

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8208>

Una introducción al enfoque de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardo

Daniel Melchor Aguilar

División de Control y Sistemas Dinámicos
Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica
dmelchor@ipicyt.edu.mx

1. Introducción

Uno de los problemas más importantes en el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos es el problema de estabilidad. Generalmente, el estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos se encuentra asociado al nombre de Henri Poincaré (1854-1912) por sus importantes aportaciones en el tema reportadas en su memoria «Sur les courbes définies par les équations différentielles», compuesta de varios artículos donde, entre otros muchos aspectos cualitativos de las ecuaciones diferenciales, trata preguntas relacionadas con la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden. Sin embargo, la definición general de la propiedad de estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales fue establecida por el matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) en su tesis doctoral «The general problem of the stability of motion» publicada en 1892, véase por ejemplo [11]. Sin duda, el trabajo de Lyapunov está fuertemente motivado por el trabajo de Poincaré. De hecho, Lyapunov establece en el prefacio de su tesis lo siguiente:

Although Poincaré limited himself to very special cases, the methods he used allow much more general applications and could still lead to many new results. This will be seen in what follows, for, in a large part of my researches, I was guided by the ideas developed in the above mentioned memoir.

Definitivamente, tanto los trabajos de Poincaré como los de Lyapunov están motivados por las aportaciones iniciales sobre el tema de grandes matemáticos como Laplace, Lagrange, Dirichlet y Liouville.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales con retardo, Estabilidad, Funcionales de Lyapunov.

Los conceptos de estabilidad introducidos originalmente por Lyapunov fueron para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, los cuales pueden escribirse en forma compacta mediante la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

donde $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$, con D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Es bien conocido que la ecuación (1) describe una gran cantidad de sistemas dinámicos encontrados en aplicaciones de las ciencias y la ingeniería. La hipótesis central sobre la dinámica detrás de la representación matemática por la ecuación (1) es considerar que la razón de cambio del estado $x(t)$ en el instante de tiempo t está únicamente determinada por t y el valor del estado en ese instante t . El origen de esta hipótesis se remonta al surgimiento de la segunda ley de Newton, la cual es considerada el principio fundamental de la dinámica. Esta ley establece que el cambio en la velocidad de un cuerpo (en un cierto instante de tiempo) es directamente proporcional a la suma de todas las fuerzas que actúan en él (en ese mismo instante de tiempo) e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Este punto de vista, de que los efectos de las fuerzas se reflejan instantáneamente en el movimiento de un cuerpo, predominó durante prácticamente los siguientes 200 años posteriores al surgimiento de la segunda ley de Newton hasta los trabajos de Volterra en 1928 y 1931.

Volterra en su investigación sobre viscoelasticidad [16] y modelos depredador-presa [17] estableció ecuaciones diferenciales con retardos de tiempo, es decir, incluyendo valores de los estados en instantes de tiempo anteriores al instante de tiempo t . Al parecer, los trabajos de Volterra fueron prácticamente ignorados y no tuvieron impacto inmediato. Por otro lado, Minorsky en su trabajo [12] de 1942 enfatizó la importancia de considerar los retardos de tiempo en la descripción de oscilaciones auto-inducidas observadas en el problema de control de estabilización de barcos.

Los primeros libros fundamentando los aspectos teóricos de las ecuaciones diferenciales incluyendo información pasada de los estados de los sistemas dinámicos aparecen alrededor de 1950 con las obras de Myshkis [13], Krasovskii [10], Bellman y Cooke [1], Halanay [4] y Hale y Verduyn Lunel [5], por mencionar a los autores principales. A partir de estos trabajos el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardos cobró un mayor interés.

Siguiendo a Hale, se puede considerar que la descripción de sistemas dinámicos mediante la ecuación diferencial ordinaria (1) es una primera aproximación a la realidad y un modelo más realista debe incluir no solo información del estado presente sino también información de

estados pasados. Esta afirmación de Hale se fundamenta en el hecho que los fenómenos físicos no ocurren instantáneamente sino después de cierto intervalo de tiempo. En otras palabras, los retardos de tiempo son inherentes a los fenómenos físicos y, en consecuencia, a los sistemas dinámicos.

Ante esta realidad, ocurre que existen muchos sistemas dinámicos que pueden modelarse satisfactoriamente excluyendo los retardos de tiempo inherentes. Sin embargo, existe también una gran cantidad de sistemas dinámicos en los cuales el efecto de los retardos de tiempo no puede ser ignorado. Más aún, existen algunas aplicaciones en las que no tiene sentido ignorar los retardos de tiempo. Por ejemplo, el problema de comunicación a través de redes transmisión no tiene sentido si no se considera el retardo de tiempo inherente en la transmisión o en la propagación de las señales o bien el problema de propagación de virus carece de sentido si se ignora el retardo inherente a la incubación del mismo.

En este trabajo presentaremos una breve introducción a la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardos de tiempo. Existen dos enfoques del tipo Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardos: el propuesto por Razumikhin [15] y el debido a Krasovskii [9]. Nuestra presentación se centra en el enfoque de Krasovskii el cual es la generalización natural de las ideas de Lyapunov.

En la siguiente sección motivaremos el problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias. En la sección 3 revisaremos el enfoque clásico de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias. En la sección 4 presentaremos el problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales con retardos. La sección 5 está dedicada a la presentación de las ideas principales del enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Finalmente, en la sección 6, mostraremos como aplicar el método de Krasovskii a ecuaciones diferenciales lineales con retardo y terminamos la presentación en la sección 7 con algunas conclusiones y notas.

