Miscelánea Matemática 39 (2004) 61–84 SMM

La Función Gama

Juan José Rivaud
Sección de Metodología y
Teoría de la Ciencia
CINVESTAV
jrivaud@mail.cinvestav.mx

Presentación

El presente trabajo tiene como antecedente una versión previa elaborada para el III Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. Los organizadores de la reunión me pidieron que como complemento a un curso de variable compleja ofrecido dentro del programa, en poco más de dos horas, hiciese un resumen de la función Γ. Recuerdo que en esa ocasión no me decidía por exponer de manera tradicional y pretender dar un panorama elemental de la función Γ, o hacerlo en forma más amable cubriendo únicamente algunos temas.

Hace unos meses revisando mis archivos volví a tropezarme con este material y me pareció que seguía teniendo sentido ofrecérselo a los estudiantes y maestros de las licenciaturas en matemáticas como complemento de un curso de variable compleja. Me pregunté nuevamente lo mismo, si no sería mejor un planteamiento más amable, lo cual implicaba seleccionar el material y eliminar una buena parte de éste; o usar la presentación, definición, teorema, corolario, definición... tomando la misma decisión que hace veinte años.

Esta nueva versión difiere de la primera en que se ha mejorado la redacción y se han incorporado algunas aplicaciones sencillas más. Como sucede con frecuencia uno está tentado a exponer aplicaciones más delicadas y poderosas, que pongan de manifiesto la fuerza de la teoría, pero ello haría que creciese desproporcionadamente el tamaño del trabajo por lo que a pesar del consejo de los revisores no lo hicimos y únicamente damos algo de bibliografía al respecto.

Por último, quiero darle las gracias por sus comentarios y sugerencias a la Dra. Ana Meda de la Fac. de Ciencias de la

UNAM, al Dr. Raúl Rueda del Inst. de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas de la UNAM, y al Dr. Carlos Ibarra del Departamento de Matemáticas de la UAM-I.

Ojalá y estas notas les sean de utilidad a algunos de los lectores.

1. Introducción y motivación

Una de las herramientas de gran uso en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales es la transformada de Laplace de una función $f(x)$, definida para $x > 0$ y denotada por $\mathcal{L}\left(f\left(x\right)\right)$. Está definida por

$$\mathcal{L}\left[f\left(x\right)\right]\left(s\right) = \int_0^\infty e^{-sx} f\left(x\right) dx \,,$$

y tiene sentido para toda s en la que la integral existe.

En el estudio de este objeto matemático se ha trabajado intensamente y son innumerables los libros y monografías que le dedican uno o varios capítulos.

Como es natural uno de los primeros problemas que se consideran es el cálculo de transformadas de funciones sencillas, como por ejemplo x^{n-1} (la elección del coeficiente $n-1$ es para simplificar la notación),

$$\mathcal{L}\left[x^{n-1}\right]\left(s\right) = \int_0^\infty e^{-sx} x^{n-1} dx \qquad (n > 0) \ ,$$

que introduciendo el cambio $sx = t$, nos da

$$\mathcal{L}\left[x^{n-1}\right]\left(s\right) = \frac{1}{s^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt \,.$$

La expresión anterior nos dice que

$$\mathcal{L}\left[x^{n-1}\right]\left(s\right) = \frac{k\left(n\right)}{s^n} \,,$$

teniendo así determinada la transformada, módulo la constante $k(n)$, la cual sólo depende de n y que está dada por

$$k\left(n\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt \qquad (n > 0) \ .$$

Esta misma integral aparece con frecuencia en la solución de diversos problemas, y en muchos casos nos interesa su valor para n no es un número natural (ejemplo de ello es precisamente el de la transformada de Laplace de x^{n-1} que acabamos de plantear, en donde n puede ser cualquier real mayor que cero). Dicha integral es lo que llamamos *función Gama.*

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt \qquad (\lambda > 0) \; .$$

Las siguientes páginas están dedicadas a su estudio.

Al igual que con otras funciones, la definición no solo tiene sentido para λ real mayor que cero, sino también para números complejos, y es dentro de este marco que su estudio se vuelve más claro. En este caso la definición tiene sentido para cualquier complejo con parte real positiva pues, tomando el valor principal de t^{z-1}, la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1}$$

es convergente. Su derivada viene dada por

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ell_n(t) dt \,. \tag{2}$$

Integral que también converge para $Re(z) > 0$. Más adelante veremos que se puede continuar analíticamente a todo el plano complejo, excepto a los enteros negativos $z = -n$ donde tiene polos simples con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$.

La función Γ es considerada la generalización a los complejos de la función factorial, pues

$$\Gamma(n+1) = n! \,.$$

Para darnos cuenta de la validez de esta última relación primero observemos que

$\Gamma(1) = 1 \qquad \left(\Gamma(1) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^k e^{-t} dt = \lim\limits_{k\to\infty} \left[e^0 - e^{-k}\right] = 1\right)$ y notemos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (\text{por ahora para } Re(z) > 0) \,. \tag{3}$$

Para ello basta integrar por partes. Luego

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\cdots 2\Gamma(1) = n!$$

2. La Función Γ como un producto infinito

Son muy útiles las expresiones como productos infinitos de la función Γ que a continuación desarrollamos.

