Miscelánea Matemática **74** (2022) 51-58 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7406

Medida y topología: la línea de Sorgenfrey

Rafael Correa Morales
Centro de Investigación en Matemáticas
rafael.correa@cimat.mx
y
Fernando Galaz Fontes
Centro de Investigación en Matemáticas
galaz@cimat.mx

1. Introducción

Podemos decir que los conceptos básicos en teoría de la medida son el de σ-álgebra y el de medida. Una colección Σ de subconjuntos en un conjunto fijo Ω es una *σ-álgebra* si $\emptyset \in \Sigma$, para cada $A \in \Sigma$, se cumple que $\Omega \setminus A \in \Sigma$, y para cada sucesión $\{A_k\}_k$ en Σ, se satisface que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$. A los elementos de una σ-álgebra Σ se les llama *conjuntos medibles* y se dice que el par (Ω, Σ) es un *espacio medible*.

Una función $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ es una *medida* si $\mu(\emptyset) = 0$, y para cada sucesión $\{A_k\}_k$ en Σ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

A la terna (Ω, Σ, μ) se le llama *espacio de medida* y, en este caso, se acostumbra decir que μ es una medida en Ω.

Ejemplo 1.1. El conjunto potencia de Ω, el cual denotamos por 2^{Ω}, es una σ-álgebra en Ω, y la función constante cero en 2^{Ω} es una medida. Así, en cualquier conjunto siempre podemos definir una medida.

Al utilizar una medida μ destacan tres propiedades:

1. Es *monótona*: para cada $A, B \in \Sigma$ tales que $A \subseteq B$, se cumple $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Es *σ-subaditiva*: para cada $A \in \Sigma$ y cada sucesión $\{A_k\}_k$ en Σ tales que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, se satisface que $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Palabras clave: medida exteriormente regular, medida de Radón, medida de Lebesgue y línea de Sorgenfrey.

3. Es *convergentemente ascendente*: para cada sucesión $\{A_k\}_k$ en Σ tal que $A_k \subseteq A_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Entre las medidas se distinguen las que son finitas y, más ampliamente, las que son σ-*finitas* (sigma-finitas). Una medida μ es *finita* si $\mu(\Omega) < \infty$; en este caso, para $A, B \in \Sigma$ tales que $A \subseteq B$, se cumple que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Por otra parte, μ es σ-*finita* si existe una sucesión $\{A_k\}_k$ en Σ tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ y $\mu(A_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$.

Aunque la teoría de la medida no requiere de ninguna estructura adicional, en diversas y muy importantes situaciones el espacio de medida E posee una topología τ. Surge entonces la posibilidad de que algunas medidas en E tengan propiedades relacionadas con los correspondientes conjuntos abiertos, cerrados o compactos. Es así que aparece naturalmente la σ-álgebra generada por sus conjuntos abiertos. Esta se denota por $\beta(E)$ y se define por

$$\beta(E) := \bigcap \{\Sigma : \Sigma \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } E \text{ y } \tau \subseteq \Sigma\}.$$

A $\beta(E)$ se le conoce como la σ-*álgebra de Borel* en E, a sus conjuntos medibles se les llaman *borelianos* y a las medidas definidas en $\beta(E)$ se les nombra *medidas de Borel*. Finalmente, al espacio $(E, \beta(E), \mu)$ le llamamos *espacio de Borel* y lo denotaremos simplemente por (E, μ).

Notemos que para cada espacio de medida (E, Σ, μ) tal que $\beta(E) \subseteq \Sigma$, por la monotonía de μ, siempre se cumple que

$$\begin{aligned} &\mu(A) \leq \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\}, \\ &\mu(A) \geq \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\}, \forall A \in \Sigma. \end{aligned}$$

Resulta importante que las desigualdades anteriores sean igualdades, y es así que en un espacio de Borel (E, μ) aparecen las siguientes propiedades básicas:

1. La medida μ es *localmente finita* si para cada $x \in E$, existe un abierto U de E tal que $x \in U$ y $\mu(U) < \infty$.
2. Un conjunto boreliano $A \subseteq E$ es *exteriormente regular* si

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\}.$$

   La medida μ es *exteriormente regular* si todo boreliano es exteriormente regular.
3. Un conjunto boreliano $A \subseteq E$ es *interiormente regular* si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

La medida μ es *interiormente regular* si todo boreliano es interiormente regular.

