Miscelánea Matemática **68** (2019) 69-83 SMM

Del concepto de límite a los conjuntos no medibles

Carmen Martínez-Adame
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
cmai@ciencias.unam.mx y
Edgar Enrique Solís de los Reyes
Área de Matemáticas
Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Azcapotzalco
Universidad Nacional Autónoma de México
edgar_solis@ciencias.unam.mx

1. Orígenes del concepto de límite

Algunos de los problemas que han interesado a los matemáticos por mucho tiempo son los de cuadraturas de figuras geométricas, es decir, problemas en los que se busca construir un cuadrado igual (en área) a alguna figura geométrica dada. La búsqueda de su solución ha generado y requerido del desarrollo de nuevos conceptos, técnicas y métodos matemáticos, por ejemplo conceptos como los infinitesimales, indivisibles y límite; técnicas como las infinitesimales usadas por Kepler y el cálculo de series de Saint-Vincent; métodos como el de exhaución de Eudoxo, el de indivisibles de Cavalieri y el *ductus*[1] de Saint-Vincent.

Además de los problemas en sí, también ha sido de gran interés para la comunidad matemática el estudio de los diferentes métodos que permiten su solución. Por ejemplo, el problema de la cuadratura del círculo mediante curvas mecánicas como la cuadratriz era conocido desde la Grecia antigua, sin embargo, se necesitó del desarrollo del álgebra para

Los dos autores realizaron la investigación para este artículo gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN 403816 La Comprensión Matemática.

[1] Este es el método que concibe Saint-Vincent para determinar el volumen de sólidos que consiste en construir los sólidos y estudiarlos considerándolos en secciones sólidas, aprovecha las propiedades euclidianas de las figuras planas con las que los forma para determinar el volumen. Considera que el volumen del sólido es la suma de los volúmenes de las secciones sólidas que lo forman. Se puede revisar más en [16].

saber que el problema no era resoluble en el marco de los cinco postulados euclidianos. Otro ejemplo es el de la cuadratura de la parábola que Arquímedes resolvió mediante el método de exhaución.[2]

La creación del método de exhaución se atribuye a Eudoxo, y es ampliamente utilizado por Arquímedes, quien lo usa para demostrar teoremas relacionados con áreas y volúmenes de figuras limitadas por curvas o superficies, resultados que son parte de sus obras: *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medida del círculo* y *Método sobre los teoremas mecánicos*[3] [9]. Por ejemplo, la primera proposición que demuestra en el *Método* es la cuadratura de la parábola: *Sea ABC un segmento comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo.*[4] *Digo que el segmento ABC es cuatro tercios del triángulo ABC.*[5]

Por otro lado, al inicio de la obra *Sobre la esfera y el cilindro*, véase [9], Arquímedes hace mención de resultados sobre áreas y volúmenes que atribuye a Eudoxo. Entre estos podemos mencionar el siguiente: *toda pirámide es un tercio del prisma que tiene misma base y altura que la pirámide, y todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y altura que el cono*. Para la demostración de estos resultados se requiere del método de exhaución.

De manera sintética, con el método de exhaución se busca realizar un proceso repetidas veces, hasta un punto determinado, pero desconocido, sabiendo que tal punto se alcanzará.

Entonces, para usar el método de exhaución se requiere poder repetir un proceso indefinidamente y tener una garantía de que en algún momento tal proceso concluirá. Para poder tener tal garantía Arquímedes supone un lema que actualmente conocemos como el Axioma de Arquímedes:[6] *dadas dos magnitudes geométricas desiguales (líneas, superficies, sólidos), la mayor excede a la menor por una magnitud tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a su vez a cualquier magnitud del mismo género que las relacionadas*; este axioma también se desprende de los trabajos de Eudoxo, específicamente de su teoría de proporciones, que es presentada por Euclides en el Libro V de sus *Elementos* [8]. El axioma está fuertemente vinculado a la definición 4 del Libro V: *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden excederse una a otra.*

Con relación al trabajo de Eudoxo, Euclides no solo expone su teoría de proporciones sino que, al igual que Arquímedes, usa el método de

[2] El método de exhaución es un método geométrico de aproximación con una larga e interesante historia, por esta razón la bibliografía relacionada con el tema también es vasta. Sugerimos al lector interesado véase [3].

[3] Esta última obra es conocida simplemente como el *Método*.

[4] Arquímedes llama a la parábola «sección de cono rectángulo».

[5] En términos modernos Arquímedes está comparando áreas, el segmento ABC es el área entre una sección de parábola y la recta AC.