2.1. Fórmula de Euler y sus consecuencias.

Recordemos que

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n ,$$

luego,

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \\ &= \lim_{n\to\infty} n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds\,.\end{aligned}$$

Integrando por partes n veces, tenemos que:

$$\int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds =$$

$$\left[\frac{1}{z}s^z(1-s)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-s)^{n-1}s^z ds = \ldots = \frac{n(n-1)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+n)} ,$$

por lo que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)\left(\frac{2}{z+2}\right)\cdots\left(\frac{n}{z+n}\right)\frac{2^z}{1^z}\frac{3^z}{2^z}\cdots\frac{(n-1)^z}{(n-2)^z}\frac{n^z}{(n-1)^z} ,$$

o sea

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right] . \tag{4}$$

Este producto es convergente para toda z distinta de $0, -1, -2, ..., -n, ...$ Por lo tanto ya tenemos una expresión que nos sirve para expresar Γ sin la restricción que teníamos originalmente de que $Re(z) > 0$.

La relación anterior es conocida como Fórmula de Euler, pues es él quien la establece por primera vez en 1729 en una carta a Goldbach. Posteriormente es usada por Gauss como definición de la función $\Gamma(z)$.

Como corolarios inmediatos de esta fórmula (basta analizar cada uno de los factores) tenemos que:

1. La función Γ tiene polos simples en los puntos $0, -1, -2, ..., -n, ...$ con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$.
2. La función Γ no toma el valor cero para ninguna z.

También a partir de este producto infinito podemos demostrar en general la fórmula (3). Para ello consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} &= \frac{\frac{1}{z+1}\prod\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z+1}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1}}{\frac{1}{z}\prod\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}} \\
&= \frac{z}{z+1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(z+n)}{z+n+1}\right\} \\
&= z\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{z+N+1} \\
&= z
\end{aligned}$$

que implica el resultado.

Otra consecuencia directa de este producto y del hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \tag{5}$$

es la relación que existe entre las funciones trigonométricas y la función Γ, la cual se obtiene considerando la siguiente expresión

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\prod\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right]\frac{1}{-z}\prod\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\left(1-\frac{z}{n}\right)^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{-z^2\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)},$$

y sustituyendo el producto infinito por su valor, tenemos:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\ \operatorname{sen}(\pi z)} \tag{6}$$

de donde, usando que $\Gamma(-z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{z}$, sustituyendo y cancelando, concluimos

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}. \tag{7}$$

Como caso particular de esta última relación, tenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \pi\,,$$

luego

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,. \tag{8}$$

(De la expresión como producto infinito o de la definición original sabemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$).

Haciendo uso de la definición original y aplicando este resultado, como corolario, tenemos que

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \tag{9}$$

(para la última igualdad sustituya $t = x^2$).

Esta última integral esta relacionada con Probabilidad, en particular con la distribución normal. Es de hacer notar que la integral $\int_0^x e^{-t^2}dt$ no puede expresarse por alguna función elemental, lo que no es inmediato de probar.

Otra consecuencia de la fórmula de Euler es la que se conoce como la *Fórmula de la Duplicación*:

$$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\,. \tag{10}$$

Para su deducción consideremos

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,n^{2z+\frac{1}{2}}}{\left[z(z+1)\dots(z+n)\right]\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\dots\left(z+\frac{2n+1}{2}\right)\right]}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,n^{2z+\frac{1}{2}}2^{2n+2}}{2z(2z+1)\dots(2z+2n+1)}\,.\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!\,(2n+1)^{2z}}{2z(2z+1)\dots(2z+2n+1)}\,,$$

luego,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\,(n!)^2\,2^{2n+2}}{(2n+1)!}\left[\frac{n}{2n+1}\right]^{2z}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\,(n!)^2\,2^{2n+2}}{(2n+1)}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+1}\right]^{2z}\,.\end{aligned}$$

Si cada límite existe. Ahora bien, el segundo límite es directo

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+1}\right]^{2z}=2^{-2z}\,.$$

En la expresión del primer límite no aparece z, luego podemos calcularlo, por ejemplo, tomando z igual a $\frac{1}{2}$, es decir

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\left(n!\right)^2 2^{2n+2}}{(2n+1)}2^{-1}\,,$$

de aquí se sigue directamente la fórmula de duplicación. Esta fórmula es debida a Legendre. Su generalización, que esta dada por

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,n^{\frac{1}{2-nz}}\Gamma(nz)\,. \tag{11}$$

conocida como el *teorema de multiplicación de Gauss*, se demuestra esencialmente de la misma manera. Se invita al lector a hacerlo.