4. La medida μ es *de Radón* si es exteriormente regular, todo conjunto abierto es interiormente regular y es localmente finita,.

Observemos que si μ es localmente finita, entonces $\mu(K) < \infty$, para cada conjunto compacto $K \subseteq E$.

Además de ser interesantes matemáticamente, las medidas de Radón tienen importantes aplicaciones en diferentes campos de las matemáticas como en ecuaciones diferenciales parciales.

El propósito de este trabajo es utilizar la medida de Lebesgue para ilustrar las propiedades de regularidad en dos espacios topológicos específicos: $\mathbb{R}$ con su topología usual y la línea de Sorgenfrey, que es $\mathbb{R}$ con otra topología. Para ello empezamos bosquejando la construcción de la topología usual y de la medida de Lebesgue, ambas en $\mathbb{R}$. Después verificaremos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es de Radón. Finalmente veremos que una diferencia crucial entre ambas topologías es que en la línea de Sorgenfrey los conjuntos compactos son numerables, y esto implicará que ahí la medida de Lebesgue no es de Radón.

2. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Consideremos $E = \mathbb{R}$ y notemos que la colección de intervalos abiertos

$$\mathcal{R} := \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

es una base para la topología *estándar* τ de $\mathbb{R}$ [4, p. 80]. Al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ se le suele denotar simplemente por $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}$ un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado, y por lo tanto $\mathbb{R}$ no es compacto. Aún así, ya que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n]$, el espacio $\mathbb{R}$ es σ-compacto, es decir, es una unión numerable de conjuntos compactos.

Describiremos enseguida, a grandes rasgos, cómo se puede construir la medida de Lebesgue en $\Omega = \mathbb{R}$. Esta construcción sigue las ideas originales de Henri Léon Lebesgue [3].

Empezamos por notar que la longitud de los intervalos en $\mathcal{R}$ proporciona la función *longitud* $\ell : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definida por

$$\ell((a,b)) = b - a, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b.$$

Enseguida introducimos la *medida exterior* $\ell^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ dada por

$$\ell^*(A) := \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}.$$

La medida exterior ℓ^* es una extensión de la función longitud y la necesidad de que ℓ^* sea σ-aditiva condujo a Constantin Carathéodory a considerar la colección

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq \mathbb{R} : \ell^*(B) = \ell^*(B \setminus A) + \ell^*(B \cap A), \forall B \subseteq \mathbb{R}\}. \qquad (1)$$

Resulta entonces que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$, llamada la *σ-álgebra de Lebesgue* en $\mathbb{R}$, y a sus elementos se les conoce como conjuntos *Lebesgue-medibles*. Además, la restricción de ℓ^* a $\mathcal{M}$ es una medida en $\mathbb{R}$ y $\tau \subseteq \mathcal{M}$ [2, p. 25]. Como $\beta(\mathbb{R})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a τ, resulta que $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}$. Finalmente, a la restricción de ℓ^* a $\beta(\mathbb{R})$ le llamaremos *medida de Lebesgue* (en $\mathbb{R}$) y la denotaremos por m. Notemos que m es una medida de Borel con respecto a la topología estándar de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_d)$, donde $\tau_d = 2^{\mathbb{R}}$ es la topología discreta. Ya que existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible [2, p. 41], entonces $\mathcal{M} \subsetneq 2^{\mathbb{R}} = \beta(\mathbb{R})$, y por lo tanto la medida de Lebesgue no es de Borel respecto a la topología discreta.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $\{x\}$ es cerrado, y por lo tanto boreliano, y se satisface que $\{x\} \subseteq I_n := (x-1/n, x+1/n), \forall n \in \mathbb{N}$. Ya que $m(I_n) = 2/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por la monotonía de m, se obtiene que

$$0 \leq m(\{x\}) \leq \frac{2}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De lo anterior, se sigue que $m(\{x\}) = 0$.