[6] Algunos textos mencionan que lo que asume Arquímedes es un lema, no un axioma.

exhaución. Este método es la base del Libro XII de sus *Elementos* [8], específicamente lo usa para demostrar las proposiciones 2, 5, 10, 11, 12 y 18 de dicho libro. Sin embargo, aunque ambos autores usan el método de exhaución hay una diferencia respecto a cómo lo aplican, y ésta radica en la forma de garantizar que el proceso que repiten indefinidamente en algún momento concluirá. Euclides no usa el axioma de Arquímedes, sino que demuestra una proposición equivalente, y la demuestra usando la definición 4 ya mencionada. Esta proposición es X.1: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.*

Otro aspecto de las demostraciones que usan el método de exhaución es que se realizan por reducción al absurdo. Como en la demostración de la proposición XII.5: *Las pirámides con base triangular que tienen la misma altura son entre sí como sus bases*, se quiere demostrar que para ciertas magnitudes a, b, c y d, se satisface la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,[7] donde a y b son triángulos; mientras que c y d son las pirámides. Se supone que no se satisface dicha expresión. Entonces existe d', la cuarta proporcional, para a, b y c; es decir a, b, c y d' satisfacen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d'}$. Además d' debe ser mayor, menor o igual que d, y con el método de exhaución se prueba que d' no puede ser ni mayor ni menor que d.

Es importante mencionar también que la existencia de la cuarta proporcional, tanto en la demostración de la proposición XII.5 como en la obra euclidiana en su conjunto, no es demostrada por Euclides. De este modo hacemos notar que uno de los elementos fundamentales para probar esta proposición no es parte del sistema axiomático euclidiano.

Los problemas de calcular áreas y volúmenes de ciertas regiones acotadas por líneas curvas o superficies se referían en un inicio a polígonos regulares o secciones cónicas, pero para el siglo XVII se trabajaban curvas más generales y sólidos generados por rotar estas curvas alrededor de una recta. Fue en este siglo que Grégoire de Saint-Vicent resolvió la cuadratura de la hipérbola, problema que requirió un extenso trabajo con series que realizó el propio Saint-Vincent. Es importante mencionar que en este trabajo está ya presente la noción de infinito y la de límite.

El trabajo de Saint-Vincent, quien fuera uno de los más talentosos discípulos de Clavius, lleva el nombre de *Opus geometricum (Obra geométrica)* [15], y es en esta obra que Saint-Vincent presentó un intento de cuadrar el círculo usando métodos infinitesimales. Vale la pena notar que, aunque falló en este objetivo, su trabajo significó importantes aportaciones al cálculo que conocemos actualmente.

[7] Usamos notación moderna para facilitar la comprensión.

Saint-Vincent estudió también problemas relacionados con los fenómenos de reflexión y refracción, y uno de los problemas en particular que surgió fue la trisección del ángulo. Al trabajar en este problema Saint-Vincent encontró que la serie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ es igual a $\frac{2}{3}$, a este valor él le llama el *término*, que en latín significa *límite*.[8]

Su trabajo sobre las series surge como una necesidad al tratar de resolver diversos problemas geométricos y es presentado en el segundo libro de *Opus geometricum* [15]. Este libro parte de las siguientes tres definiciones:[9]

> Definitio Prima. Geometricam seriem voco quantitatem finitam, diuifam secundùm continuationem cuiuscunque rationis datæ.[10]
>
> Definitio Secunda. Progressio Geometrica est quotcunque terminorum secundum eandem rationem continuatio.[11]
>
> Definitio Tertia. Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato proprius ad eum accedere poterit.[12]

Saint-Vincent llama progresión a una sucesión finita de términos de la serie, actualmente una suma parcial, y afirma que el *término*, el límite de la progresión, es el final de la serie, y que la progresión no lo podrá alcanzar aunque continúe indefinidamente, pero que se puede aproximar a él más que cualquier cantidad dada. De esta manera, Saint-Vincent logra plasmar una clara idea de lo que es una serie y su límite. En términos actuales nos dice que una serie converge si la sucesión de sumas parciales converge. Esta concepción es el centro de la teoría de series que se desarrolló en los siglos XVII y XVIII.

A diferencia de Euclides que en su proposición X.1 solo afirma que la magnitud será menor que la magnitud menor dada, Saint-Vincent afirma que se obtendrá un valor, da un «brinco» de no solo ser menor que, sino que continua el proceso y al acercarse tanto como se quiera, «llega a» alcanzar un valor determinado.

Todos los trabajos de aproximación infinita de Euclides y Arquímedes requerían de una aproximación específica y particular para cada

---

[8] Saint-Vincent fue el primero en usar la palabra *límite* para referirse a este concepto.

[9] El libro original de Saint-Vincent se puede consultar en `https://archive.org/details/bub_gb_Bk9vKVkq6mgC` y remitimos al lector interesado a consultar el artículo de Jean Dhombres en [11, p. 141 ff.].