Al lector interesado en familiarizarse más con la función Γ, le sugerimos que:

i) Usando las fórmulas desarrolladas, calcule

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)\,.$$

ii) Demuestre que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\,.$$

2.2. Forma canónica de Weierstrass.

Para definir la función gama, Weierstrass usa la expresión como producto, que a continuación desarrollamos. Dicha relación había ya sido publicada por F.W. Newman en 1848.

De la fórmula previa a la de Euler, tenemos directamente que:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left[z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\ell_n(n)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[z\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{1}{z}z}\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}z}e^{\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ell_n(n)\right]z}\right]$$

.

Este segundo paso tiene sentido porque, como veremos a continuación, $\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ell_n(n)\right\}$ es convergente; al límite se le denota por γ y es llamado la constante de Euler-Mascheroni. Luego:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right], \tag{12}$$

expresión conocida como *Fórmula canónica de Weierstrass.*

Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ell_n(n)\right]$ existe; para ello consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} &= \int_0^\infty\left(e^{-t}+e^{-2t}+\ldots+e^{-nt}\right)dt\\ &= \int_0^\infty\left(e^{-t}+\left(e^{-t}\right)^2+\ldots+\left(e^{-t}\right)^n\right)dt\\ &= \int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{1-e^{t}}dt,\end{aligned}$$

y

$$\ell_n(n)=\int_1^n dx\int_0^\infty e^{-xt}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt.$$

Restando ambas expresiones, tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ell_n(n)=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-t}+e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{t}-e^{-nt}}{t}\right]dt,$$

cuyo límite es la integral convergente

$$\gamma=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt. \tag{13}$$

El valor de esta constante fue calculada por J.C. Adams hasta 260 decimales, los primeros son: 0.577215. Le pedimos al lector que pruebe que $\gamma=\Gamma'(1)$, lo cual nos da una interpretación de γ.

(Algunos autores le dan otro nombre a varias de las fórmulas mencionadas en las páginas 7, 8 y 10 veáse Las Tablas Integrales de M. Abramowitz y I.A. Stegun, New York, Dover, 1965).

3. Representación Integral de Hankel

La integral a través de la cual definimos la función $\Gamma(z)$ para $Re(z)>0$ no puede extenderse a otros valores de z. Una representación integral que es válida para todos los valores de z excepto $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n, \ldots$ es

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}(\pi z)} \int\limits_C e^t t^{z-1} dt\,, \tag{14}$$

donde C es el contorno de integración que empieza en $-\infty$, sigue el semi-eje real negativo hasta un punto $-\rho$ con $|z| > \rho > 0$ circula el origen en el sentido contrario a las mancillas del reloj y regresa a $-\infty$ a lo largo del semi-eje real negativo (véase la figura 1).

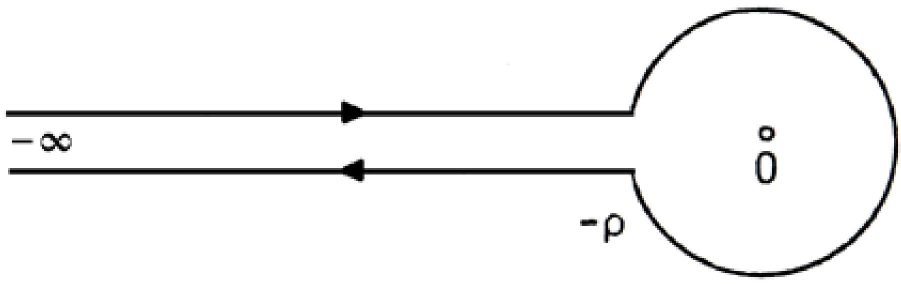

Figura 1

A la expresión (14) es lo que llamamos *Representación Integral de Hankel.*

Es conveniente aclarar que el integrando en general es una función multivaluada que tiene su valor principal definido en el complemento del semi-eje real negativo. El argumento de t, a través de C, varía desde $-\pi$ a π. Claramente el lado derecho de la expresión anterior define una función holomorfa para las z en las que la integral existe. Para ver que la igualdad es válida basta ver que

$$\frac{1}{2i\,\mathrm{sen}(\pi z)} \int\limits_C e^t t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,,$$

para $Re\,(z) > 0$. Ello se puede hacer directamente evaluando el lado derecho en la trayectoria siguiente (figura 2)

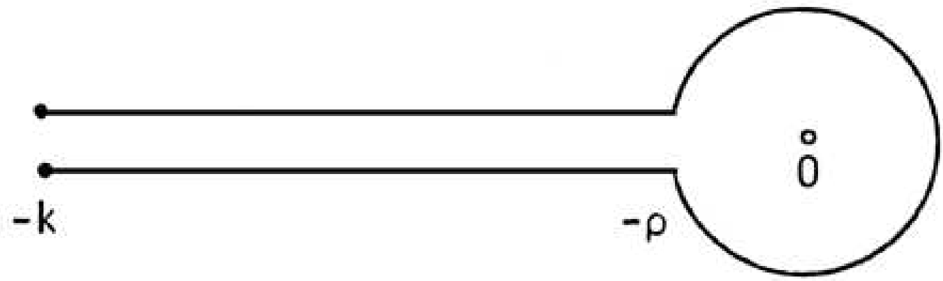

Figura 2

y después haciendo tender k a ∞ y ρ a cero. Los detalles quedan para al lector.