Consideremos ahora un subconjunto numerable A de $\mathbb{R}$. Si $A = \emptyset$, claramente $m(\emptyset) = 0$. Supongamos entonces que $A \neq \emptyset$ y expresémoslo en la forma $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k\} \in \beta(\mathbb{R})$ y $m(\{a_k\}) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Haciendo uso de la σ-subaditividad de m, resulta que

$$0 \leq m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\{a_k\}) = 0.$$

Esto prueba que cada subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es un boreliano y tiene medida de Lebesgue igual a cero.

Teorema 2.2. *La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es localmente finita.*
2. *Es exteriormente regular.*
3. *Es interiormente regular.*

En particular, es de Radón.

Demostración. 1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in (x-1, x+1)$ y se cumple que $m((x-1, x+1)) = \ell((x-1, x+1)) = 2 < \infty$. Por lo tanto la medida de Lebesgue es localmente finita en $\mathbb{R}$.

2. Sea $A \in \beta(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} m(A) &\leq \text{ínf}\,\{m(V) : A \subseteq V \text{ y } V \text{ es abierto}\} \\ &\leq \text{ínf}\left\{m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right) : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} \\ &\leq \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} = m(A). \end{aligned}$$

Esto prueba que m es exteriormente regular en $\mathbb{R}$.

3. Consideremos primero un conjunto boreliano B que además sea acotado. Tomemos $r > 0$ tal que $B \subseteq C := [-r, r]$. Fijemos $\epsilon > 0$. Ya que $C \setminus B \in \beta(\mathbb{R})$, $C \setminus B \subseteq C$ y ya probamos que la medida de Lebesgue es exteriormente regular, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $C \setminus B \subseteq U$ y $m\,(U \setminus (C \setminus B)) < \epsilon$. Ahora definimos $F := C \setminus U \subseteq C$. Ya que F es cerrado y acotado, entonces es compacto. Observando que $B \setminus F = B \cap U \subseteq U \setminus (C \setminus B)$, por la monotonía de m, se obtiene que

$$m(B \setminus F) \leq m\,(U \setminus (C \setminus B)) < \epsilon.$$

De lo anterior se sigue que B es interiormente regular.

Veamos ahora el caso general. Sea A un conjunto boreliano. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n := A \cap [-n, n]$ es un conjunto boreliano y $A_n \subseteq A_{n+1}$. Por el caso inicial se sigue que

$$\begin{aligned} m(A_n) &= \sup\{m(C) : C \subseteq A_n \text{ y } C \text{ es compacto}\} \\ &\leq \sup\{m(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\} \leq m(A), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, por la convergencia ascendente, se obtiene que

$$m(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Esto prueba que m es interiormente regular. □

Terminamos esta sección describiendo la construcción de la medida de Lebesgue en $\Omega = \mathbb{R}^n$. El procedimiento es similar, solo que en lugar de intervalos abiertos, consideramos ahora la colección de rectángulos abiertos

$$\mathcal{S} := \{(a_1, b_1) \times \ldots (a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Definimos la función $V : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ por

$$V((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

e introducimos después la función $V^* : 2^{\Omega} \to [0, \infty]$ dada por

$$V^*(A) := \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} V(Q_k) : \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right\}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en (1) se construye la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, y resulta también que es una medida de Radón, respecto a su topología usual [2, p. 121]. Más generalmente, cualquier medida σ-finita en un espacio métrico completo y separable es de Radón [1, p. 70].

3. La medida de Lebesgue en la línea de Sorgenfrey

A continuación presentamos una topología para $\mathbb{R}$ respecto a cual la medida de Lebesgue no es de Radón.