[10] Las series geométricas se pueden formar a partir de una longitud fija, dividida de acuerdo con la secuencia de cualquiera de las razones dadas.

[11] Una progresión geométrica es la continuación de cualquier número de términos de acuerdo con la misma razón.

[12] El término de la progresión es el final de la serie, que [aunque] se nos permita continuar indefinidamente, ninguna progresión puede alcanzar, pero es posible llegar tan cerca como de cualquier intervalo dado.

problema, porque dependían de la figura sobre la que se aproximaban, no contaban con un método de aproximación infinita general, independiente de la figura de aproximación, este método surgió a partir de los trabajos de Saint-Vicent.

Fue así que Saint-Vincent resolvió las paradojas de Zenón,[13] y en particular con relación a la paradoja de Aquiles y la tortuga, mostró que los intervalos entre la tortuga y Aquiles, están en progresión geométrica, y en este caso, aunque la cantidad de intervalos sea infinita, la suma es finita. Esto implica que para entender el movimiento se requiere del concepto de límite.

Al trabajar con el ángulo de contacto, que es el ángulo entre una curva y su tangente en el punto de contacto, Saint-Vincent encontró dificultades para avanzar utilizando las concepciones griegas, y entonces afirmó que en el campo de los infinitesimales los principios básicos de geometría dejan de ser válidos, en particular, la noción común: *el todo es mayor que la parte*. Este cambio de paradigma es el que nos lleva a entender mejor el concepto de infinito, y posteriormente a desarrollar teorías como la de números transfinitos de Cantor. Del mismo modo, el desarrollo de series geométricas del trabajo de Saint-Vincent, posteriormente llamó la atención de Leibniz y fue el punto de partida para algunas de sus investigaciones matemáticas.

Y fue a mediados del mismo siglo XVII que Isaac Newton y Gottfried Leibniz, aprovechando el trabajo de los matemáticos que les precedieron, formularon los métodos y técnicas de lo que actualmente es el cálculo, uno de cuyos conceptos fundamentales es el de límite, y fue concebido primero por Saint-Vincent motivado por el interés de resolver problemas geométricos sobre áreas y volúmenes.

2. Área y volumen

Resultó que para determinar el área o volumen de ciertas figuras es necesario usar métodos no elementales. Por ejemplo, para calcular el área del círculo y el volumen de pirámides Euclides usa el método de exhaución, mismo que no se sigue de los cinco postulados. Cabe mencionar que esta sería una interpretación moderna pues ni el concepto de área ni el de volumen entendidos como números están presentes en los *Elementos* de Euclides. Aunque los griegos abordaban los problemas de determinar áreas y volúmenes, en los *Elementos* no se calculan, se determinan comparaciones entre las figuras. Los conceptos de área y

[13] Una de las paradojas es la siguiente: *Aquiles*. La imposibilidad de que Aquiles alcance a una tortuga en una carrera porque cada vez que la tortuga avanza Aquiles primero debe llegar al lugar donde la tortuga estuvo previamente, como la tortuga sigue avanzando esto ocurre sucesivamente y Aquiles no la puede alcanzar.

volumen implican medir, comparar con una unidad de medida, para lo que se requiere la noción de número y de unidad, pero éstas nociones no están presentes en los *Elementos*. Euclides trabaja con magnitudes y establece razones entre ellas, por ejemplo: entre círculos y sus diámetros, entre pirámides con alturas iguales y sus bases; él compara las figuras en sí, como magnitudes, con las magnitudes de algunos de sus elementos, como se observa en la proposición XII.5: *Las pirámides con base triangular que tienen la misma altura son entre sí como sus bases*; contrario al cálculo de áreas y volúmenes que asocia a las figuras una medida, un número.

El hecho de usar el método de exhaución para calcular áreas y volúmenes llamó la atención de los matemáticos, ¿por qué, para ciertas figuras, no se puede calcular el área o volumen de forma elemental?, la pregunta era: ¿será realmente necesario usar métodos como el de exhaución, que implica aspectos conceptuales relacionados con el concepto de límite, para determinar ciertas áreas y volúmenes?

2.1 Tercer problema de Hilbert

Los cuestionamientos anteriores se plasmaron en uno de los 23 problemas de Hilbert, que fueron enunciados en su conferencia de 1900 en el Congreso Internacional de Matemáticas en París y que fueron publicados poco después en [10]. Con estos problemas Hilbert esperaba orientar el trabajo de los matemáticos de la época, e imaginaba que serían parte importante del desarrollo futuro de las matemáticas. Y ciertamente esta famosa lista de problemas influenció fuertemente el desarrollo de las matemáticas del siglo XX.