2. El problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias

Para introducir el problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (1) necesitamos recordar el problema de valor inicial o también llamado problema de Cauchy para la ecuación (1).

El problema de valor inicial para (1) consiste en lo siguiente: Dado un instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ y una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $(t_0, x_0) \in D$, encontrar un intervalo I conteniendo a t_0 y una función

$x(t)$ continuamente diferenciable en I , la cual satisface la ecuación diferencial (1) y $x(t_0) = x_0$.

Si $f(t, x)$ es continua en D , entonces existe una solución al problema de valor inicial. Si, adicionalmente, $f(t, x)$ es localmente Lipschitz con respecto a x en D , entonces existe una única solución al problema de valor inicial. Cuando existe una única solución al problema de valor inicial denotamos dicha solución por $x(t, t_0, x_0)$. Debido a que para cada $t \geq t_0$, tenemos que $x(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n$, podemos utilizar cualquier norma en el espacio $\mathbb{R}^n$ como medida de magnitud de las soluciones. Aquí, consideraremos la norma euclidiana denotada por $\|\cdot\|$.

En las aplicaciones prácticas, las condiciones iniciales son determinadas mediante mediciones de las variables físicas. Como toda medición está sujeta a errores, entonces cuando estamos abordando un problema práctico debemos suponer que las condiciones iniciales que consideremos para nuestro análisis son solamente una aproximación de las condiciones iniciales reales del problema.

Explícitamente, supongamos que para nuestro análisis consideramos una condición inicial x_0 y sea $x(t, t_0, x_0)$ la correspondiente única solución de (1), que satisface que $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, definida en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T]$, donde $T > 0$. Ahora supongamos que la condición inicial real es $y_0 \neq x_0$ y sea $x(t, t_0, y_0)$ la única solución (1) satisfaciendo $x(t_0, t_0, y_0) = y_0$, la cual está también definida en el intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Es claro que $x(t, t_0, x_0) \neq x(t, t_0, y_0)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$, debido a la unicidad de soluciones. En otras palabras, la solución real $x(t, t_0, y_0)$ es distinta de la solución $x(t, t_0, x_0)$ que analizamos.

Intuitivamente, uno puede pensar que si el error entre x_0 y y_0 es suficientemente pequeño, entonces la solución $x(t, t_0, x_0)$ se encontrará suficientemente cerca de $x(t, t_0, y_0)$. Esta intuición se justifica formalmente por la propiedad de continuidad de soluciones con respecto a condiciones iniciales. En palabras, la propiedad de continuidad nos dice que si admitimos un error $\varepsilon > 0$ para las soluciones, entonces existe $\delta > 0$ tal que si el error en las condiciones iniciales es más pequeño que δ , es decir, $\|x_0 - y_0\| < \delta$, entonces podemos estar seguros que el error en las soluciones será más pequeño que ε , es decir, $\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$. Así, debido a la propiedad de continuidad de soluciones con respecto a condiciones iniciales, parece que las conclusiones obtenidas de nuestro análisis para condiciones iniciales aproximadas serán válidas para el sistema dinámico real cuando los errores de medición en las condiciones iniciales sean suficientemente pequeños en magnitud.

Desafortunadamente, el valor de δ depende del valor de T que determina el intervalo $[t_0, t_0 + T]$ donde la propiedad de continuidad de las

soluciones con respecto a condiciones iniciales se satisface y el problema es que δ decrece cuando T crece. Este hecho, limita la aplicación de los resultados obtenidos de nuestro análisis de soluciones para condiciones iniciales aproximadas debido a que, desde el punto de vista práctico, requerimos que las soluciones estén definidas para intervalos de tiempo suficientemente grandes. En otras palabras, requerimos que δ sea suficientemente grande para intervalos de tiempo suficientemente grandes.

El lector puede inferir que una forma de lograr lo anterior es haciendo que δ no dependa del tamaño del intervalo de tiempo donde las soluciones están definidas. Esta inferencia es precisamente la que da origen a la noción de estabilidad propuesta por Lyapunov cuya definición formal es la siguiente.

Definición 2.1. La solución $x(t, t_0, x_0)$ es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $\|y_0 - x_0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Si δ puede ser escogido de forma tal que no dependa de t_0 , entonces decimos que la solución $x(t, t_0, x_0)$ es uniformemente estable.

Es importante hacer algunas observaciones sobre la aportación de la definición de estabilidad de Lyapunov. La definición es la primera que establece formalmente el concepto de estabilidad en un sentido más amplio al que se usaba antes del trabajo de Lyapunov. Explícitamente, la definición se refiere a cualquier solución de la ecuación diferencial (1) y no solo a puntos de equilibrio del movimiento mecánico de cuerpos sólidos. Lo anterior permitió utilizar el concepto de estabilidad a ecuaciones diferenciales ordinarias modelando una amplia variedad de sistemas dinámicos que surgen en aplicaciones en física, química, biología e ingeniería y no únicamente a sistemas mecánicos como se utilizaba antes de la definición de Lyapunov.

El problema de estabilidad de una solución particular de (1) se puede transformar en el problema de estabilidad de la solución trivial (solución idénticamente cero para todo instante de tiempo) de una nueva ecuación diferencial. De hecho, sea $x(t, t_0, x_0)$ la solución de (1) cuya propiedad de estabilidad deseamos investigar. Definiendo $y(t) = x(t) - x(t, t_0, x_0)$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t, y(t)),$$

donde $g(t, y(t)) = f(y(t) + x(t, t_0, x_0)) - f(t, x(t, t_0, x_0))$, la cual tiene la solución trivial $y(t) = 0$, para todo $t \geq t_0$.

