

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7507>

Extendiendo un resultado de coloraciones de gráficas a coloraciones de digráficas

Mika Olsen

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
UAM-Cuajimalpa
olsen@cua.uam.mx

y

Alejandra Silva-Ramírez
Posgrado de Ciencias Naturales e Ingeniería
UAM-Cuajimalpa
2173800481@cua.uam.mx

1. Introducción

Es muy común que conceptos y resultados de gráficas se puedan extender a conceptos y resultados o conjeturas de digráficas. En algunos casos, las ideas que se utilizan para probar el resultado para las digráficas son prácticamente las mismas que se utilizaron para probar el resultado para las gráficas, en otras ocasiones hay que buscar una argumentación completamente distinta y también existe la posibilidad de que el resultado sea falso para las digráficas. En este trabajo vamos a aprovechar el puente creado recientemente entre las coloraciones en gráficas y digráficas.

El objetivo principal del presente artículo es ilustrar como la extensión de un resultado para gráficas puede requerir diferentes técnicas en diferentes clases de digráficas. Nosotros vamos a considerar un resultado clásico en la teoría de coloraciones, pero primero vamos a definir que es una gráfica y una digráfica, una coloración de vértices y para poder entender el resultado que vamos a extender necesitamos la definición de dos tipos de coloraciones para gráficas y sus extensiones para las digráficas.

Una **gráfica** G consta de una pareja $(V(G), A(G))$ donde $V(G)$ (o simplemente V) es un conjunto finito, no vacío, de vértices y $A(G)$ (o

Palabras clave: Digráficas, coloraciones acíclicas, coloraciones completas, número dicromático, número diacromático.

simplemente A) es el conjunto de aristas, es decir, un conjunto de subconjuntos de cardinalidad 2 del conjunto de vértices. Decimos que dos vértices $u, v \in V(G)$ son **adyacentes** si $\{u, v\} \in A(G)$. Por otro lado, una **digráfica** D consta de una pareja $(V(D), F(D))$ donde $V(D)$ (o simplemente V) es un conjunto finito, no vacío de vértices y el conjunto de flechas $F(D)$ (o simplemente F) es un conjunto de parejas ordenadas del conjunto de vértices, es decir, $F \subset V \times V$. Para simplificar la notación denotaremos la flecha (u, v) como uv . Observa que, por la definición que usamos, las gráficas no tienen aristas múltiples ni lazos y las digráficas no tienen flechas múltiples, además, consideramos solo digráficas sin lazos. Es importante notar que la relación de adyacencia (la que define a las aristas) en una gráfica es una relación simétrica, mientras que la relación de adyacencia en una digráfica puede ser simétrica, asimétrica o ninguna de las dos, lo cuál se traduce en digráficas simétricas, digráficas orientadas o asimétricas y digráficas. Una flecha $uv \in F$ es **asimétrica** (**simétrica** resp.) si $vu \notin F$ ($vu \in F$). Seguimos el libro [5] para conceptos en gráficas y en digráficas no definidos aquí.

Una **coloración** de los vértices de una (di)gráfica H es una función $\varphi : V(H) \rightarrow [n]$, donde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, es decir, la función φ asigna un número, al que llamaremos color, a cada vértice. Una coloración induce una partición en clases cromáticas. La **clase cromática** del color i es el conjunto de todos los vértices del color i . Una clase cromática es **singular** si consta de un solo vértice. Vamos a considerar coloraciones que asignan colores distintos a vértices adyacentes. Esta coloración también se llama una **coloración propia** y es la coloración del famoso teorema de los 4 colores. Una coloración es **completa** si para cualquier pareja de colores $\{i, j\}$ existen dos vértices adyacentes u, v tales que $\varphi(u) = i$ y $\varphi(v) = j$. El **número cromático** $\chi(G)$ de una gráfica G es el mínimo número de colores de una coloración propia y completa, mientras que el **número acromático** $\alpha(G)$ es el máximo número de colores de una coloración propia y completa.