El lector interesado puede probar que:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C t^{-z} e^t dt\,, \tag{15}$$

donde $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ y C es el contorno de la integral de Hankel. Para ello use que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y sustituya $1-z$ por z.

4. La derivada logarítmica de la función Γ: La función ψ

El cociente $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = (\ell_n \Gamma(z))'$ tiene una serie de propiedades interesantes, algunas de las cuales veremos a continuación. Al mismo tiempo la frecuencia con la que aparece ha hecho que se dé un nombre especial, el de función ψ (función psi).

La función ψ tiene las siguientes expresiones

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{1}{n(z+n)}\,, \tag{16}$$

y

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\ell_n(n) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n} \right). \tag{17}$$

Note que expresión la (17) es una generalización de la definición de γ. Para obtener la primera de ellas se toma el logaritmo de la forma canónica de Weierstrass (véase la expresión 12) y se deriva, o sea

$$\begin{aligned}\psi(z) &= (\ell_n\Gamma(z))' = \left[\ell_n\left(ze^{\gamma z}\prod_{1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\left(\frac{1}{n}\right)z}\right]\right)^{-1}\right]' \\ &= \left(-\ell_n z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ell_n\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)' \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)}\,,\end{aligned}$$

de aquí, sustituyendo γ por su expresión como límite, obtenemos la segunda

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \lim_{n\to\infty}\left[\ell_n(n) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n}\right] - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\ell_n(n) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right].\end{aligned}$$

También la función ψ satisface una ecuación en diferencias,

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z) \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots)\,, \tag{18}$$

que se obtiene de la relación $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ por diferenciación y aplicación de esta misma fórmula.

La relación anterior aplicada sucesivamente nos da

$$\begin{aligned}\psi(n+1) &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \psi(1) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \gamma\,,\end{aligned}$$

luego $\lim_{n\to\infty} \psi(n+1) - \ell_n(n) = 0$, i.e., $\psi(n)$ se aproxima $\ell_n(n)$ para n suficientemente grande.

La función ψ también tiene representaciones integrales interesantes, una de ellas es la *fórmula de Gauss*:

$$\psi(z) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)dt\,, \tag{19}$$

válida para $Re(z) < 0$.

Para probarla, primero demostremos que

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt\,. \tag{20}$$

Para ello, como $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$ tenemos que

$$\begin{aligned}
-\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt &= -\gamma + \int_0^1 \Sigma t^n \left(1 - t^{z-1}\right) dt \\
&= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \left(1 - t^{z-1}\right) dt \\
&= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+z)}\right] \\
&= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)} \\
&= \psi(z)\ ,
\end{aligned}$$

quedando establecida la relación (20).

Cambiando la variable t por e^{-s} tenemos

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-s} - e^{-sz}}{1 - e^{-s}} ds\,,$$

de nuevo válida para $Re(z) > 0$ y usando el hecho de que

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$$

por sustitución, obtenemos la fórmula de Gauss.

Algunas expresiones interesantes relacionadas con la función ψ son:

(i) $\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+z)^2} + \ldots = \psi'(1+z)$.

(ii) $\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2+z} + \ldots + \frac{1}{n+z} = \psi(z+n+1) - \psi(z+1)$.

(iii) $\psi\left(\frac{1}{2}+z\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-z\right) = \pi \tan \pi z$.

(iv) $\psi(2z) = \ell_n 2 + \frac{1}{2}\psi(z) + \frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)$.

(v) $\psi(z+1) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^{t-1}}\right) dt$.

Invitamos al lector a dar su propia prueba de ellas.

5. La función beta

Consideremos la función β dada por la familia de integrales, en los parámetros p y q, siguiente:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,, \tag{21}$$

donde $Re(p) > 0$ y $Re(q) > 0$ y los valores de t^{p-1} y $(1-t)^{q-1}$ considerados son los principales. La función β es llamada *Función Beta.* Reemplazado t por $1-s$ vemos que:

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)\ .$$

Varios cambios de variable dan lugar a distintas representaciones integrales de Beta, por ejemplo, si en (21) reemplazamos t por $\operatorname{sen}^2\theta$, obtenemos que:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta\,. \tag{22}$$

En forma análoga reemplazando t por $\frac{s}{1-s}$ en (21) obtenemos:

$$\beta(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}}dt\,. \tag{23}$$

La función Beta está relacionada con la función Γ de la siguiente manera

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,, \tag{24}$$

relación que además nos sirve para extender la definición de la función β a las otras mitades de los planos p y q.