En su tercer problema, Hilbert cuestiona sobre la forma de responder a las preguntas ¿cuándo dos triángulos tienen la misma área? y ¿cuándo dos pirámides tienen el mismo volumen? pues aunque la respuesta es la misma: cuando su base y altura son iguales, hay una diferencia significativa en las demostraciones. Para la primera solo se requieren las propiedades euclidianas, mientras que para la segunda se necesitan además nociones relacionadas con el concepto de límite. Si esto se generaliza a polígonos y poliedros la diferencia significativa se mantiene.

Si se pudiera omitir de la demostración para determinar el volumen de poliedros lo referente al concepto de límite, tener una demostración solo en términos elementales, esto implicaría entre otras cosas que las nociones de área y volumen son equivalentes, que medir en el plano es equivalente a medir en el espacio, al menos para figuras con lados rectos.

Hilbert enunció su tercer problema así: Dado un poliedro, ¿es siempre posible cortarlo en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado un cubo con el mismo volumen?

La idea de cortar un poliedro en piezas se recoge en el siguiente concepto:

Definición 2.1. Dos poliedros son *tijera-congruentes* si uno puede ser cortado en un número finito de poliedros y éstos se pueden rearmar, por rotaciones y traslaciones, para formar el segundo poliedro. Es decir, si A y B son poliedros, se dice que A es *tijera-congruente* con B, denotado por $A \sim B$, si $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ donde cada A_i es una pieza poliédrica de A y $A_l + A_j$ denota la unión disjunta de A_l y A_j; asimismo $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, tales que A_i y B_i son congruentes para cada i.

Esta definición tiene su análoga para polígonos:

Definición 2.2. Dos polígonos son *tijera-congruentes* si uno puede ser cortado en un número finito de polígonos y éstos se pueden rearmar, por rotaciones y traslaciones, para formar el segundo polígono. Es decir, si A y B son polígonos, se dice que A es *tijera-congruente* con B, $A \sim B$, si y solo si $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ donde cada A_i es una pieza polígona de A y $A_l + A_j$ denota la unión disjunta de A_l y A_j, asimismo $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, tales que A_i y B_i son congruentes para cada i.

Claramente dos polígonos que son *tijera-congruentes* tienen la misma área. El resultado inverso, el hecho de que dos polígonos son *tijera-congruentes* si tienen la misma área, se demuestra a partir de que en el conjunto de los polígonos la relación *tijera-congruente* es una relación de equivalencia. Es decir, si A, B y C son polígonos, entonces se cumple que:

- $A \sim A$.
- Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$.
- Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.[14]

Posteriormente se demuestra que cualquier triángulo es *tijera-congruente* con algún rectángulo. Y que dos rectángulos con la misma área son *tijera-congruentes*. Se consideran dos polígonos cualesquiera A y B con la misma área y se triangulan. Así, $A = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$, de modo que la suma de las áreas de los triángulos T_i es igual a la de A.

El siguiente paso es construir rectángulos $R_1, R_2, \cdots, R_k$ tales que $T_i \sim R_i$ para cada i. Posteriormente se construye un rectángulo R a partir de los rectángulos R_i. El rectángulo R se construye de rectángulos B_i tales que cada B_i tiene la misma área que R_i para toda i. Esto se puede hacer solo variando la altura de cada rectángulo B_i, así $R_i \sim B_i$

[14] Para demostrar la transitividad basta considerar en B la división que se obtiene al intersectar todos los elementos de las dos divisiones de B que ya se tienen entre sí, y luego comparar las divisiones que ésta produce en A y C.

para cada i, entonces $R = B_1 + B_2 + \cdots + B_k$.[15] Por transitividad $T_i \sim B_i$ para cada i. Por tanto, $A \sim R$ por lo que A y R tienen la misma área.

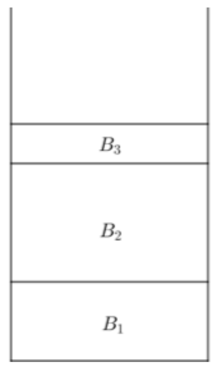

Figura 1. Rectángulo R.

Análogamente se construye un rectángulo $R^{'}$ tal que $B \sim R^{'}$, por lo que B y $R^{'}$ tienen la misma área. Como A y B tienen la misma área, R y $R^{'}$ tienen la misma área, entonces $R \sim R^{'}$. Por tanto, $A \sim B$.

Este resultado se conoce como el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (Wallace-Bolyai-Gerwien)**.** *Dos polígonos son tijera-congruentes si y solo si tienen la misma área.*[16]

Si se tuviera el resultado similar para poliedros, dos poliedros son *tijera-congruentes* si y solo si tienen el mismo volumen, entonces se tendría una equivalencia entre área y volumen, como hemos ya señalado. Se tendría además una manera de calcular el volumen en términos elementales, y se respondería afirmativamente al tercer problema de Hilbert.