En 1982, el matemático mexicano V. Neumann-Lara definió las coloraciones acíclicas en digráficas como una generalización de las coloraciones propias en gráficas. Una coloración de los vértices de una digráfica es acíclica si no hay ciclos dirigidos monocromáticos. Además, definió el **número dicromático** como el mínimo número de colores de una coloración acíclica [14]. El número dicromático de una digráfica generaliza el número cromático de una gráfica y ha servido para extender diversos conceptos y resultados de la teoría de gráficas a la teoría de digráficas. Por ejemplo, digráficas perfectas [1], polinomio dicromático [10], resultados tipo Brooks [11], cotas en términos del cuello de una gráfica [7], teorema de flujo [12]. Recientemente, G. Araujo-Pardo, J.

J. Montellano-Ballesteros, M. Olsen y C. Rubio-Montiel [2] propusieron una extensión del número acromático usando coloraciones acíclicas y definiendo una coloración **completa para digráficas** como aquella que para cualquier pareja ordenada (i, j) de colores, con $i \neq j$, hay una flecha de un vértice de color i a un vértice de color j . Así, el **número diacromático**, denotado por $dac(D)$, se define como el máximo número de colores de una coloración acíclica y completa y podemos expresar el número dicromático $dc(D)$ de una digráfica D como el mínimo número de colores de una coloración acíclica y completa.

Cabe mencionar que tanto el número cromático como el número acromático han sido extendidos a las digráficas en diferentes ocasiones, pero ninguno cumple con extender tantos conceptos y resultados como las coloraciones acíclicas. En particular, en la literatura hay otras tres extensiones del número acromático [8, 9, 19]. De las cuatro extensiones, el número diacromático es la extensión que cumple con el mayor número de propiedades del número acromático, entre estas se encuentra la propiedad de interpolación (teorema 2.4).

En este trabajo presentamos un teorema equivalente al resultado dado por V. Bhave sustituyendo los números cromático y acromático de una gráfica por los números dicromático y diacromático de una digráfica. El teorema de V. Bhave se encuentra a continuación y su prueba se puede consultar en [6].

Teorema 1.1. [4] *Para todo par de enteros $a \leq b$ existe una gráfica G con $\chi(G) = a$ y $\alpha(G) = b$.*

Para las digráficas simétricas el concepto del número dicromático coincide con el número cromático y el concepto del número diacromático coincide con el número acromático. Por lo que el resultado se extiende trivialmente a las digráficas simétricas.

En este trabajo se presenta una construcción que genera para todo par de enteros $r \leq s$ una digráfica D no simétrica con $dc(D) = r$ y $dac(D) = t$. La segunda construcción genera una digráfica asimétrica con $dc(D) = r$ y $dac(D) = t$ para todo par de enteros r, t con $r \leq s(r) \leq t$ donde $s(r)$ es una cota en términos de r .

2. Generalización del teorema de V. Bhave para digráficas no simétricas

Para cada pareja de enteros $2 \leq r \leq t$ vamos a construir una digráfica D , tal que $dc(D) = r$ y $dac(D) = t$. La trayectoria dirigida $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ se define como $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $F(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i \in [n-1]\}$. La digráfica completa \overleftrightarrow{K}_n se define como

$$V(\overleftrightarrow{K}_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ y } F(\overleftrightarrow{K}_n) = \{v_i v_j \mid i \neq j, i, j \in [n]\},$$

es decir, la digráfica completa \overleftrightarrow{K}_n tiene n vértices y tiene una flecha simétrica entre cada par de vértices. Es fácil ver que

$$dc(\overleftrightarrow{K}_n) = n = dac(\overleftrightarrow{K}_n).$$

Para construir una digráfica no simétrica con $dc(D) = r$ y $dac(D) = t$ utilizamos la siguiente construcción.