Para verificar (24) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{p-1}dt\int_0^{\infty} e^{-s}s^{q-1}ds \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{p-1}\left(t^q\int_0^{\infty} e^{-tx}x^{q-1}dx\right)dt \\
&= \int_0^{\infty} x^{q-1}\left(\int_0^{\infty} e^{-t(x+1)}t^{p+q-1}dt\right)dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\int_0^{\infty} e^{-s}s^{p+q-1}ds \\
&= \beta(q,p)\Gamma(p+q) = \beta(p,q)\Gamma(p+q)\ .
\end{aligned}$$

Como aplicación de estas relaciones, el lector puede calcular las integrales siguientes:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\,(1-t)}}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8\theta\cos^7\theta d\theta, \int_0^\infty \frac{(1+s)^5}{\sqrt{s}} ds\,.$$

5.1. Una aplicación a la mecánica.

Es interesante que Niels Henrik Abel usase la función Γ para el desarrollo y solución de un problema mecánico. Este trabajo es pionero en la *Teoría de las Ecuaciones Integrales*, cuyo tratamiento sistemático lo hicieran Volterra, Fredholmy Hilbert, más de medio siglo después. Este problema es discutido ampliamente en otro número de *Miscelanea Matemática*; más precisamente en el número 36, en el artículo *Vida y Obra de Niels Henrik Abel* (pags. 1 a 27) de Shirley Bromberg y Juan José Rivaud, por ello no lo tratamos aquí.

A continuación presentamos un problema mecánico mucho más simple, pero que para su solución se requiere calcular la integral de una función de las del tipo que estan relacionadas con la función Γ.

El problema es:

En cada instante, una partícula es atraída hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional a su distancia al origen. Si la partícula parte del reposo, calcular el tiempo en que llega al origen.

A continuación damos la solución:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que en $t = 0$ la partícula se encuentra sobre el eje x a una distancia $a > 0$ y sea 0 el origen. Por la 2^a Ley de Newton tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{x}\,,$$

donde m es la masa de la partícula y $c > 0$ una constante, de proporcionalidad.

Si hacemos $v\frac{dx}{dt}$ (la velocidad de nuestra partícula), entonces,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}\,,$$

y la ecuación original toma la forma

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{x} \text{ que integrando nos da: } \frac{mv^2}{2} = c\ell_n x + k\,.$$

Como $v = 0$ en $x = a$, se tiene que $k = -c\,\ell_n a$, o sea:

$$\frac{mv^2}{2} = c\,\ell_n \frac{a}{x} \quad \text{ó} \quad v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2c}{m}}\sqrt{\ell_n \frac{a}{x}}\,,$$

(el signo negativo en la raíz cuadrada es consecuencia de que x decrece al aumentar t).

De aquí, el tiempo T que la partícula toma para ir de $x = a$ a $x = 0$ viene dado por

$$T = \sqrt{\frac{m}{2c}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ell_n \left(\frac{a}{x}\right)}}\,.$$

Haciendo ahora $\ell_n \left(\frac{a}{x}\right) = u$ $(x = ae^{-u})$,

$$T = a\sqrt{\frac{m}{2c}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^u du = a\sqrt{\frac{m}{2c}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a\sqrt{\frac{\pi m}{2c}}\,,$$

terminando así con el cálculo de T.

5.2. Cálculo del volumen de la bola de radio r en R^n y la función β.

En R^n al conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq r$ le llamanos la bola de radio r y la denotamos por $b(n, r)$.

El volumen en R^n de $b(n, r)$, que denotaremos por $\alpha\,(n, r)$, lo encontramos calculando la integral siguiente

$$a\,(n, r) = \int\limits_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,. \qquad (*)$$

Es inmediato que $\alpha\,(n, r) = r^n \alpha\,(n, 1)$, por ello solo calcularemos

$\alpha\,(n,1)$, con tal propósito,

$$\begin{aligned}
a\,(n,1) &= \int\limits_{\{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1\}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} dx_1 \int\limits_{\{x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1-x_1^2\}} dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha\left(n-1, \left(1-x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) dx_1 \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1-x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \alpha\,(n-1,1)\, dx_1 \\
&= \alpha\,(n-1,1) \int_{-1}^{1} \left(1-x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_1\,,
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\alpha\,(n,1)}{\alpha\,(n-1,1)} = 2\int_{0}^{2} \left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx\,,$$

lo cual, haciendo $x^2 = t$ toma la forma:

$$\frac{\alpha\,(n,1)}{\alpha\,(n-1,1)} = \int_{0}^{1} (1-t)^{\frac{n-1}{2}}\, t^{-\frac{1}{2}} dt = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Para adquirir más familiaridad con el tema, el lector puede demostrar que

$$\alpha\,(n,1) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Así como tabular los valores de $\alpha\,(n,1)$ desde $n = 1$ hasta $n = 10$.

6. La función zeta de Riemann

Definimos la *función zeta* como

$$\zeta\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad (\text{para} \qquad Re\,(z) > 1)\,. \tag{25}$$

Esta definición tiene sentido, pues la serie converge uniformemente en una vecindad de cada punto z de radio menor que $Re(z) - 1$; Por lo tanto tenemos que además $\zeta(z)$ es holomorfa para $Re(z)-1$. Esta función era ya conocida por Euler, pero es Riemann en su memoria sobre los números primos quien descubre sus propiedades más sobresalientes tanto en relación con los números primos como con la función Γ.