Con base en lo anterior, para el estudio de estabilidad es común considerar que la ecuación diferencial (1) tiene solución trivial. Es decir, se

asume que el lado derecho de la ecuación diferencial $f(t, x(t))$ satisface que $f(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0$. En este caso, la definición de estabilidad se puede escribir como sigue:

Definición 2.2. La solución trivial de (1) es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$.

En las aplicaciones resulta deseable que el efecto de los errores permisibles en las condiciones iniciales se desvanezcan cuando el tiempo es suficientemente grande. Esto motiva el concepto de estabilidad asintótica.

Definición 2.3. La solución trivial de (1) es asintóticamente estable si es estable y, adicionalmente, existe $\delta_a = \delta_a(t_0) > 0$ tal que si $\|x_0\| < \delta_a$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

Si δ_a puede ser escogido independiente de t_0 , entonces decimos que la solución trivial de (1) es asintótica y uniformemente estable.

3. El enfoque de Lyapunov

Como Lyapunov establece en su trabajo, su idea está motivada del teorema de Lagrange en 1811 y en la elegante demostración propuesta por Dirichlet en 1847. El resultado de Lagrange establece que para un sistema mecánico conservativo, un punto mínimo aislado de la energía potencial corresponde a un punto de equilibrio estable. La demostración de Lagrange no resultó convincente debido a que ignoraba el efecto de términos no lineales en la ecuación diferencial y Dirichlet encontró una demostración más rigurosa. La demostración de Dirichlet hace uso de la energía total del sistema mecánico conservativo, la cual es la suma de las energías potencial y cinética del sistema, y de su característica de ser una función de signo definido positivo con razón de cambio igual a cero. Al parecer estas ideas detrás de la demostración de Dirichlet motivaron a Lyapunov a definir funciones generales con signo definido positivo y utilizar su razón de cambio a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial para verificar la propiedad de estabilidad.

A continuación presentamos las definiciones de funciones de signo definido positivo propuestas por Lyapunov.

Definición 3.1. Una función $v(x)$ es positiva definida si existe $r > 0$ tal que $v(x)$ es continua en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ y satisface las siguientes dos condiciones:

1. $v(0) = 0$,

2. $v(x) > 0$ para $0 < \|x\| \leq r$.

Definición 3.2. Una función $v(t, x)$ es definida positiva si existe $r > 0$ tal que

1. $v(t, x)$ está definida para $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| < r$.
2. $v(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.
3. Existe una función definida positiva $v_1(x)$ tal que

$$v_1(x) \leq v(t, x), \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad \text{y} \quad \|x\| < r.$$

4. $v(t, x)$ es continua con respecto a x en $x = 0$ para todo $t \geq 0$ y $\|x\| < r$.

Sea $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ una solución arbitraria de (1) y $v(t, x)$ una función definida positiva. El valor de $v(t, x)$ a lo largo de la solución $x(t)$ es el valor de la función $v(t, x)$ evaluada en $x = x(t)$.

Teorema 3.3. *La solución trivial de (1) es estable si y solo si, existe una función positiva definida $v(t, x)$ tal que el valor de $v(t, x(t))$ a lo largo de las soluciones de (1) no crece con respecto a t .*

La suficiencia del teorema 3.3 nos dice que podemos mostrar la estabilidad de la solución trivial de (1) si podemos exhibir o contruir una función positiva definida $v(t, x)$ satisfaciendo las condiciones del teorema. La necesidad del teorema 3.3 nos dice que siempre existe una función $v(t, x)$ cuando la solución trivial de (1) es estable. La construcción de tal función $v(t, x)$ es el problema fundamental del teorema ya que la demostración de la necesidad exhibe una función $v(t, x)$ en término de las soluciones las cuales no conocemos explícitamente.

Ante este escenario, podemos intentar utilizar la suficiencia del teorema proponiendo una función positiva definida $v(t, x)$ particular y verificar si es no creciente a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial. El problema, una vez más, es que no conocemos explícitamente las soluciones de (1) y, por tanto, no podemos evaluar $v(t, x)$ en $x = x(t)$. Así, motivado de la aplicación práctica del teorema 3.3, Lyapunov propuso pedir diferenciabilidad de la función $v(t, x)$. Si suponemos diferenciabilidad de $v(t, x)$ con respecto a sus argumentos tenemos que

$$\frac{dv(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial x(t)} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Como $x(t)$ es solución de (1), entonces $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$ y

$$\frac{dv(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial x(t)} f(t, x(t)).$$

De la expresión anterior, observamos que el cálculo de la derivada con respecto a t de la función $v(t, x(t))$ puede realizarse sin necesidad de

conocer explícitamente la solución $x(t)$. Únicamente necesitamos conocer las derivadas parciales de $v(t, x)$ con respecto a cada uno de sus argumentos y el lado derecho de la ecuación diferencial (1), es decir, la función $f(t, x)$ que determina dicha ecuación diferencial.

Es claro que podemos verificar que $v(t, x(t))$ no crece con respecto a t si

$$\frac{dv(t, x(t))}{dt} \leq 0, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

Así, la diferenciabilidad nos ayuda a verificar el no crecimiento de la función positiva definida en una forma más sencilla y conveniente para la aplicación del teorema 3.3. Sin embargo, el precio a pagar por pedir diferenciabilidad de $v(t, x)$ es perder la necesidad en el teorema 3.3.