Construcción 2.1. Sean k un entero no negativo, \overleftrightarrow{K}_n la digráfica completa simétrica, $v_0 \in V(\overleftrightarrow{K}_n)$ y $P_{2k} = (v_1, v_2, \dots, v_{2k})$ una trayectoria tal que $V(\overleftrightarrow{K}_n) \cap V(P_{2k}) = \emptyset$. Definimos la digráfica $K_{n,2k}^*(v_0)$ como sigue:

$$\begin{aligned} V(K_{n,2k}^*(v_0)) &= V(\overleftrightarrow{K}_n) \cup V(P_{2k}), \\ F(K_{n,2k}^*(v_0)) &= F(\overleftrightarrow{K}_n) \cup F(P') \cup M, \end{aligned}$$

donde P' es un torneo definido como:

$$V(P') = V(P) \cup \{v_0\} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$$

y para $i < j$

$$F(P') = \begin{cases} v_j v_i & \text{si } j - i \text{ es par;} \\ v_i v_j & \text{si } j - i \text{ es impar,} \end{cases}$$

y para todo $x \in V(\overleftrightarrow{K}_n) \setminus \{v_0\}$,

$$M = \begin{cases} xv_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ v_i x & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Notemos que $K_{n,0}^*(v_0) = \overleftrightarrow{K}_n$.

Sea $S \subset V(D)$. La digráfica $D\langle S \rangle$ es la subdigráfica inducida por el conjunto S . Decimos que un vértice $v \in V(D)$ es **fuelle (pozo)** de S si $uv \notin F(D)$ ($vu \notin F(D)$) para todo $u \in V(S)$.

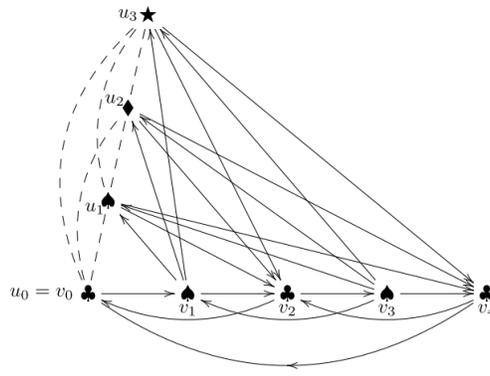
Observación 2.2. Para P' se tiene que:

1. $P' \langle \{v_0, v_2, \dots, v_{2k}\} \rangle$ es un torneo acíclico donde v_0 es pozo y v_{2k} es fuele.

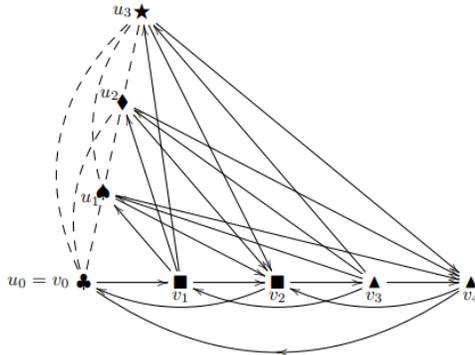
2. $P' \langle \{v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}\} \rangle$ es un torneo acíclico donde v_1 es pozo y v_{2k-1} es fuente.

Para que sea mas fácil entender la construcción 2.1 revisamos primero un ejemplo.