La colección de conjuntos $\mathcal{S} := \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para alguna topología en $\mathbb{R}$. Al espacio topológico generado por $\mathcal{S}$, al cual denotaremos por $\mathbb{R}_\ell$, se le conoce como la *línea de Sorgenfrey* ([1, p. 74]). En seguida estableceremos las propiedades que nos interesan de la línea de Sorgenfrey.

Observemos que para $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, se cumple que $x \in [x-1, y)$, $y \in [y, y+1)$ y $[x-1, y) \cap [y, y+1) = \emptyset$. Así, $\mathbb{R}_\ell$ es un espacio topológico de Hausdorff. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se cumple que

$$(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{b-a}{n}, b\right).$$

Esto implica que todo abierto en $\mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}_\ell$, y por lo tanto todo cerrado en $\mathbb{R}$ es cerrado en $\mathbb{R}_\ell$.

Lemma 3.1. *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}_\ell$. Entonces existen un conjunto numerable A y un abierto V de $\mathbb{R}$ tales que $U = A \cup V$.*

Demostración. Por definición de $\mathbb{R}_\ell$ existen un conjunto de índices I y $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$, $a_\alpha < b_\alpha, \alpha \in I$, tales que $U = \bigcup_{\alpha \in I} [a_\alpha, b_\alpha)$. Definamos

$$A := \bigcup_{\alpha \in I} [a_\alpha, b_\alpha) \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Observemos que $A \subseteq \{a_\alpha : \alpha \in I\}$. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y fijemos $a \in A$. Entonces existe $\alpha_a \in I$ tal que $a = a_{\alpha_a}$. Se sigue entonces que

$$(a, b_{\alpha_a}) \cap A = \emptyset. \tag{2}$$

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos escoger $q_a \in (a, b_{\alpha_a}) \cap \mathbb{Q}$.

Sean $a, c \in A$ tales que $a \neq c$. Notemos que si $(a, b_{\alpha_a}) \cap (c, b_{\alpha_c}) \neq \emptyset$, entonces $a \in (c, b_{\alpha_c})$ o $c \in (a, b_{\alpha_a})$, lo cual no es posible por (2). En consecuencia, la correspondencia $J : A \to \mathbb{Q}$ definida por $J(a) := q_a$, es una función inyectiva. Luego, A es numerable.

Finalmente, definimos $V := \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$, el cual es un abierto en $\mathbb{R}$, y se cumple que $U = A \cup V$. Lo cual concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado muestra que aún cuando la topología $\tau_{\mathcal{S}}$ es más fina que la topología τ, esto es $\tau \subsetneq \tau_{\mathcal{S}}$, los conjuntos borelianos de ambas topologías coinciden.

Proposición 3.2. $\beta(\mathbb{R}_\ell) = \beta(\mathbb{R})$.

Demostración. Ya que $\tau \subseteq \beta(\mathbb{R}_\ell)$, se obtiene que $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \beta(\mathbb{R}_\ell)$.

Sea U un abierto en $\mathbb{R}_\ell$. Por el lema 3.1, se tiene que $U = N \cup V$, donde N es un conjunto numerable y V es un abierto en $\mathbb{R}$. Como $N, V \in \beta(\mathbb{R})$, resulta que $U \in \beta(\mathbb{R})$. Así, $\tau_{\mathbb{R}_\ell} \subseteq \beta(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\beta(\mathbb{R}_\ell) \subseteq \beta(\mathbb{R})$. □

La proposición anterior implica que m es de Borel en $\mathbb{R}_\ell$.

Proposición 3.3. *La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_\ell$ es localmente finita y exteriormente regular.*

Demostración. La medida de Lebesgue m es localmente finita pues, para cada $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $x \in [x, x+1) \in \tau_{\mathcal{S}}$ y $m([x, x+1)) = 1$.

