]$. Observemos que si $U, V \in \sigma$ satisfacen $F(U) = F(V)$, entonces el lema 5.2 asegura que $U = V$; en consecuencia, F es inyectiva. Naturalmente, un argumento similar prueba que G es inyectiva. Luego, como tanto $F : \sigma \to \tau$ como $G : \tau \to \sigma$ son funciones inyectivas, el teorema 3.2 indica que τ y σ están en correspondencia biyectiva y, por lo tanto, el lema 2.3 certifica que F es una función biyectiva.

Afirmamos que $f : X \to Y$ es el homeomorfismo que estamos buscando. En efecto, descubrimos en el primer párrafo que f es una función biyectiva, mientras que la continuidad de f está garantizada por hipótesis. Finalmente, para comprobar que f^{-1} es una función continua observemos que si $V \in \tau$, entonces la suprayectividad de F produce $U \in \sigma$ con $F(U) = V$, es decir, $f^{-1}[U] = V$. De esta manera, como la imagen inversa de V bajo la función f^{-1}, $\left(f^{-1}\right)^{-1}[V]$, coincide con la imagen directa de V bajo la función f, $f[V]$, el lema 5.2 implica que $U = \left(f^{-1}\right)^{-1}[V]$; en especial, $\left(f^{-1}\right)^{-1}[V]$ pertenece a σ. Esto prueba que f^{-1} es una función continua y, por extensión, termina nuestra demostración. □

Resulta entonces que entre espacios finitos es suficiente tener un par de funciones que preserven la «estructura topológica» de uno dentro del otro para que exista una función entre ellos que garantice, de hecho, que son el mismo espacio topológico.

Conviene hacer una breve reflexión. En el fondo, una de las razones por las cuales logramos obtener el teorema 5.3 es porque los conjuntos finitos son, digamos, «bien portados». El resultado que más sobresale en este contexto es el lema 2.3. El hecho de que una función entre conjuntos finitos del mismo tamaño tenga caracterizada su inyectividad, suprayectividad y biyectividad como propiedades equivalentes es, por decir lo menos, extraordinario.

En el ámbito de los conjuntos *infinitos* (es decir, los conjuntos no finitos), es una tarea simple dar ejemplos de funciones que no satisfagan la caracterización anterior. Por ejemplo, en la figura 4 viene una representación gráfica de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) := n + 1 \quad \text{y} \quad g(n) := \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ n - 1, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Claramente, f es una función inyectiva no suprayectiva, y g es una función suprayectiva no inyectiva. Más aún, es evidente que el dominio y contradominio de f y g están en correspondencia biyectiva mediante la función $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. El motivo principal por el cual podemos hacer este tipo de artimañas es porque en los conjuntos infinitos hay «mucho espacio para moverse».

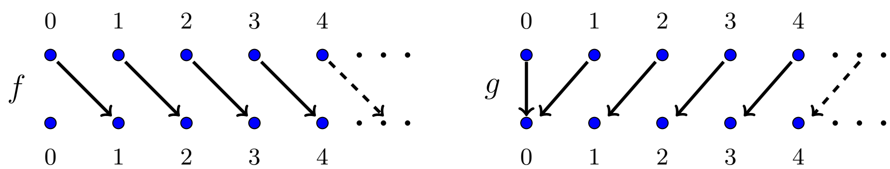

Figura 4. Una retrato pictórico de f y g.

6. ¿Teorema para espacios topológicos infinitos?

Los signos de interrogación en el título de esta sección revelan que el teorema 5.3 seguramente no admitirá una demostración cuando X y Y no son finitos. La cuestión es, de hecho, mucho peor: incluso cuando las hipótesis en la pregunta 5.1 son «más fuertes», la conclusión no es verdadera en el caso infinito.

Antes de realizar el fortalecimiento mencionado en el párrafo previo, veamos cuál es un contraejemplo para la pregunta 5.1 en el caso infinito. El símbolo $[0, 1]$ denota al intervalo unitario en la recta real, es decir, un punto $x \in \mathbb{R}$ es un elemento del intervalo $[0, 1]$ si y solo si $0 \leq x \leq 1$.