Ejemplo 2.3. En la figura 1, mostramos la construcción de la digráfica $K_{4,4}^*$, en donde consideramos la digráfica completa \overleftrightarrow{K}_4 y la trayectoria dirigida P_4 ($k = 2$), así como coloraciones que realizan su número dicromático y número diacromático. Como \overleftrightarrow{K}_4 es subdigráfica de $K_{4,4}^*$,



(a)



(b)

Figura 1. $dc(D) = 4$ y $dac(D) = 6$.

entonces $dc(K_{4,4}^*) \geq 4$. En la figura 1(a), mostramos una coloración de $K_{4,4}^*$ para el número dicromático con 4 colores, los colores están representados mediante los cuatro símbolos $\star, \diamond, \spadesuit$ y \clubsuit . Coloreamos los vértices $v_2, v_4 \in P_4$ con el color del vértice v_0 (el color representado por el símbolo \clubsuit) y coloreamos a los vértices $v_1, v_3 \in P_4$ con el color de un vértice que no sea v_0 (por ejemplo con el color representado por el

símbolo ♠). En la figura 1(b), mostramos una coloración de $K_{4,4}^*$ para el número diacromático con 6 colores, los colores están representados mediante los seis símbolos ★, ♦, ♠, ♣, ■ y ▲. Coloreamos los vértices $v_1, v_2 \in P_4$ con un color que no se utiliza en $K_{4,4}^*$ (por ejemplo con el color representado por el símbolo ■) y coloreamos los vértices $v_3, v_4 \in P_4$ con otro color que no se utiliza en $K_{4,4}^*$ (por ejemplo el color representado por el símbolo ▲). La coloración en la figura 1(b) es una coloración óptima de $K_{4,4}^*$ ya que \overleftrightarrow{K}_4 usa a lo más 4 colores y la coloración del torneo inducido por los vértices v_0, v_1, \dots, v_4 solo puede tener una clase cromática singular.

Para la prueba del teorema 2.5, necesitamos el siguiente resultado, llamado la propiedad de interpolación del número diacromático

Teorema 2.4. [2] Sean D una digráfica no trivial y $u \in V(D)$. Entonces

$$dac(D) - 1 < dac(D - u) \leq dac(D).$$

Teorema 2.5. Sea $n \geq 2$, entonces $dc(K_{n,2k}^*(v_0)) = n$ y $dac(K_{n,2k}^*(v_0)) = n + k$.

Demostración. Sea $K_{n,2k}^*(v_0)$ la digráfica obtenida en la construcción 2.1 y considera la coloración óptima para el número dicromático $\varphi : V(\overleftrightarrow{K}_n) \rightarrow [n]$. Primero probamos que $dc(K_{n,2k}^*(v_0)) = n$. Como \overleftrightarrow{K}_n es subdigráfica inducida de $K_{n,2k}^*(v_0)$ se tiene que $dc(K_{n,2k}^*(v_0)) \geq n$. Para probar $dc(K_{n,2k}^*(v_0)) \leq n$, damos una coloración con n colores y verificamos que es acíclica. Sea $\varphi' : V(K_{n,2k}^*(v_0)) \rightarrow [n]$ la coloración con n colores. Asumimos que $\varphi(v_0) = 2$ y sea $u \in V(\overleftrightarrow{K}_n)$ tal que $\varphi(u) = 1$. Definimos la coloración φ' como sigue

$$\varphi'(w) = \begin{cases} \varphi(w) & \text{si } w \in V(\overleftrightarrow{K}_n); \\ 1 & \text{si } w = v_{2i-1} \text{ y } i \in [k]; \\ 2 & \text{si } w = v_{2i} \text{ y } i \in [k]. \end{cases}$$

Para visualizar la coloración φ' véase la figura 2. Para los vértices de la digráfica \overleftrightarrow{K}_n , la coloración φ y φ' coinciden, y para los vértices sobre la trayectoria P_{2k} solo usamos dos colores, los vértices de la forma v_{2i} tienen el color 2 igual que el color de v y los vértices de la forma v_{2i-1} tienen el mismo color que u . Por la observación 2.2.1 la clase de color 2 es acíclica (véase la figura 2 (a)). Por la definición del conjunto M en la construcción 2.1, u es fuente en la clase de color 1 y por la observación 2.2.2 la clase cromática de color 1 es acíclica (véase la figura 2 (b)). Por lo tanto para todo $k \geq 0$ se tiene que