Al igual que con los polígonos, claramente dos poliedros que son *tijera-congruentes* tienen el mismo volumen, pero para el inverso no tenemos un teorema equivalente al de Wallace-Bolyai-Gerwien para poliedros. De hecho, Max Dehn demostró mediante un contraejemplo que si dos poliedros tienen el mismo volumen no necesariamente son *tijera-congruentes*. Dehn dio solución al tercer problema de Hilbert el mismo año que se enunció y por eso se le conoce a veces como el problema fácil de Hilbert, pero por fácil solo debemos entender que fue el primero de los 23 en ser resuelto. El resultado apareció publicado en 1901 en [4].

Para resolver este problema, Dehn usó métodos algebraicos y definió un invariante que ahora se conoce como el *invariante de Dehn.*

[15] Este procedimiento es euclidiano y se basa en proposiciones del Libro I.
[16] Se pueden ver los detalles de la demostración en [5].

Definición 2.3. Dado un poliedro $A \subset \mathbb{R}^3$ con longitudes de sus lados l_1, $l_2, \cdots, l_n$ y $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ el conjunto de sus ángulos diedros,[17] el *invariante de Dehn* de A es $\Delta(A) = l_1\delta(\alpha_1) + l_2\delta(\alpha_2) + \cdots + l_n\delta(\alpha_n)$ donde $\delta : M \cup \{\pi\} \to \mathbb{R}$ es una función aditiva tal que $\delta(\pi) = 0$.

Es claro que dos poliedros congruentes tiene el mismo *invariante de Dehn*. Además, el *invariante de Dehn* es preservado bajo la relación de ser *tijera-congruente*, es decir, si A y B son poliedros tales que $A \sim B$, entonces $\Delta(A) = \Delta(B)$.

Consideremos un poliedro A tal que $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, veamos que $\Delta(A) = \Delta(A_1) + \Delta(A_2) + \cdots + \Delta(A_n)$. Para este fin, sea $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ el conjunto de los ángulos diedros de A y $\delta : M \cup \{\pi\} \to \mathbb{R}$ una función aditiva tal que $\delta(\pi) = 0$. Sean también β_1^i, β_2^i, $\cdots$, $\beta_{r_i}^i$ los r_i ángulos diedros de A_i, con $1 \leqslant i \leqslant n$.

Definimos una función aditiva $\delta' : M \cup \{\pi\} \cup \{\beta_1^i\} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\delta'(x) = \begin{cases} \delta(x) & \text{si } x \neq \beta_1^i \\ 0 & \text{si no hay dependencia lineal} \\ & \text{con el coeficiente de } x, p \\ -\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{p}\delta(\alpha_i), \alpha_i \in M & \text{si hay dependencia lineal} \\ & \text{con el coeficiente de } x, p \end{cases}$$

Así, al agregar un ángulo diedro a la vez podemos definir una función aditiva δ^* del conjunto de todos los ángulos diedros de A y de todos los ángulos diedros de todas las piezas poliédricas de A, de forma que al ser evaluada en π sea cero. Es claro que el valor de $\Delta(A)$ es el mismo con la función δ que con la función δ^* y para determinar $\Delta(A_i)$ para cada i usamos la función δ^*.

Al comparar los invariantes $\Delta(A)$ y $\Delta(A_1) + \Delta(A_2) + \cdots + \Delta(A_n)$ observamos que algunos de los sumandos para calcular la suma de los invariantes de los $\Delta(A_i)$ serán iguales a algunos sumandos de $\Delta(A)$, aquellos en los que dos caras de las piezas poliédricas sean parte de dos caras de A. Por ejemplo en la figura 2, si consideramos la pieza poliédrica $ABCDEF$, sus caras $ABCD$ y $ABEF$ son de hecho caras del cubo. Considerando estas dos caras, el lado y el ángulo diedro en esta pieza poliédrica coinciden con los del cubo, de modo que este sumando del invariante de esta pieza coincide con un sumando del invariante del cubo.

Es posible que algunos de los sumandos para calcular la suma de los invariantes de los A_i no aporten nada en el resultado de $\Delta(A_1) + \Delta(A_2) + \cdots + \Delta(A_n)$. Por ejemplo, en la figura 2, el lado FC pertenece a ambas piezas poliédricas, el ángulo diedro que corresponde a una más

[17]Un ángulo diedro es el ángulo entre dos planos que se intersectan.