La suficiencia del teorema 3.3 utilizando funciones $v(t, x)$ diferenciables es lo que se conoce como el segundo método de Lyapunov para la estabilidad. El siguiente teorema, ampliamente usado en algunas aplicaciones, presenta el segundo método de Lyapunov para la estabilidad asintótica y uniforme de la solución trivial de (1).

Teorema 3.4. *La solución trivial de (1) es asintótica y uniformemente estable si existe una función definida positiva $v(t, x)$ y funciones definidas positivas $v_2(x)$ y $w(x)$ tales que las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

1. $v(t, x) \leq v_2(x)$ para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \leq r$,
2. El valor de la función a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial (1) es diferenciable respecto a t y su derivada satisface

$$\frac{dv(t, x(t))}{dt} \leq -w(x(t)), \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

De manera natural surge el problema de mostrar el recíproco o converso del segundo método de Lyapunov, es decir, mostrar la existencia de funciones $v(t, x)$ positivas definidas y diferenciables cuando la solución trivial de (1) es estable o asintóticamente estable. Este problema fue ampliamente tratado por Krasovskii en su libro [10], donde muestra que la existencia de tales funciones puede garantizarse bajo ciertos requerimientos de suavidad de la función describiendo el lado derecho de la ecuación (1).

Los teoremas recíprocos garantizan que si una solución de una ecuación diferencial ordinaria es estable, entonces dicha propiedad de estabilidad puede ser determinada mediante una función de Lyapunov. En otras palabras, los teoremas recíprocos muestran que el segundo método de Lyapunov puede ser utilizado universalmente para el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Uno podría pensar que una demostración que muestra la existencia de una función de Lyapunov debería proporcionar un método constructivo para obtener esta función. Desafortunadamente no es así. La gran mayoría de las demostraciones de teoremas recíprocos de Lyapunov no proporcionan, en general, un método sistemático para construir funciones de Lyapunov. De lo anterior, se dice comúnmente que encontrar una función de Lyapunov para un sistema dinámico particular es un arte.

4. El problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales con retardo

Consideremos la ecuación diferencial con retardo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2)$$

donde $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$, con D un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ y $h > 0$ representa el retardo de tiempo.

Observemos que para definir una solución de (2) no es suficiente conocer un instante inicial t_0 y un estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como ocurre en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para definir una solución de (2) necesitamos conocer un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [-h, 0] \mapsto \mathbb{R}^n$. Así, el problema de valor inicial o problema de Cauchy consiste en lo siguiente: Dado un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial φ , encontrar una función $x(t)$ definida para $t \geq t_0$ que satisface la ecuación diferencial (2) y $x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Desde luego, en $t = t_0$, la derivada en la ecuación (2) representa la derivada derecha.

La función inicial φ pertenece a un espacio funcional. La elección del espacio funcional depende de la aplicación bajo estudio. Siguiendo a Krasovskii [10], en nuestra presentación consideraremos el espacio de las funciones continuas a pedazos que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{PC} = \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Recordemos que $\varphi \in \mathcal{PC}$, si φ es continua excepto posiblemente en un conjunto finito de puntos de discontinuidad en los cuales los límites laterales existen. Para $\varphi \in \mathcal{PC}$ se tiene la norma $\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$. El espacio $\mathcal{PC}$ es lo suficientemente general para una amplia variedad de aplicaciones y para satisfacer las demostraciones de los resultados de estabilidad incluidos en esta presentación.

La existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial (2) se puede asegurar mediante el método paso a paso, el cual reduce tales problemas a una serie de problemas equivalentes de ecuaciones diferenciales ordinarias. Explícitamente, para $t \in [t_0, t_0 + h]$ tenemos que

$t - h \in [t_0 - h, t_0]$ y, por lo tanto, de $x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, se sigue que $x(t - h) = \varphi(t - t_0 - h)$. Entonces, la ecuación diferencial (2) toma la forma de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f_1(t, x(t)) = f(t, x(t), \varphi(t - t_0 - h)), \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + h],$$

con condición inicial $x(t_0) = \varphi(0)$. Supongamos que $f(t, x(t), x(t - h))$ es una función continua en el conjunto D . Entonces, $f_1(t, x(t))$ es continua con respecto a sus argumentos lo que implica que existe una solución $x_1(t) = x_1(t, t_0, x(t_0))$ definida en un cierto intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$, para algún $\tau > 0$. Si, adicionalmente, pedimos que $f(t, x(t), x(t - h))$ sea localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento, entonces $f_1(t, x(t))$ es localmente Lipschitz con respecto a su segundo argumento y, en consecuencia, $x_1(t)$ no solo existe sino que también es única. Si, $x_1(t)$ puede ser definida en el intervalo completo $[t_0, t_0 + h]$, entonces consideramos el siguiente intervalo $[t_0 + h, t_0 + 2h]$. Para $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$, tenemos ahora que $t - h \in [t_0, t_0 + h]$ y $x(t - h) = x_1(t - h)$ con lo que la ecuación (2) toma nuevamente la forma de una nueva ecuación diferencial ordinaria definida como sigue:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f_2(t, x(t)) = f(t, x(t), x_1(t - h)), \quad \text{para } t \in [t_0 + h, t_0 + 2h],$$

con la condición inicial $x(t_0 + h) = x_1(t_0 + h)$. Continuando este proceso en intervalos de tiempo de longitud h , uno puede concluir existencia y unicidad de soluciones de (2). El lector puede revisar el artículo [14], donde el método paso a paso es aplicado a una ecuación diferencial lineal escalar.