$$dc(K_{n,2k}^*(v_0)) = n.$$

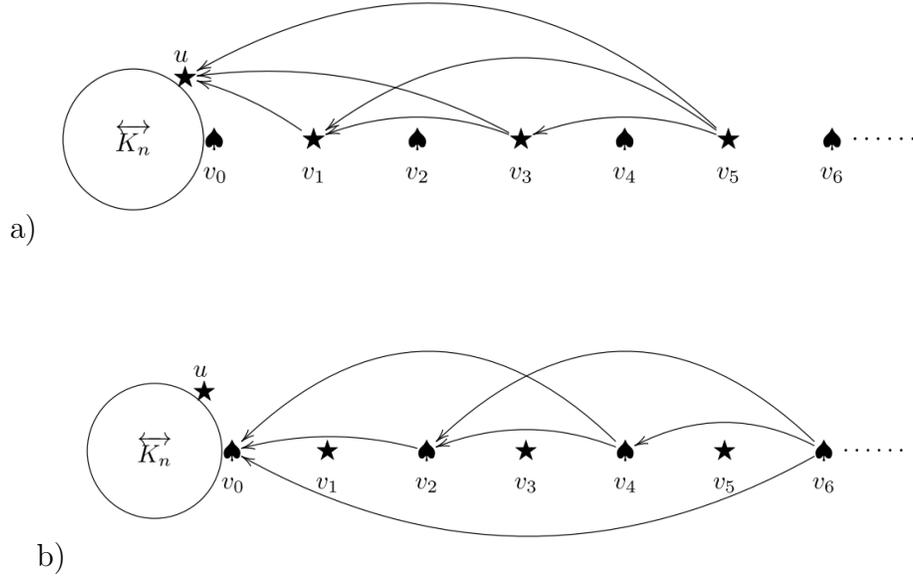


Figura 2. La coloración acíclica de $K_{n,2k}^*(v_0)$, donde los símbolos \star, \spadesuit representan el color 1 y 2 respectivamente.

Nos falta probar que el $dac(K_{n,2k}^*(v_0)) = n + k$. Sea $\beta : V(\overleftrightarrow{K}_n) \rightarrow [n]$ una coloración óptima para el número diacromático. Definimos la siguiente coloración $\beta' : V(K_{n,2k}^*(v_0)) \rightarrow [n + k]$

$$\beta'(w) = \begin{cases} \beta(w) & \text{si } w \in V(\overleftrightarrow{K}_n); \\ n + i & \text{si } w \in \{v_{2i-1}, v_{2i}\} \text{ y } i \in [k]. \end{cases}$$

Primero observemos que las clases cromáticas C_i con $i \in [n]$ son clases singulares y para C_{n+i} donde $i \in [k]$ son clases acíclicas de orden 2, ya que la digráfica inducida por los vértices de la trayectoria P_{2k} es asimétrica. Por lo tanto la coloración β' es acíclica. Nos falta ver que β' es una coloración completa. La coloración β' inducida por los primeros n colores es completa por construcción (la digráfica inducida por los primeros n colores es una digráfica completa). Como las clases cromáticas C_{n+i} constan de un vértice con subíndice par y uno con subíndice impar, entonces por la definición del conjunto M , en la construcción 2.1, cada clase cromática C_{n+i} es completa con respecto a las primeras n clases cromáticas. En la figura 3 podemos observar como se comporta un vértice de la clase cromática C_{n+1} (color \blacklozenge) con los vértices de las otras clases cromáticas. Además, por la definición de las adyacencias sobre la trayectoria P_{2k} en la construcción 2.1, las clases

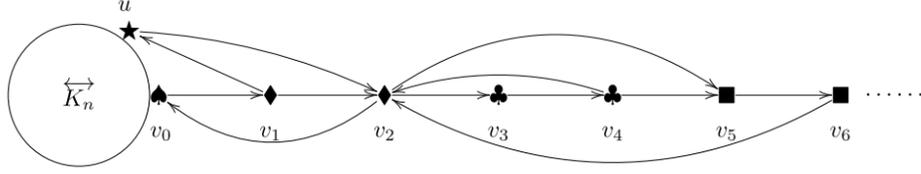


Figura 3. Las adyacencias entre el vértice \blacklozenge y los vértices de las otras clases cromáticas en $K_{n,2k}^*(v_0)$. Los colores están representados por símbolos.