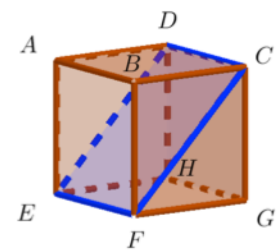

Figura 2. Cubo con dos piezas poliédricas.

el ángulo diedro que corresponde a la otra suman π, como la función aditiva en π se anula, entonces estos dos sumandos no aportarán nada en la suma de los invariantes. Esto pasará cuando el lado de una pieza poliédrica esté en una de las caras del poliedro, en este caso del cubo, o en la cara de una de las piezas poliédricas.

Otros de los sumandos para calcular la suma de los invariantes de los A_i serán iguales a alguno de los sumandos del invariante de A, a saber, los que tengan un lado en común con A. Por ejemplo, en la figura 2, el lado DC pertenece a ambas piezas poliédricas, el sumando correspondiente a una de las piezas más el sumando correspondiente a la otra pieza resultan en un solo sumando del invariante del cubo, el correspondiente a este lado.

Por último, algunos otros de los sumandos para calcular la suma de los invariantes de los A_i tampoco aportarán nada en el resultado de la suma, a saber, aquellos que tengan un lado de la pieza poliédrica en el interior de A. Por ejemplo, en la figura 3, el lado PQ es común a ambas piezas poliédricas, la suma de los ángulos diedros correspondientes de las dos piezas es 2π, y como la función aditiva en π se anula, entonces estos dos sumandos no aportarán nada en el cálculo del invariante.

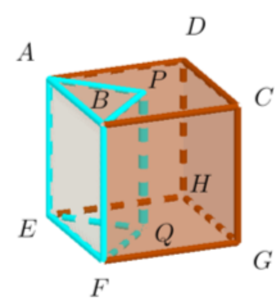

Figura 3. Otro cubo con dos piezas poliédricas.

Por tanto, $\Delta(A) = \Delta(A_1) + \Delta(A_2) + \cdots + \Delta(A_n)$ pues algunos de los sumandos para calcular la suma de los invariantes de los A_i son iguales a los de $\Delta(A)$, otros en conjunto resultan igual a los de $\Delta(A)$ y el resto se anulan. Entonces, si A y B son poliedros tales que $A \sim B$, se tiene que $\Delta(A) = \Delta(A_1) + \Delta(A_2) + \cdots + \Delta(A_n)$ y $\Delta(B) = \Delta(B_1) + \Delta(B_2) + \cdots + \Delta(B_n)$, donde A_i es congruente con B_i para toda i, por ello $\Delta(A_i) = \Delta(B_i)$ para toda i, por tanto $\Delta(A) = \Delta(B)$. Es decir, dos poliedros *tijera-congruentes* tienen el mismo *invariante de Dehn*.

Se puede demostrar ahora que el *invariante de Dehn* de un tetraedro regular T es $\Delta(T) \neq 0$, y que este invariante para un cubo C con el mismo volumen de T es $\Delta(C) = 0$. Es decir, son poliedros con el mismo volumen, pero diferente *invariante de Dehn*, por tanto no pueden ser *tijera-congruentes*.

A diferencia de los polígonos, donde tener la misma área es equivalente a ser *tijera-congruentes*, en los poliedros no es así. Dehn demostró que dos poliedros son *tijera-congruentes* si y solo si tienen el mismo volumen y el mismo *invariante de Dehn*.

Esta es la respuesta al tercer problema de Hilbert, no siempre es posible descomponer un poliedro y rearmarlo en otro con el mismo volumen. En el plano se pueden descomponer y rearmar polígonos y el área se mantiene invariante, pero en el espacio se pueden descomponer poliedros de tal forma que al rearmarlos no siempre se preserva el volumen.

Este hecho también nos dice que en el fondo los conceptos de área y volumen no son equivalentes, que la diferencia en las demostraciones de Euclides con respecto al área de triángulos y al volumen de pirámides es un aspecto esencial; para el concepto de volumen se necesitan métodos no elementales, en particular, es necesario el concepto de límite.

2.2 Paradoja de Banach-Tarski

El concepto de límite está intrínsecamente relacionado con el de infinito. Una característica que tienen en común estos conceptos es que en ocasiones rompen con lo que la intuición espera. Cantor y Dedekind fueron de los matemáticos que más profundizaron en el estudio y desarrollo del infinito, los primeros en mostrar cómo la noción de infinito rompe con la intuición, entre otras con una de las nociones euclidianas: *el todo es mayor que sus partes*. Dedekind en particular definió un conjunto infinito como aquel que es equipotente con un subconjunto propio.

Al estudiar teoría de conjuntos este aspecto pudiera dejar de parecer sobresaliente, no obstante, al trabajar con conjuntos infinitos junto y con la noción de volumen se obtiene un resultado notable que sorprende particularmente ya que implica, desde cierto punto de vista, que el todo no necesariamente es mayor que las partes. Este resultado también tiene otras importantes implicaciones, y es conocido como la paradoja de

Banach-Tarski. Cabe mencionar que este resultado no es una paradoja en el sentido lógico, es un teorema demostrado, el nombre de paradoja viene por lo anti-intuitivo que es.