Ya que todo abierto en $\mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}_\ell$ y que la medida de Lebesgue es de Radón en $\mathbb{R}$, para cada $A \in \beta(\mathbb{R}_\ell)$ se satisface que

$$\begin{aligned} m(A) &\leq \text{ínf}\,\{m(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto en } \mathbb{R}_\ell\} \\ &\leq \text{ínf}\,\{m(V) : A \subseteq V \text{ y } V \text{ es abierto en } \mathbb{R}\} = m(A). \end{aligned}$$

Luego, m es exteriormente regular. □

Hemos visto que la línea de Sorgenfrey tiene algunas propiedades topológicas en común con $\mathbb{R}$. Ahora presentamos una propiedad de la línea de Sorgenfrey que implica que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_\ell$ no es de Radón.

Proposición 3.4. *Los compactos en $\mathbb{R}_\ell$ son conjuntos numerables.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto no vacío en $\mathbb{R}_\ell$. Para cada $a \in K$, consideremos la cubierta abierta

$$\mathcal{U}_a := \{[a, \infty)\} \cup \left\{ \left(-\infty, a - \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dado que K es compacto, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $(a - \frac{1}{n_a}, a] \cap K = \{a\}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos escoger $q_a \in (a - \frac{1}{n_a}, a] \cap \mathbb{Q}$.

Sean $a, b \in K$, $a \neq b$. Observemos que si $(a - \frac{1}{n_a}, a] \cap (b - \frac{1}{n_b}, b] \neq \emptyset$, entonces $a \in (b - \frac{1}{n_b}, b]$ o $b \in (a - \frac{1}{n_a}, a]$, lo cual no es posible por como fueron escogidos n_a y n_b. Por lo tanto $(a - \frac{1}{n_a}, a] \cap (b - \frac{1}{n_b}, b] = \emptyset$.

Finalmente, definimos la función $J : K \to \mathbb{Q}$ por $J(a) = q_a$, la cual está bien definida y es inyectiva. Luego K es a lo más numerable. □

Observemos que la proposición anterior implica que $\mathbb{R}_\ell$ no es un espacio σ-compacto.

Hemos visto que todo conjunto numerable en $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible y tiene medida de Lebesgue cero. Por lo tanto $m(K) = 0$, para cada compacto K en $\mathbb{R}_\ell$. Esto permite concluir que cualquier abierto no vacío de $\mathbb{R}_\ell$ no es interiormente regular.

Por otra parte, aunque no se puede garantizar que cualquier boreliano en $\mathbb{R}_\ell$ se pueda aproximar interiormente por compactos, veremos enseguida que sí es posible hacerlo por cerrados.

Definición 3.5. Sea (E, μ) un espacio de Borel. La medida μ es *C-interiormente regular* si

$$\mu(B) = \sup \{\mu(F) : F \subset B \text{ y } F \text{ es cerrado}\}, \forall B \in \beta(E).$$

Observemos que las medidas interiormente regulares en un espacio de Hausdorff son C-interiormente regulares.

Proposición 3.6. *La medida m es C-interiormente regular en $\mathbb{R}_\ell$.*

Demostración. Ya que m es C-interiormente regular en $\mathbb{R}$, para cada $B \in \beta(\mathbb{R}_\ell) = \beta(\mathbb{R})$, se obtiene que

$$\begin{aligned} m(B) &= \sup \{m(C) : C \subseteq B \text{ y } C \text{ es cerrado en } \mathbb{R}\} \\ &\leq \sup \{m(F) : F \subseteq B \text{ y } F \text{ es cerrado en } \mathbb{R}_\ell\} \leq m(B). \end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. □

Agradecimientos

Los autores agradecen las sugerencias y comentarios de los revisores, lo cual permitió mejorar la presentación de este trabajo.

Bibliografía

[1] V. Bogachev, *Measure theory*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007, https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5.

[2] F. Galaz-Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$, Oxford University Press-CIMAT, México, 2002.

[3] F. Galaz-García, «Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue», *Miscelánea Matemática, SMM*, núm. 44, 2007, 83–100.

[4] J. Munkres, *Topology*, 2.ª ed., Pearson New International Edition, 2000.