La función zeta puede generalizarse de la siguiente manera:

$$\zeta(z,a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{z}} \tag{26}$$

$(Re(z)>1\ \text{ y } a \text{ real } \neq 0,-1,-2,\ldots,-n,\ldots)$.

La serie que converge uniformemente en cualquier región con $Re(z)>1+\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$, luego (z,a) es holomorfa en $Re(z)>1$.

Como mencionamos arriba, la función ζ guarda varias relaciones con la función Γ; a continuación enunciamos y demostramos algunas de ellas.

El producto de las funciones ζ y Γ puede expresarse como una integral indefinida muy sencilla, más precisamente:

$$\zeta(z,a)\,\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt\,, \tag{27}$$

para $Re(z)>1$.

Para demostrarlo, notemos primero que:

$$\frac{\Gamma(z)}{(a+n)^{z}}=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-(n+a)t}dt$$

cuando $arg(t)=0$ y $Re(z)>0$.

Luego, cuando $Re(z)>1+\varepsilon$

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\,\zeta(z,a) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-(n+a)t}dt= \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt-\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-(N+1+at)}}{1-e^{-t}}dt\right] \\ &= \int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt-\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-(N+1+at)}}{1-e^{-t}}dt\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, la segunda integral la podemos acotar usando para $t>0$, $e^{t}\geq 1+t$. Es decir

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-(N+1+at)}}{1-e^{-t}}dt\right| &\leq \int_0^{\infty}t^{Re(z)-2}e^{-(N+a)t}dt \\ &= (N+a)^{1-Re(z)}\,\Gamma(Re(z)-1)\;;\end{aligned}$$

que para $Re(z) \geq 1+\varepsilon$, tiende a cero, cuando $N \to \infty$, terminando así la demostración.

Para el caso $a = 0$, la relación (27) toma la forma

$$\zeta(z)\,\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\,. \tag{28}$$

Una relación realmente bella entre $\zeta(z)$ y $\zeta(1-z)$ es la establecida por Riemann, que a continuación enunciamos:

$$(2\pi)^{z-1}\,\zeta(1-z) = \zeta(z)\,\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}\,, \tag{29}$$

que es válida para toda z, excepto las singularidades de las funciones que la forman.

Esta fórmula tiene una generalización para $\zeta(z,a)$ dada por Hurwitz y válida para $Re(z) < 0$:

$$\zeta(z,a)=\frac{2\Gamma(1-z)}{2\pi^{1-z}}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi an)}{n^{1-z}}+\cos\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi an)}{n^{1-z}}\right]. \tag{30}$$

se puede demostrar (30) partiendo de la siguiente expresión de $\zeta(z,a)$ como integral de contorno, dada originalmente para $a = 0$ por Riemann.

$$\zeta(z,a) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i}\int_C \frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt \tag{31}$$

donde C es el contorno de la figura 3.

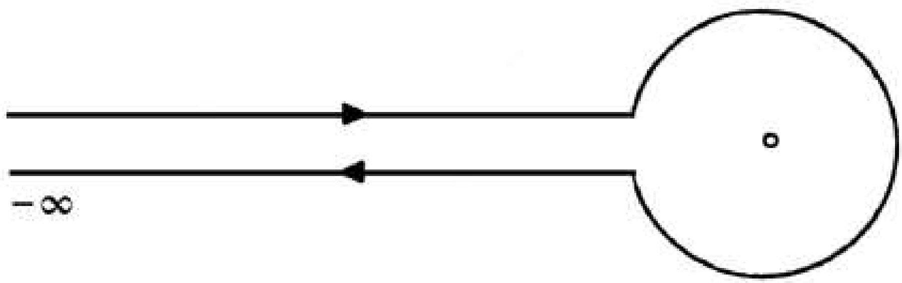

Figura 3

Antes de seguir adelante, notemos que la integral define una función entera, luego las posibles singularidades de $\zeta(s,a)$ coinciden con las de $\Gamma(1-s)$ o sea los puntos $1, 2, 3, ...$ y que con la excepción de estos puntos la representación tiene sentido. Al mismo tiempo ya sabíamos que $\zeta(z,a)$ no tiene singularidades para $Re(z) > 1$, luego la única singularidad posible es $z = 1$, donde efectivamente $\zeta(z,a)$ tiene un polo simple con residuo 1.

Para demostrar la validez de la fórmula (31) basta probar que coincide con (27) para $Re(z) > 1$ y son cálculos directos a partir de la integral $\int\limits_C \frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt$.

La fórmula de Hurwitz para $Re(z) > 0$ se demuestra usando el teorema del residuo aplicado a la función $\frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}$, que es analítica excepto en los polos simples $\pm 2n\pi i \quad (n = 1, 2, \ldots,)$, a lo largo de la trayectoria A descrita en la figura 4.