La clase más sencilla de ecuaciones diferenciales con retardo que uno puede considerar es precisamente la ecuación (2). Desde luego, podemos considerar el caso donde el lado derecho de la ecuación (2) involucra múltiples estados retardados $x(t - h_1), x(t - h_2), \dots, x(t - h_m)$, con $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$. En este caso, el método paso a paso también puede utilizarse para garantizar existencia y unicidad soluciones considerando intervalos $[t_0 + jh, t_0 + (j + 1)h]$, donde $h = \min_{j \geq 1} \{h_j\}$.

Existen sistemas dinámicos con retardo en los cuales la dinámica involucra no solo los valores de los estados en los instantes de tiempo t y $t - h$ sino todos los valores del estado en el intervalo de tiempo $[t - h, t]$. Estos casos motivan la definición más general de ecuaciones diferenciales con retardos conocida como ecuaciones diferenciales funcionales. En este tipo de ecuaciones, el método paso a paso ya no puede utilizarse y se requieren el uso de herramientas funcionales para garantizar existencia y unicidad de soluciones. En esta presentación nos limitaremos a ecuaciones diferenciales con retardo de la forma (2). El lector interesado

en las ecuaciones diferenciales funcionales puede consultar el excelente libro de Hale y Verduyn Lunel [5].

Seguindo las ideas del problema de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, sea $x(t, t_0, \varphi)$ la solución de (2) satisfaciendo $x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$. Consideremos una función inicial $\tilde{\varphi} \in \mathcal{PC}$ tal que $\tilde{\varphi} \neq \varphi$ y su correspondiente solución $x(t, t_0, \tilde{\varphi})$. El problema de estabilidad consiste en dado $\varepsilon > 0$ encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_h < \delta$ entonces $\|x(t, t_0, \tilde{\varphi}) - x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Al igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema de estabilidad de una solución particular de (2) se puede transformar en el problema de estabilidad de la solución trivial, $x(t) = 0, \forall t \geq -h$, de una nueva ecuación diferencial con retardo de la forma (2).

Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(t, 0, 0) = 0, \forall t \geq t_0$, lo que implica que (2) tiene la solución trivial. Las extensiones naturales de las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica son las siguientes.

Definición 4.1. La solución trivial de (2) se dice ser estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tal que para cualquier condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$ con $\|\varphi\|_h < \delta$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Si $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ puede escogerse independiente de t_0 , entonces decimos que la solución trivial es uniformemente estable.

Definición 4.2. La solución trivial de (2) se dice ser asintóticamente estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon)$ tal que para cualquier condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$ con $\|\varphi\|_h < \delta_a$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$
2. $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty.$

Si $\delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon)$ puede escogerse independiente de t_0 y existe H_1 tal que $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a t_0 , y $\varphi \in \mathcal{PC}$, con $\|\varphi\|_h < H_1$, entonces la solución trivial se dice ser asintótica y uniformemente estable.

5. El enfoque de Lyapunov-Krasovskii

Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal con retardo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - h), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

donde a, b son reales y $h > 0$ es el retardo. Cuando $b = 0$, se sabe que la función positiva definida $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ es una función de Lyapunov para la ecuación lineal $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$. Intentemos utilizar esta función para la ecuación escalar con retardo. La derivada de esta función a lo largo de las soluciones de la ecuación escalar es:

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = x(t) \frac{dx(t)}{dt} = x(t) (ax(t) + bx(t-h)) = ax^2(t) + bx(t)x(t-h).$$

Si $b = 0$, tenemos que $\frac{dv(x(t))}{dt} < 0$ cuando $a < 0$, lo que implica la estabilidad asintótica de la ecuación por el teorema 3.4. Sin embargo, cuando b no es cero, tenemos el problema de no poder determinar el signo del término $bx(t)x(t-h)$ y, en consecuencia, no podemos determinar el signo de $\frac{dv(x(t))}{dt}$ aún cuando supongamos que $a < 0$.

Este ejemplo sencillo muestra que el enfoque original de Lyapunov debe ser modificado para ecuaciones diferenciales con retardo.

Debido a que las soluciones de (2) pertenecen a $\mathbb{R}^n$, es decir, $x(t, t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \geq t_0$, resulta razonable continuar utilizando funciones de Lyapunov pero introduciendo condiciones adicionales que permitan garantizar la negatividad de su derivada en presencia de estados instantáneos $x(t)$ y estados con retardo de tiempo $x(t-h)$. Esta idea fue propuesta por Razumikhin en [15]. Sin embargo, Krasovskii [10] observó que esta clase de teoremas tipo Lyapunov no tienen, y no pueden tener, teoremas recíprocos análogos a los existentes en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Así, Krasovskii fue el primero en enfatizar que si deseamos extender las ideas de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardo entonces es necesario considerar las soluciones no como un vector en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sino como un vector-segmento $x(t+\theta, t_0, \varphi)$, para $\theta \in [-h, 0]$. Krasovskii mostró que con este nuevo punto de vista los teoremas del segundo método de Lyapunov y sus recíprocos podían extenderse naturalmente a las ecuaciones diferenciales con retardo.

De hecho, la idea de Krasovskii es consistente con el concepto de estado de sistemas dinámicos. En general, el estado de un sistema dinámico en un instante de tiempo $t_1 \geq t_0$ es la información mínima necesaria para definir la dinámica para un instante de tiempo $t \geq t_1$. Por lo tanto, para una solución $x(t, t_0, \varphi)$ de (2), el estado en el instante $t \geq t_0$ debe ser precisamente $x(t+\theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$, como lo propuso Krasovskii.