C_{n+i} son completas entre sí para $i \in [k]$. Por lo tanto β' es completa y $dac(K_{n,2k}^*(v_0)) \geq n + k$.

Para demostrar que $dac(K_{n,2k}^*(v_0)) \leq n + k$ vamos a proceder por contradicción suponiendo que hay una coloración completa y acíclica con más de $n + k$ colores. Por el teorema de interpolación (teorema 2.4), podemos asumir que dicha coloración usa exactamente $n + k + 1$ colores. Sea $\gamma : V(K_{n,2k}^*(v_0)) \rightarrow [n + k + 1]$. En \overleftarrow{K}_n usamos a lo más n colores por lo que los otros $k + 1$ colores deben estar asignados a vértices de la trayectoria P_{2k} . Por el principio de las casillas, en P_{2k} tendríamos al menos una clase cromática singular, digamos el color α . Sea w el vértice de color α , entonces w puede tener subíndice par o impar. Si $w = v_{2i-1}$ por la definición del conjunto M , en la construcción 2.1, no hay flechas de color (α, i) con $i \in [n]$. Si $w = v_{2i}$ obtenemos, de manera análoga, que no hay flechas de color (i, α) con $i \in [n]$. Por lo tanto la coloración γ no es completa, lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto

$$dac(K_{n,2k}^*(v_0)) = n + k. \quad \square$$

Con este teorema construimos explícitamente para cada par de enteros $2 \leq r \leq t$ la digráfica no simétrica $K_{r,2t}^*$ con $dc(K_{r,2t}^*) = r$ y $dac(K_{r,2t}^*) = t$.

3. Generalización del teorema de V. Bhave para digráficas asimétricas

En esta sección vamos a explorar qué parejas de valores se obtienen usando las familias con número dicromático conocido que se encuentran en la literatura. Después, utilizando las técnicas de la sección anterior, construimos torneos tales que el número diacromático está en términos del número dicromático.

El teorema 3.1 establece que el número diacromático de un torneo circulante está determinado por el orden.

Teorema 3.1. [2] Sea T un torneo circulante de orden $2n+1$, entonces $dac(T) = n + 1$.

En el siguiente corolario resumimos los resultados conocidos para el número dicromático junto con su respectivo número diacromático según el teorema 3.1.

Corolario 3.2. Existe un torneo circulante T que admite una coloración óptima para el número dicromático con una clase cromática singular

- de orden $2m+1$ con $dc(T) = 2$ para $m \geq 1$ [17] y $dac(T) = m+1$;
- de orden $2m+1$ con $dc(T) = 3$ para $m \geq 3$ [17] y $dac(T) = m+1$;
- de orden $2m+1$ con $dc(T) = 4$ para $m \geq 5$ [13, 15] y $dac(T) = m+1$;
- de orden 19 con $dc(T) = 5$ [16] y $dac(T) = 10$;
- de orden $r^2 - r + 1$ con $dc(T) = r$ [3] y $dac(T) = \lceil (r^2 - r + 1)/2 \rceil$ para $r \geq 3$.

Con los resultados conocidos, el problema queda resuelto para el número dicromático igual a 2, y queda parcialmente resuelto para los casos en que el número dicromático es igual a 3 y 4, en estos dos casos solo falta la existencia de una digráfica 3-diacromático y 4-,5-diacromático respectivamente.