La paradoja de Banach-Tarki fue demostrada en 1924 en [1] y afirma que una esfera se puede descomponer en dos esferas cada una con el mismo volumen que la original.

De hecho, el teorema demostrado en [1] es más general, afirma que: «En un espacio euclidiano de $n \geq 3$ dimensiones, dos conjuntos arbitrarios acotados y con interior no vacío (por ejemplo, dos esferas con radios distintos) son equivalentes por descomposición finita.»[18]

El aspecto central para la demostración de este teorema es considerar el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$. Se requieren dos rotaciones específicas, Φ y Ψ, tales que $\Phi^2 = I$ y $\Psi^3 = I$ (donde I es la identidad), y se consideran todas las rotaciones que se pueden obtener a partir de combinaciones finitas de éstas, en las que no aparezcan Φ^2 ni Ψ^3. Se demuestra que cualquier rotación así obtenida nunca es la identidad. Y posteriormente se considera G, el subgrupo generado por Φ y Ψ, y se hace ver que G es numerable.

Dada la superficie de la esfera $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ consideramos el conjunto D^* de los puntos tales que alguna de las rotaciones de G los deja fijos, este conjunto también es numerable. Posteriormente se determina en el conjunto $S \setminus D^*$ la relación de equivalencia dada por xRy si y solo si existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x) = y$. Como G es grupo, esta relación es de equivalencia. Finalmente, con el uso del axioma de elección se determina un conjunto M formado por un elemento de cada clase de equivalencia.

A partir de este conjunto M se determinan conjuntos A^*, B^* y C^* que en conjunto con D^* son una partición de S, y que satisfacen lo siguiente:

$$\Phi\left(A^*\right) = B^* \cup C^*, \Psi\left(A^*\right) = B^* \text{ y } \Psi^2\left(A^*\right) = C^*.$$

Lo que esto quiere decir es que se puede transformar A^* en B^* mediante una rotación, A^* en C^* mediante otra rotación, y también podemos transformar A^* en $B^* \cup C^*$ con otra rotación. De esta manera, se tienen tres conjuntos congruentes ya que se puede pasar de uno a otro con rotaciones, pero uno de ellos es congruente a la unión de los otros dos.

A partir de lo anterior, Banach y Tarski hacen ver que lo mismo ocurre con el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$, que es el resultado buscado. Se pueden revisar los detalles en [1] y en [18].

Desde Euclides el estudio del volumen de figuras ha mostrado aspectos sorprendentes e inesperados, comparándolo con el de área, Dehn

[18]En el artículo, Banach y Tarski definen la equivalencia de conjuntos por descomposición finita cuando los conjuntos se pueden descomponer en un número finito e igual de partes disjuntas respectivamente congruentes entre sí.

demostró que no son equivalentes, y con ello que el concepto de límite es necesario para el cálculo del volumen, que la demostración del resultado sobre el volumen de pirámides de Euclides no puede darse como el del área de triángulos, el del volumen requiere el concepto de límite, lo que implica que el concepto de volumen no se sigue de cuestiones elementales.

Aunado a lo anterior la paradoja de Banach-Tarski presenta un aspecto más general, Dehn demostró que el volumen no necesariamente se mantiene al descomponer poliedros en piezas y rearmarlos, que no es un invariante bajo isometrías;[19] mientras que la paradoja de Banach-Tarski muestra que el volumen puede incluso aumentar indefinidamente al descomponer en piezas, pues las dos esferas que se obtienen a su vez se pueden volver a descomponer en otras dos, y así sucesivamente. En resumen, el volumen además de que no se preserva al descomponer en piezas, tampoco está acotado.

Buscar la respuesta de por qué se puede duplicar el volumen de una esfera obteniendo dos esferas con el mismo volumen a la primera mediante rotaciones, lleva a preguntarse entonces ¿qué es el volumen?, y la respuesta nos lleva al concepto de medida introducido por Henri Lebesgue en su tesis doctoral de 1902 [13].

Este concepto formaliza y generaliza las nociones de longitud, área y volumen, y Lebesgue lo define de la siguiente manera:

> Nos proponemos asignar a cada conjunto acotado un número positivo o nulo que llamaremos su medida y que satisfará las siguientes condiciones:
> 1. Existen conjuntos cuya medida no es nula.
> 2. Dos conjuntos iguales [en el sentido de congruencia] tendrán la misma medida.
> 3. La medida de la unión finita o numerable de conjuntos ajenos dos a dos es la suma de las medidas de dichos conjuntos.