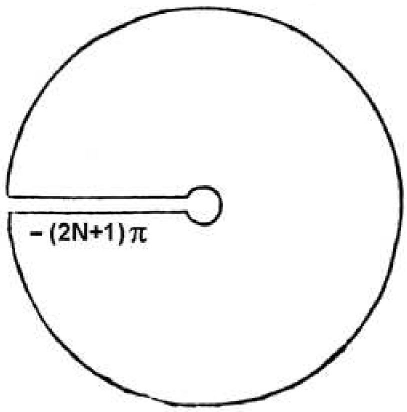

Figura 4

Esta trayectoria está formada por un círculo de radio $(2N+1)\pi$ recorrido en el sentido negativo (i.e. el contrario a las manecillas del reloj) y la “horquilla” cuyo límite es el contorno de integración en la fórmula (31); al círculo de radio $(2N+1)\pi$ en el sentido positivo lo denotaremos por C_N y a la “horquilla” por H_N, luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_N} \frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N} \frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt = \sum_{n=1}^{N} \left(R_{n+}R'_n\right),$$

donde R_n son los residuos en los puntos $2n\pi i$ y R'_n en los puntos $-2n\pi i$, con $n \leq N$, es decir los polos dentro de A.

Calculando se obtiene que:

$$R_{n+}R'_n = (2n\pi)^{z-1}\, 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi z + 2\pi a n\right),$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_N}\frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{1-z}}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(2\pi a n)}{n^{1-z}} + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}(2\pi a n)}{n^{1-z}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N}\frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt\,.$$

Cuando $N \to \infty$, tenemos que el miembro izquierdo tiende a $\zeta\,(z,a)\,/\Gamma\,(1-z)$ y el derecho a

$$\frac{1}{2\pi^{1-z}}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi a n)}{n^{1-z}} + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi a n)}{n^{1-z}}\right]$$

pues $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{t^{z-1}e^{at}}{1-e^t}dt$ tiende a cero cuando $N \to \infty$. Quedando probada la fórmula.

La función ζ está relacionada de manera sorprendente con los números primos como veremos a continuación.

Por definición $\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots + \frac{1}{n^z} + \ldots$, de donde,

$$\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^z}$$

$$\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \ldots + \ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \ldots\,.$$

Si continuamos hasta el límite este proceso, tenemos

$$\prod\left(1-\frac{1}{p^z}\right)\zeta\,(z) = 1\,, \tag{32}$$

donde el producto es tomado sobre todos los números primos. (Para que el producto sea convergente basta con que $Re(z) > 1$). Esta fórmula es debida a Euler.

Como el lector puede ver fácilmente, la fórmula (29) implica que $\zeta(z)$ es cero en $z = -2, -4, -6, \ldots$ Riemann conjeturó que todos los otros ceros de la función $\zeta(z)$ deben de encontrarse sobre la recta $Re\,(z)\,\frac{1}{2}$.

Es posible ver de la misma fórmula (29), que fuera de la franja $0 \leq Re\,(z) \leq 1$ no hay ceros, pero sin embargo lo que sucede sobre el eje $Re(z) = 0$ sigue siendo un misterio –la hipótesis de Riemann sigue sin demostrarse.

7. Series asintóticas: Desarrollo de Stirling para el logaritmo de la función gama

Una serie asintótica asociada a una función$f(x)$, es una serie de funciones que, aunque divergente, es tal que la suma de un número adecuado de términos nos da una buena aproximación de la función f. El ejemplo siguiente nos aclara la situación.

Consideremos la ecuación diferencial

$$y' - y = -\frac{1}{x}\,,$$

queremos encontrar una aproximación para valores grandes de x de la solución que tiende a cero cuando $x \to \infty$.

El problema lo podemos intentar resolver buscando una serie de potencias de $\frac{1}{x}$, así pues obtenemos que:

$$y\,(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n} + \ldots\,.$$

Serie que diverge para cualquier valor de x. Sin embargo, no todo está perdido, esta serie tiene su utilidad, pero procedamos de otra manera para darnos cuenta de ello. A través de los métodos usuales de integración, tenemos que la solución que buscamos viene dada por:

$$y\,(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}dt\,.$$

(El lector puede verificar directamente que es solución de nuestra ecuación y que además $\lim\limits_{x\to\infty} y\,(x) = 0$).

Después de integrar por partes $(n-1)$ veces tenemos que:

$$y\,(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\,n!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt\,,$$

donde además tenemos que

$$n!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt < \frac{n!}{x^{n+1}}\int_x^\infty e^{x-t}dt = \frac{n!}{x^{n+1}}\,,$$

es decir la suma de los n primeros términos de la series nos da una aproximación a $y(x)$ con un error menor que el valor absoluto de enésimo término que en nuestro caso tiende a cero cuando $x \to \infty$, luego si tomamos x suficientemente grande el error será pequeño; por ejemplo tomando 4 sumandos y $x > 20$, el error es menor que 10^{-5}.