La siguiente construcción es una modificación de la construcción 2.1, que nos permite, a partir de una digráfica asimétrica con número dicromático r y número diacromático t , generar las digráficas asimétricas con número dicromático r y cualquier número diacromático mayor o igual a t .

Construcción 3.3. Sea D una digráfica, $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una trayectoria y $v_0 \in V(D)$. Sea n un entero no negativo, definimos la digráfica $D_n(v_0)$ como sigue:

$$\begin{aligned} V(D_n(v_0)) &= V(D) \cup V(P), \\ F(D_n(v_0)) &= F(D) \cup F(P') \cup M \end{aligned}$$

donde P' es un torneo definido como

$$V(P') = V(P) \cup \{v_0\} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

$$F(P') = \begin{cases} v_j v_i & \text{si } j - i \text{ es par;} \\ v_i v_j & \text{si } j - i \text{ es impar,} \end{cases}$$

para $0 \leq i < j \leq n$ y

$$M = \begin{cases} xv_{2i}, v_{2i+1}x & \text{si } xv_0 \in F(D); \\ v_{2i}x, xv_{2i+1} & \text{si } v_0x \in F(D). \end{cases}$$

Notemos que $D_0(v_0) = D$, ya que $P' = v_0$.

Para el caso de las digráficas asimétricas las pruebas requieren de más herramientas de la teoría de las gráficas, por lo que las omitimos, se pueden consultar en [18].

Teorema 3.4. *Sea D una digráfica con $dc(D) = r$, $dac(D) = t$ y tal que tiene una coloración óptima para el número dicromático con una clase cromática singular $\{u\}$. Sea $v_0 \in V(D) - u$, entonces para toda $k \geq 0$ existe un entero $0 \leq n_k \leq 2k$ tal que:*

$$dc(D_{n_k}(v_0)) = r \quad \text{y} \quad dac(D_{n_k}(v_0)) = t + k.$$

El teorema 3.4 dice que, si tenemos una digráfica r -dicromática que admite una coloración óptima con una clase cromática singular y número diacromático t , podemos construir una digráfica r -dicromática con cualquier número diacromático mayor o igual a t . Observa que en este caso lo importante es contar con una digráfica tal que la diferencia entre el número dicromático y el número diacromático sea el menor posible.

Como consecuencia del teorema 3.4 y el inciso 5 del corolario 3.2 tenemos lo siguiente.

Teorema 3.5. *Para todo entero r y $t \geq \frac{r^2-r+2}{2}$ existe una digráfica D asimétrica con $dc(D) = r$ y $dac(D) = t$.*

En la tabla 1 representamos la relación de valores conocidos para r y t . Recordemos que t tiene una expresión cuadrática en términos de r a partir de $r = 5$. Esto se refleja en que la diferencia entre los valores r y t crece conforme aumenta el número dicromático.

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t \geq$	2	4	6	10	16	22	29	37	46

Cuadro 1. Comparación del número dicromático con el número diacromático.

4. Conclusiones

La pregunta que nosotros consideramos resultó en problemas muy distintos en las tres grandes clases de digráficas: en las digráficas simétricas es una consecuencia directa de un resultado en teoría de gráficas; para las digráficas no simétricas lo pudimos resolver completamente; mientras que para las digráficas asimétricas pudimos dar una solución parcial, dejando una brecha (un *gap*) entre el número dicromático y el número diacromático en donde no sabemos si existan digráficas que cumplan con los parámetros. El caso más pequeño donde no sabemos si exista una digráfica asimétrica D es para el caso en que $dc(D) = dac(D) = 3$. Es importante mencionar que no solo probamos

la existencia de tales digráficas, sino damos explícitamente la construcción de la digráfica así como las dos coloraciones óptimas para cada una de ellas.

Esperamos que con este trabajo se amplie la comprensión de la dificultad que se enfrenta cuando se trata de extender resultados de la teoría de gráficas a la teoría de digráficas.