Proposición 6.1. *Existe una función continua e inyectiva* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *y existe una función continua e inyectiva* $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Demostración. Claramente, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x$ es continua e inyectiva. Faltaría entonces probar que la función $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida como $g(x) := \frac{e^x}{e^x+1}$, donde e^x denota la función exponencial, es continua e inyectiva. La continuidad es consecuencia de que g es un cociente de funciones continuas positivas. Finalmente, si $x, y \in \mathbb{R}$ satisfacen $g(x) = g(y)$, entonces $e^x e^y + e^x = e^x e^y + e^y$, lo cual a su vez implica que $e^x = e^y$ y, por ende, la inyectividad de la función exponencial garantiza la relación $x = y$. En resumen, g es continua e inyectiva. □

Resta explicar por qué no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $[0, 1]$. En mi opinión, la demostración más simple de este hecho requiere introducir la noción de *compacidad* de un espacio topológico. No obstante, gracias al material expuesto en [4, § 3, p. 7] es posible entender geométrica e intuitivamente la diferencia topológica que subsiste entre $\mathbb{R}$ y $[0, 1]$ mediante los «puntos de corte».

Sin formalidad, un *punto de corte* de un espacio topológico X es aquel que al ser removido lo particiona en dos pedazos abiertos no vacíos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ cualquier punto es de corte puesto que si $x \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ se puede expresar como la unión ajena de los intervalos abiertos $(-\infty, x)$ y (x, ∞). Por otra parte, en $[0, 1]$

resulta que sus extremos, 0 y 1, no son puntos de corte pues no generan separación alguna del espacio al ser removidos (véase la figura 5).

Figura 5. Cualquier punto de $\mathbb{R}$ es de corte, mientras que los extremos de $[0,1]$ no son de corte.

Únicamente falta mencionar que los puntos de corte de un espacio topológico, como es de esperarse, forman parte de su estructura topológica. Específicamente, un punto de corte de X tiene que ser enviado a un punto de corte de Y mediante cualquier homeomorfismo. De esta manera, si todos los puntos de X son de corte y Y tiene puntos que **no** son de corte, entonces X y Y no tienen la misma estructura topológica, es decir, no es posible construir un homeomorfismo entre X y Y. En consecuencia, $\mathbb{R}$ y $[0,1]$ no son homeomorfos y, por ende, la respuesta para la pregunta 5.1 es negativa en el caso infinito.

Nuestro último objetivo en este artículo es mostrar que, incluso cuando las hipótesis en la pregunta 5.1 se fortalecen, no es posible obtener la misma conclusión. La última definición de este trabajo es que una *condensación* es una función $f : X \to Y$ que es biyectiva y continua. Con estos antecedentes, consideremos la siguiente pregunta.

Pregunta 6.2. *¿Será cierto que si existe una condensación $f : X \to Y$ y existe una condensación $g : Y \to X$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to Y$?*

Observemos que la pregunta 6.2 «mejora» notablemente la pregunta 5.1. Por ejemplo, un razonamiento estándar de compacidad (véase [2, § 7.1, p. 198]) muestra que $[0,1]$ no se puede condensar sobre $\mathbb{R}$ (es decir, no existe una condensación $[0,1] \to \mathbb{R}$). De esta manera, los espacios que nos sirvieron para responder negativamente la pregunta 5.1 ya no los podemos usar para contestar en el mismo sentido la pregunta 6.2.

7. Una respuesta negativa para la pregunta 6.2

Esta sección, la última del presente trabajo, está dedicada a la construcción de un contraejemplo para la pregunta 6.2. En los siguientes párrafos describiremos una pareja de espacios topológicos debidos a G. Paseman que tienen la característica de que ambos se condensan sobre el otro y no son homeomorfos entre sí.

Sean $X := \mathbb{Z} \times \{0,1\}$, $Y := \mathbb{Z} \times \{0,1\}$,

$$\mathscr{B} := \big\{\{(-n,i)\} : n > 0 \text{ e } i \in \{0,1\}\big\} \cup \big\{\{(n,0),(n,1)\} : n \geq 0\big\},$$

$$\mathscr{B}_X := \mathscr{B} \cup \big\{\{(0,0)\}\big\} \quad \text{y} \quad \mathscr{B}_Y := \mathscr{B}.$$

Los elementos de $\mathscr{B}_X$ y $\mathscr{B}_Y$ serán los «bloques constructores» para las topologías τ_X y τ_Y, de un modo similar a como los intervalos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ son los «bloques constructores» para la topología $\tau_{\mathbb{R}}$. En específico, se le encarga al lector demostrar que las colecciones

$$\tau_X := \big\{U \subseteq X : \forall x \in U\ \exists B \in \mathscr{B}_X (x \in B \subseteq U)\big\} \text{ y}$$
$$\tau_Y := \big\{V \subseteq Y : \forall y \in V\ \exists B \in \mathscr{B}_Y (y \in B \subseteq V)\big\}$$

son topologías en X y en Y, respectivamente.