La definición formal de estas series fue dada por Poincaré en 1886, pero ya en el siglo XVIII habían sido usadas por distintos autores, Euler, Maclaurin y Stirling.

Definición. Una serie divergente

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots$$

en donde la suma de los $(n+1)$ primeros sumandos es $s_n(z)$, es llamada una *expansión asintótica* de una función $f(z)$ para un rango dado del $arg(z)$, si la expresión

$$R_n(z) = z^n \{f(z) - s_n(z)\}$$

satisface las siguientes condiciones

(i) Para n fija $\lim_{z\to\infty} R_n(z) = 0$

(ii) Para z fija $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = \infty$.

Nótese que cuando se satisfacen estas condiciones, dada $\varepsilon > 0$, podemos hacer que

$$|z^n(f(z) - s_n(z))| < \varepsilon$$

para $|z|$ suficientemente grande. Es decir

$$f(z) - s_n(z) = 0\left(z^{-n}\right) .$$

Las series asintóticas tienen propiedades que nos permiten utilizarlas. A continuación enunciamos algunas de ellas quedando para el lector sus demostraciones.

Propiedad 1.

Si $\Sigma A_n z^{-n}$ es una serie asintótica para $f(z)$ y $\Sigma B_n z^{-n}$ lo es para $g(z)$ entonces el producto $\Sigma C_n z^{-n}$ es una serie asintótica para

$$f(z)\, g(z)\, [C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \ldots + A_n B_0] .$$

Propiedad 2.

Si $\sum_{n=2}^{\infty} A_n z^{-n}$ es una expansión asintótica de $f(x)$, entonces $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{(n-1)} x^{-n+1}$ es una expresión asintótica de $\int_x^x f(t)\, dt$.

Propiedad 3.

Una función $f(z)$, en un rango de $arg(z)$ dado, no puede tener más de una serie asintótica. Sin embargo una serie si puede ser el desarrollo asintótico de dos funciones [por ejemplo de $f(z)$ y $g(z) = f(z) + e^{-z}$, para $\frac{1}{4}\pi < arg(z) < \frac{1}{4}\pi$].

A continuación damos la expansión asintótica del $\ell_n \Gamma(z)$, expresión que se conoce usualmente como la *serie de Stirling*.

$$\ell_n (\Gamma(z)) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ell_n (z) + z + \ell_n (2\pi) \tag{33}$$

$$\cong \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} Br}{2r(2r-1) z^{2r-1}},$$

donde $|arg(z)| \leq \pi - \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\pi\right)$ y $Br = 4r \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2t}-1}$ son los números de Bernoulli.

Tomando la exponencial de la serie de Stirling para $z = x$ real positivo tenemos una fórmula asintótica para Gama.

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(1)^{r-1} Br}{zr(2r-1)} x^{1-2r}\right)}. \tag{34}$$

En particular tenemos que:

$$n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{(fórmula de Stirling)}. \tag{35}$$

En la expresión (34) estamos abusando de la notación, lo correcto es una expresión para cada r, de la del estilo del siguiente ejemplo.

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} (2\pi) \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{12x} - \frac{1}{288x^2} - \frac{134}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + 0\left(\frac{1}{x^5}\right)\right].$$

Para calcular las tablas de función Gama, estas aproximaciones son las usadas junto con la relación:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bibliografía

La bibliografía sobre la función Γ, sin duda, ocupa muchas más páginas que el presente trabajo, por lo que el intentarlo nos desvía de nuestro propósito. Por ello solo damos algunas referencias que pueden orientar al lector que desee profundizar más en el tema o en sus aplicaciones.

Un texto muy claro y conciso es *"A Course of Modern Analysis"*, E. T. Whittaker y G.N. Watson, Cambridge, University Press, 1980. De él tomamos algunas de las demostraciones.

Otro texto en el que uno puede familizarizarse con el tema es el libro de *"Cálculo Superior"*, Murray R. Spiegel, México, McGraw Hill, 1969 de la serie Schaums. A pesar del poco aprecio que nuestra comunidad tiene por esta serie, el texto es claro y sugerente.

Otro texto con un capítulo dedicado a la función Γ es la 3^a edición de *"Principles of mathematical analysis"* de Walter Rudin, New York, McGraw-Hill, 1976.

Una excelente monografía sobre la función Γ es la escrita en alemán por Emil Artin (Einfünrungin die Theorie del Gamma funktión, 35 pags.) y traducida al inglés por Michael Butler, bajo el título del *"The gamma function"*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964, 39 págs. (Holt, Rinehart and Winston), 1964, 39 pags.

Para aplicaciones de la función Γ a Probabilidad, un lugar interesante es el texto de A.N. Shiryaev, *"Probability"*, New York, Springer, 2^{nd} Ed. (1996).

Las tablas de Integrales, series, etc. de I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957 o las de M. Abramowitz y I.A. Stegun, New York, Dover, 1965 son otros dos sitios donde se pueden encontrar numerosas referencias de la función Γ.