Y Lebesgue añade que resolverá este *problema de la medida* únicamente para los conjuntos medibles. En la tesis de Lebesgue no hay algún comentario sobre la posibilidad de que existan conjuntos a los cuales no les pueda ser asignada una medida, es decir, conjuntos para los cuales no se puede resolver el problema de la medida. Sin embargo, tres años más tarde Giuseppe Vitali demostró en [17] que en efecto existen conjuntos no medibles, o equivalentemente, que el problema de la medida como fue planteado por Lebesgue no se puede resolver.

A la esfera, como conjunto, se le puede asignar una medida, su volumen, pero hay subconjuntos de la misma que no son medibles, y al

[19]Una isometría es una aplicación entre espacios métricos que preserva distancias y ángulos.

rearmar estos conjuntos, con las posibilidades de rotación de $\mathbb{R}^3$, el volumen no se preserva, de modo que la medida del todo no necesariamente se obtiene de la medida de las partes, mientras que para los polígonos sí.

3. Conclusiones

Los conjuntos no-Lebesgue medibles son una de las razones para poder duplicar el volumen de una esfera mediante una descomposición finita, la otra razón es el álgebra que subyace al grupo de rotaciones en el espacio.

Hablando de áreas en el plano, cualquier figura que se descomponga en piezas y se rearme conserva el área, aunque las piezas sean conjuntos no-medibles. Un problema interesante en este sentido es el conocido como la cuadratura del círculo de Tarski. Tarski se preguntó si sería posible cortar un disco en un número finito de piezas con las que se pueda ensamblar un cuadrado.

La respuesta al problema de Tarski fue afirmativa como lo demostró Laczkovich en 1994 en [12]. En su demostración aparecen conjuntos no medibles pero aún con estos conjuntos el área no cambia al rearmar las piezas. De hecho, en 2017 Lukasz Grabowski, András Máthé y Oleg Pikhurko probaron en [7] que se puede hacer la descomposición del disco usando únicamente conjuntos medibles.

De esta manera observamos que el uso de conjuntos no-medibles es necesario, pero no suficiente, para duplicar el volumen de la esfera mediante una descomposición finita. Para poder obtener el resultado de la paradoja de Banach-Tarski se requiere además contar con la estructura del grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y esta es la diferencia central con los resultados que se pueden obtener en $\mathbb{R}^2$.

Es por estas razones que el concepto de volumen es fundamentalmente distinto al de área y que dos poliedros con el mismo volumen no necesariamente son *tijera-congruentes*. Esto, a su vez, implica que el concepto de volumen requiere del concepto de límite como ya se mostró.

Bibliografía

[1] A. Banach y S. Tarski, «Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents», *Fundamenta Mathematicae*, núm. 6, 1924, 244–277.

[2] V. Boltianskii G, *Hilbert's third problem*, V. H. Winston & Son, Washington, D. C., 1978.

[3] C. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., EEUU, 1991.

[4] M. Dehn, «Ueber den rauminhalt», *Mathematische Annalen*, vol. 6, núm. 55, 1901, 465–478.

[5] N. Do, «Scissors congruence and Hilbert's third problem», *Gazette of the Australian Mathematical Society*, 2006, 81–87.
[6] M. T. Flores Mederos, «La Paradoja de Banach-Tarski», *Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos*, 2000, 125–128.
[7] Ł. Grabowski et al., «Measurable circle squaring», *Annals of Mathematics*, vol. 185, núm. 2, 2017, 671–710.
[8] T. L. Heath, ed., *The thirteen books of Euclid's elements*, 2.ª ed., Dover, New York, EEUU, 1956.
[9] T. L. Heath, ed., *The works of Archimedes*, Dover, Reino Unido, 2002.
[10] D. Hilbert, «Mathematical problems», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 8, núm. 10, 1902, 437–479.
[11] V. Jullien, *Seventeenth-century indivisibles revisited*, Birkhauser, 2015.
[12] M. Laczkovich, «Paradoxical decompositions: a survey of recent results», *First European Congress of Mathematics Vol. II*, núm. Birkhäuser, Basel, 1994, 159–184.
[13] H. Lebesgue, «Intégrale, longueur, aire», *Annali di Mathematica*, vol. III-7, 1902, 31–129.
[14] J. Rivera, «La Paradoja de Banach-Tarski», *Pro Mathematica*, vol. 10, 1996, 113–121.
[15] G. d. Saint-Vincent, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Amberes, 1647.
[16] E. E. Solis de los Reyes, «Del método de exhaución al concepto de límite», Tesina para la Especialidad de Matemáticas para Bachillerato, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2017.
[17] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.
[18] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, New York, EEUU, 1985.