Estos cimientos tienen una característica que podemos apreciar inmediatamente: la contención $\mathscr{B}_Y \subseteq \mathscr{B}_X$ implica que $\tau_Y \subseteq \tau_X$. Utilizaremos este hecho en unos momentos más.

Proposición 7.1. *Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son como se indica arriba, entonces (X, τ_X) se condensa sobre (Y, τ_Y), (Y, τ_Y) se condensa sobre (X, τ_X), pero (X, τ_X) y (Y, τ_Y) no son homeomorfos.*

Demostración. Primero, la función identidad $X \to Y$ es una condensación puesto que es evidentemente biyectiva y $\tau_Y \subseteq \tau_X$. Mostraremos ahora que la función $f : Y \to X$ determinada mediante $f(n,i) := (n+1,i)$ es una condensación. Observemos que, como f es simplemente una «traslación a la derecha» de cada punto de $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ (véase la figura 6), está claro también que f es una función biyectiva.

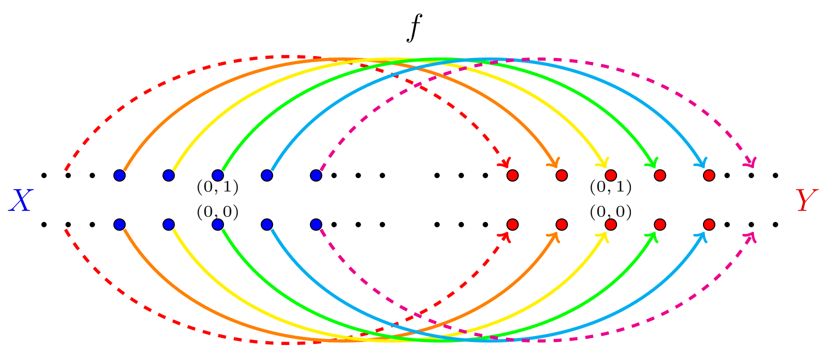

Figura 6. Un dibujo espectacular.

Lo que no está claro es la continuidad de la función f y es lo que demostraremos enseguida. Para facilitar nuestro trabajo utilizaremos la equivalencia puntual de la continuidad que establece que f es continua si y solo si para cualesquiera $x \in X$ y $V \in \tau_Y$ con $f(x) \in V$, existe

$U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f[U] \subseteq V$ (véase [2, teo. 3.1.5, p. 70]). Con esta idea en mente, sean $n \in \mathbb{Z}$, $i \in \{0,1\}$, $V \in \tau_Y$ con $(n+1,i) \in V$, y $B \in \mathscr{B}_Y$ con $(n+1,i) \in B \subseteq V$. Dividamos el argumento en dos casos.

Caso 1. $n < 0$.

La pertenencia $(n+1,i) \in B$ garantiza que $\{(n,i)\}$ es un elemento de τ_X que tiene como elemento a (n,i) y satisface $f\left[\{(n,i)\}\right] \subseteq V$.

Caso 2. $n \geq 0$.

Nuestra hipótesis implica, por definición de $\mathscr{B}_Y$, que $B = \{(n+1,0),(n+1,1)\}$ y, por lo tanto, $\{(n,0),(n,1)\}$ pertenece a τ_X, tiene a (n,i) como elemento, y satisface $f\left[\{(n,0),(n,1)\}\right] \subseteq V$.

En síntesis, hasta aquí hemos logrado condensar a X sobre Y y a Y sobre X. Únicamente resta comprobar que X y Y no son espacios homeomorfos. Lógicamente, como las topologías τ_X y τ_Y fueron construidas a partir de las colecciones $\mathscr{B}_X$ y $\mathscr{B}_Y$, son estas las que deberían detectar que estos espacios no tienen esta característica.

Efectivamente, supongamos en busca de una contradicción que $h : X \to Y$ es un homemorfismo. El problema yace en qué hace h con los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. Observemos primero que, como $\{(0,0)\}$ es un elemento de τ_X, el hecho de que h^{-1} es continua garantiza que $h\left[\{(0,0)\}\right] = \{h(0,0)\}$ es un elemento de τ_Y y, por ende, existe $B \in \mathscr{B}_Y$ con $h(0,0) \in B \subseteq \{h(0,0)\}$, lo cual a su vez implica que $B = \{h(0,0)\}$.