Bibliografía

- [1] D. Andres y W. Hochstattler, «Perfect digraphs», *J. Graph Theory*, núm. 79, 2015, 21–29, <https://doi.org/10.1002/jgt.21811>.
- [2] G. Araujo-Pardo, J. J. Montellano-Ballesteros, M. Olsen y C. Rubio-Montiel, «The dichromatic number of digraphs», *Electr. J. Comb.*, vol. 25, núm. 3, 2018, 3.51, <https://doi.org/10.37236/7807>.
- [3] G. Araujo-Pardo y M. Olsen, «A conjecture of Neumann-Lara on infinite families of r -dichromatic circulant tournaments», *Discrete Math.*, núm. 310, 2010, 489–492, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.03.028>.
- [4] V. N. Bhave, «On the pseudoachromatic number of a graph», *Fund. Math*, núm. 102, 1979, 159–164, <https://doi.org/10.4064/fm-102-3-159--164>.
- [5] G. Chartrand, L. Lesniak y P. Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6.^a ed., Chapman & Hall, 2011.
- [6] G. Chartrand y P. Zhang, *Chromatic Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.
- [7] N. Cordero-Michel y H. Galeana-Sánchez, «New Bounds for the Dichromatic Number of a Digraph», *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 21, núm. 1, 2019, 1–14, ICGT 2018, <https://doi.org/10.23638/DMTCS-21-1-7>.
- [8] K. J. Edwards, «Harmonious chromatic number of directed graphs», *Discrete Appl. Math.*, vol. 161, núm. 3, 2013, 369–376, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.09.003>.
- [9] S. Felsner, W. Hochstättler, K. Knauer y R. Steiner, «Complete acyclic colorings», *Electr. J. Comb.*, vol. 27, núm. 2, 2020, 2.40, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.08670>.
- [10] D. González-Moreno, R. Hernández-Ortiz, B. Llano y M. Olsen, «The dichromatic polynomial of a digraph», *Graphs and Combinatorics*, vol. 38, núm. 85, 2022, 1–16, <https://doi.org/10.1007/s00373-022-02484-0>.
- [11] A. Harutyunyan y B. Mohar, «Strengthened brooks theorem for digraphs of girth at least three», *The Electronic Journal of Combinatorics*, núm. 18, 2011, 1–11, <https://doi.org/10.37236/682>.
- [12] W. Hochstättler, «A flow theory for the dichromatic number», *European J. of Comb.*, núm. 66, 2017, 160–167, <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.06.020>.
- [13] N. Javier y B. Llano, «The dichromatic number of infinite families of circulant tournaments», *Discuss. Math. Graph Theory*, núm. 37, 2017, 221–238, <https://doi.org/10.7151/dmgt.1930>.
- [14] V. Neumann-Lara, «The dichromatic number of a digraph», *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 33, núm. 3, 1982, 265–270, [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(82\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(82)90046-6).
- [15] V. Neumann-Lara., «Vertex critical 4-dichromatic circulant tournaments», *Discrete Math.*, núm. 170, 1997, 289–291, [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00128-8](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00128-8).
- [16] V. Neumann-Lara, «Dichromatic number, circulant tournaments and zykov sums of digraphs», *Discuss. Math. Graph Theory*, núm. 20, 2000, 197–207, <https://doi.org/10.7151/dmgt.1119>.
- [17] V. Neumann-Lara y J. Urrutia, «Vertex critical r -dichromatic tournaments», *Discrete Math.*, núm. 49, 1994, 83–87, [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(84\)90154-7](https://doi.org/10.1016/0012-365X(84)90154-7).

- [18] A. Silva-Ramírez, «Número dicromático vs. número diacromático», tesis de maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, 2020.
- [19] E. Sopena, «Complete oriented colourings and the oriented achromatic number», *Discrete Appl. Math.*, núm. 173, 2014, 102–112, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.03.015>.