Generalmente se usa la siguiente notación para denotar el estado de una ecuación diferencial con retardo: $x_t(t_0, \varphi) : \theta \mapsto x(t+\theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$. Es claro que para cada $t \geq t_0$, $x_t(t_0, \varphi) \in \mathcal{PC}$. La idea fundamental de Krasovskii fue reemplazar la función de Lyapunov $v(t, x(t))$

definida en el espacio vectorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por una funcional $v(t, x_t)$ definida en el espacio funcional $\mathbb{R} \times \mathcal{PC}$. Así, el concepto de función positiva definida puede extenderse a funcionales positivas definidas como sigue.

Definición 5.1. Una funcional $v(t, \varphi)$ es positiva definida si existe $H > 0$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $v(t, \varphi)$ está definida para $t \geq 0$ y $\varphi \in \mathcal{PC}$ con $\|\varphi\|_h \leq H$.
2. $v(t, 0_h) = 0, t \geq 0$.
3. Existe una función definida positiva $v_1(x)$ tal que

$$v_1(\varphi(0)) \leq v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \text{y} \quad \varphi \in \mathcal{PC}, \|\varphi\|_h \leq H.$$

4. Para cualquier $t_0 \geq 0$ la funcional $v(t_0, \varphi)$ es continua con respecto φ en el punto 0_h , es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|\varphi\|_h < \delta$ implica que

$$|v(t_0, \varphi) - v(t_0, 0_h)| = v(t_0, \varphi) < \varepsilon.$$

En la definición, 0_h denota la función trivial $0_h : \theta \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in [-h, 0]$. Con esta definición es posible extender el teorema 3.3 de estabilidad para el caso de ecuaciones diferenciales con retardo (2).

Teorema 5.2. *La solución trivial de (2) es estable si y solo si, existe una funcional positiva definida $v(t, \varphi)$ tal que el valor de $v(t, \varphi)$ a lo largo de las soluciones de (2) no crece como función de t .*

El valor de la funcional $v(t, \varphi)$ a lo largo de las soluciones de (2) es el valor de $v(t, \varphi)$ evaluado en $\varphi = x_t(t_0, \varphi)$.

Como ocurre en el caso del teorema 3.3, el problema central del teorema 5.2 es la construcción de una funcional satisfaciendo las condiciones del teorema. Adicionalmente, tenemos el problema que no conocemos explícitamente las soluciones y, en consecuencia, no podemos conocer el valor de una funcional dada a lo largo de las soluciones de (2).

Motivado de estas limitaciones prácticas del teorema 5.2 y siguiendo la idea original de Lyapunov, Krasovskii propuso utilizar la derivada de la funcional. Sin embargo, en este caso, no existe una fórmula sencilla para determinar la derivada de una funcional para ecuaciones diferenciales con retardo que sea comparable a la fórmula para la derivada de funciones en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Así, en el caso general, nos tenemos que conformar con una definición de derivada de una funcional bastante general. Explícitamente, sea $V(t) = v(t, x_t)$ el valor de la funcional a lo largo de las soluciones de (2). Definimos la derivada de $V(t)$ como

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \sup \left(\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \right).$$

El siguiente teorema, ampliamente utilizado en algunas aplicaciones, proporciona condiciones suficientes de estabilidad asintótica y uniforme

para la solución trivial de (2) en términos de funcionales diferenciables, véase [5].

Teorema 5.3. *La solución trivial de (2) es asintótica y uniformemente estable si existen dos funcionales definidas positivas $v(t, \varphi)$ y $v_2(\varphi)$ y una función definida positiva $w(x)$ tal que las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

1. $v(t, \varphi) \leq v_2(\varphi)$, para $t \geq 0$ y $\varphi \in \mathcal{PC}$, con $\|\varphi\|_h \leq H$,
2. El valor de la funcional a lo largo de las soluciones de (2) es diferenciable con respecto a t y su derivada satisface

$$\frac{d}{dt}v(t, x_t) \leq -w(x(t)), \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

El teorema 5.3 es una generalización del teorema 3.4 para ecuaciones diferenciales con retardo. Al igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, existen teoremas de tipo recíproco que muestran la existencia de funcionales de Lyapunov cuando la solución trivial de (2) es asintótica y uniformemente estable, véase [10]. De manera análoga a los teoremas recíprocos en ecuaciones diferenciales ordinarias, las demostraciones no proporcionan en general un método sistemático para construir funcionales de Lyapunov.

6. Algunos ejemplos

Consideremos la ecuación escalar

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + b(t)x(t-h), \quad (4)$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son continuas satisfaciendo $a(t) \leq -a < 0$ y $|b(t)| \leq b$. Para $\varphi \in \mathcal{PC}$, consideremos la siguiente funcional:

$$v(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2(0) + \mu \int_{-h}^0 \varphi^2(\theta) d\theta,$$

donde $\mu > 0$. Primeramente necesitamos verificar que esta funcional sea positiva definida de acuerdo a la definición 5.1. Es claro que $v(0_h) = 0$. Como $\mu > 0$, entonces $v(\varphi) \geq \frac{1}{2}\varphi^2(0)$, lo que muestra que existe una función definida positiva $v_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ tal que $v(\varphi) \geq v_1(\varphi(0))$. Por otro lado, tenemos que

$$v(\varphi) \leq \frac{1}{2}\varphi^2(0) + \mu h \left(\sup_{\theta \in [-h, 0]} \varphi^2(\theta) \right) \leq \left(\frac{1}{2} + \mu h \right) \left(\sup_{\theta \in [-h, 0]} \varphi^2(\theta) \right),$$

lo que implica que existe una funcional $v_2(\varphi) = \left(\frac{1}{2} + \mu h \right) \|\varphi\|_h^2$ tal que $v(\varphi) \leq v_2(\varphi)$. Es claro que la funcional $v_2(\varphi)$ es también positiva definida. De acuerdo a la definición 5.1 nos falta mostrar que la funcional