Ahora, la relaciones $B \in \mathscr{B}_Y$ y $B = \{h(0,0)\}$ aseguran que

$$h(0,0) \in \left\{(-n,i) : n > 0 \text{ e } i \in \{0,1\}\right\}.$$

Luego, como $\{(0,0),(0,1)\}$ es un elemento de τ_X, la continuidad de h^{-1} implica que $h\left[\{(0,0),(0,1)\}\right] = \{h(0,0),h(0,1)\}$ es un elemento de τ_Y y, por consiguiente, existe $C \in \mathscr{B}_Y$ con $h(0,1) \in C \subseteq \{h(0,0),h(0,1)\}$.

La cuestión es que no hay $C \in \mathscr{B}_Y$ con estas últimas características. Resulta que tenemos dos casos: $h(0,0) \in C$ o $h(0,0) \notin C$. En el primer caso, las pertenencias $C \in \mathscr{B}_Y$ y $h(0,0) \in C$ implican, por definición de $\mathscr{B}_Y$, que C tiene un solo elemento, lo cual entra en contradicción con las relaciones $\left|\{h(0,0),h(0,1)\}\right| = 2$ y $C = \{h(0,0),h(0,1)\}$.

En el segundo caso sucede que $C = \{h(0,1)\}$. No obstante, el hecho de que $C \in \tau_Y$ combinado con la continuidad de h implica que $h^{-1}[C] = h^{-1}\{h(0,1)\} = \{(0,1)\}$ es un elemento de τ_X, pero esto no es posible puesto que, como $\{(0,1)\}$ no pertenece a $\mathscr{B}_X$, no existe $D \in \mathscr{B}_X$ tal que $(0,1) \in D \subseteq \{(0,1)\}$; nuevamente, una contradicción. □

En virtud del material expuesto en este texto es menester hacer una última reflexión. Sería deseable que en el teorema 5.3 no fuera indispensable la condición de la finitud en los espacios involucrados. Como se ha tratado de recalcar a lo largo de estas páginas, lo que permite construir un contraejemplo para las preguntas 5.1 y 6.2 es precisamente que la infinitud provee de mucho espacio para movernos.

Asumo que por situaciones de esta índole es que existen personas partidarias del «ultrafinitismo». La negación de la existencia del conjunto $\mathbb{N}$ permite obtener una versión «absoluta» del teorema 5.3: si no existen conjuntos infinitos, entonces el resultado siempre es válido.

Si bien debe haber mucha paz mental en trabajar exclusivamente con aquellos objetos que puedes ver en su totalidad, personalmente no quisiera abandonar nunca la posibilidad de hacer construcciones tan bonitas como la expuesta en esta sección. El infinito te obliga a renunciar a la idea de un teorema 5.3 que funcione para todos los espacios topológicos, pero sinceramente pienso que el sacrificio es bienvenido.

En palabras[1] del matemático William Hugh Woodin: «To the person who does deny infinity and says that it doesn't exist, I feel sorry for them, I don't see how such view enriches the world. Infinity may be does not exist, but it is a beautiful subject. I can say that the stars do not exist and always look down, but then I don't see the beauty of the stars. Until one has a real reason to doubt the existence of mathematical infinity, I just don't see the point».

Agradecimientos

El autor agradece a los revisores por sus amables palabras en el dictamen de este texto. Además, agradece el doble las correcciones y sugerencias que le dieron los toques finales al presente artículo.

Bibliografía

[1] J. A. Amor Montaño, G. Campero Arena y F. E. Miranda Perea, *Teoría de conjuntos: curso intermedio*, 2.ª ed., Temas de matemáticas, Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[2] F. Casarrubias Segura y A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología general*, Aportaciones matemáticas, Serie Textos, núm. 37, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.

[3] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos: una introducción*, 3.ª ed., Aportaciones matemáticas, Serie Textos, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[4] R. Leonel Gómez, «Caracterización de espacios topológicos a partir de su estructura puntual», *Miscelánea Matemática*, núm. 71, 2021, 5–15, https://doi.org/10.47234/mm.7102.

[1] Este pensamiento lo manifestó Woodin en el capítulo 47, «To Infinity and Beyond», de la quinta temporada del programa «Horizon» de la BBC que salió al aire el 10 de febrero de 2010; específicamente, entre el minuto 30:45 y el minuto 31:25. Más aún, Doron Zeilberger, otro invitado al programa, cita y critica las palabras que expresó Woodin en el sitio web: https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion108.html.