$v(\varphi)$ es continua en 0_h . Observemos que de la desigualdad $v(\varphi) \leq v_2(\varphi)$ se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfaciendo $\delta^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2} + \mu h}$ tal que $\|\varphi\|_h < \delta$ implica $v(\varphi) < \varepsilon$, lo que muestra que la funcional $v(\varphi)$ es continua en 0_h .

La funcional a lo largo de las soluciones de (4) toma la forma siguiente:

$$v(x_t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \mu \int_{t-h}^t x^2(\theta) d\theta.$$

Entonces, la derivada de $v(\varphi)$ a lo largo de las soluciones de (4) es

$$\begin{aligned} \frac{dv(x_t)}{dt} &= x(t) (a(t)x(t) + b(t)x(t-h)) + \mu (x^2(t) - x^2(t-h)) \\ &= (a(t) + \mu)x^2(t) + b(t)x(t)x(t-h) - \mu x^2(t-h) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $a(t) \leq -a < 0$ y $|b(t)| \leq b$, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{dv(x_t)}{dt} &\leq (-a + \mu)x^2(t) + b|x(t)||x(t-h)| - \mu x^2(t-h) \\ &= -(|x(t)| \quad |x(t-h)|) M \begin{pmatrix} |x(t)| \\ |x(t-h)| \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} -(a - \mu) & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}b & \mu \end{pmatrix}.$$

Si la matriz M es positiva definida entonces la forma cuadrática en $|x(t)|$ y $|x(t-h)|$ es negativa definida y, en consecuencia, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\lambda_{\min}(M)x^2(t),$$

donde $\lambda_{\min}(M)$ denota el valor propio mínimo de la matriz M . Se sigue que existe una función definida positiva $w(x) = \lambda_{\min}(M)x^2$ tal que $\frac{d}{dt}v(x_t) \leq -w(x(t))$, $\forall t \geq 0$ y, por el Teorema 5.3 se concluye que (4) es asintóticamente estable. Cálculos directos muestran que la matriz M es positiva definida si y solo si,

$$a - \mu < 0 \quad \text{y} \quad 4(a - \mu)\mu + b^2 < 0.$$

Así, el problema consiste en garantizar que existe $\mu > 0$ tal que las desigualdades anteriores se satisfacen. Es sencillo ver que siempre existe $\mu > 0$ tal que las desigualdades se satisfacen y que el mejor valor posible es $\mu = \frac{a}{2}$, de lo que se concluye que (4) es asintóticamente estable si $b < a$.

Observemos que las condiciones de estabilidad obtenidas no dependen del valor del retardo $h > 0$. Por lo tanto, si la condición de estabilidad se satisface, entonces (4) es asintóticamente estable para cualquier

valor arbitrario del retardo $h > 0$. Este tipo de condiciones se conocen como condiciones de estabilidad independientes del retardo. Es importante mencionar que las condiciones de estabilidad independientes del retardo pueden ser bastante restrictivas pues implican que la ecuación diferencial libre de retardo, es decir, $\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t)$, es estable y existen ecuaciones con retardo cuya parte libre de retardo es inestable pero que son estables para ciertos valores de retardo. Estas condiciones son conocidas como condiciones de estabilidad dependiente del retardo.

A continuación, presentaremos una forma de obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo para la ecuación escalar (4) utilizando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Primeramente, observemos que debido a que $x(t)$ es continuamente diferenciable para $t \geq 0$, podemos escribir

$$x(t-h) = x(t) - \int_{-h}^0 \frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t} d\theta$$

para $t \geq h$. Sustituyendo $\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t}$ por el lado derecho de (4) y usando esta expresión para $x(t-h)$ en (4) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (a(t) + b(t))x(t) - b(t)a(t) \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \\ &\quad - b^2(t) \int_{-h}^0 x(t+\theta-h) d\theta, \quad t \geq h. \end{aligned} \quad (5)$$

Observemos que para definir una solución de (5) requerimos una función inicial $\psi : [-2h, 0] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $x(h+\theta) = \psi(\theta)$, $\theta \in [-2h, 0]$, mientras que para definir una solución de (4) requerimos una función inicial $\varphi : [-h, 0] \mapsto \mathbb{R}$ satisfaciendo $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Si la ecuación (5) es asintóticamente estable para cualquier función inicial $\psi \in \mathcal{PC}$, entonces la ecuación (4) es asintóticamente estable. Esto sigue del hecho que la ecuación (4) es un caso particular de la ecuación (5) con la condición inicial $\psi(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-2h, -h]$ y $\psi(\theta) = x(h+\theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$, donde $x(\cdot, \varphi)$ es la solución de (4) correspondiente a la condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$.

Con base en lo anterior, podemos investigar la estabilidad de (4) utilizando la ecuación auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= (a(t) + b(t))y(t) - b(t)a(t) \int_{-h}^0 y(t+\theta) d\theta \\ &\quad - b^2(t) \int_{-h}^0 y(t+\theta-h) d\theta, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Note que en (6) usamos la variable $y(t)$ en lugar de $x(t)$ para enfatizar que las ecuaciones diferenciales (4) y (6) son diferentes.

Como un ejemplo, consideremos la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(t)x(t-h),$$

donde $-b \leq b(t) < 0$, y la ecuación auxiliar

$$\frac{dy(t)}{dt} = b(t)y(t) - b^2(t) \int_{-h}^0 y(t+\theta-h) d\theta.$$

Consideremos la siguiente funcional:

$$v(\psi) = \frac{1}{2}\psi^2(0) + \mu \int_{-2h}^0 \left(\int_{\theta}^0 \psi^2(\xi) d\xi \right) d\theta.$$

Observemos que esta funcional $v(\psi)$ involucra una doble integral en contraste con la funcional $v(\varphi)$ utilizada en el análisis anterior. Mediante cálculos directos el lector puede verificar que la derivada de la funcional $v(\psi)$ a lo largo de las soluciones de la ecuación auxiliar es

$$\frac{dv(y_t)}{dt} = b(t)y^2(t) - b^2(t)y(t) \int_{t-2h}^{t-h} y(\xi) d\xi + 2h\mu y^2(t) - \mu \int_{t-2h}^t y^2(\xi) d\xi.$$

Utilizando la desigualdad

$$-b^2(t)y(t) \int_{t-2h}^{t-h} y(\xi) d\xi \leq \frac{b^2}{2} \left[hy^2(t) + \int_{t-2h}^{t-h} y^2(\xi) d\xi \right]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dv(y_t)}{dt} &\leq \left(b(t) + 2h\mu + \frac{hb^2}{2} \right) y^2(t) - \left(\mu - \frac{b^2}{2} \right) \int_{t-2h}^{t-h} y^2(\xi) d\xi \\ &\quad - \mu \int_{t-h}^t y^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Escogiendo $\mu = \frac{b^2}{2}$, se tiene que

$$\frac{dv(y_t)}{dt} \leq \left(b(t) + \frac{3hb^2}{2} \right) y^2(t).$$

Por lo tanto, si existe $b > 0$ tal que $-b \leq b(t) \leq -\frac{3hb^2}{2}$, entonces (4) es asintótica y uniformemente estable por el teorema 5.3. De lo anterior se concluye que (4) es asintótica y uniformemente estable si $0 < b < \frac{2}{3h}$, una condición de estabilidad dependiente del valor de retardo $h > 0$.

Un problema interesante es el problema de equivalencia de la propiedad de estabilidad entre la ecuación original (4) y la ecuación transformada (6). La estabilidad de la ecuación transformada (6) implica la estabilidad de la ecuación original (4), pero lo recíproco no es cierto en general. Este problema fue abordado en [6] y [7], donde se muestra que existen dinámicas adicionales a las de (4) en (6) introducidas por la transformación las cuales son responsables de la falta de equivalencia.

El problema de obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo ha atraído la atención de muchos investigadores y numerosos trabajos han sido reportados proponiendo distintas funcionales particulares en conjunto con algunas transformaciones de la ecuación diferencial con retardo. El lector interesado puede encontrar algunos de estos resultados en el libro [3].

Un enfoque más razonable y teóricamente importante es determinar el análogo del teorema recíproco de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Explícitamente, si suponemos que (4) es asintóticamente estable, el problema consiste en encontrar una funcional $v(\varphi)$ satisfaciendo las condiciones del teorema 5.3. El lector interesado en esta clase de resultados puede consultar el libro de Kharitonov [8], donde el problema recíproco es tratado ampliamente en el caso de ecuaciones diferenciales con retardo con coeficientes constantes.

Los ejemplos anteriores muestran la potencia del enfoque de Lyapunov-Krasovskii en la investigación del problema de estabilidad de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variantes en el tiempo, un problema que no puede estudiarse utilizando enfoques basados en la ubicación de las raíces de ecuaciones características (ecuaciones transcendentales) asociadas a ecuaciones lineales con coeficientes constantes mediante herramientas matemáticas como, por ejemplo, el uso de la función W de Lambert, entre otros métodos. El lector puede encontrar interesante el artículo [2] donde este tipo de resultados se ilustran mediante varios ejemplos en dinámica poblacional.

Por otro lado, el enfoque de Lyapunov-Krasovskii es una herramienta poderosa para el análisis de la propiedad de estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con retardos no lineales. Como un ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal con coeficientes variantes en el tiempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x^3(t) + b(t)x^3(t-h), \quad (7)$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son continuas. Supongamos que $|b(t)| \leq b$. Consideremos la siguiente funcional:

$$v(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi^4(0) + \frac{b}{2} \int_{-h}^0 \varphi^6(\xi) d\xi.$$

La funcional satisface $v_1(|\varphi(0)|) \leq v(|\varphi_h|) \leq v_2(|\varphi_h|)$, donde

$$v_1(s) = \frac{1}{4}s^4 \quad \text{y} \quad v_2(s) = \frac{1}{4}s^4 + \frac{bh}{2}s^6.$$

El lector puede verificar que esta funcional $v(\varphi)$ es positiva definida de acuerdo con la definición 5.1 y que su derivada a lo largo de las

soluciones de (7) es

$$\begin{aligned}\frac{dv(x_t)}{dt} &= x^3(t) (a(t)x^3(t) + b(t)x^3(t-h)) + \frac{b}{2} (x^6(t) - x^6(t-h)) \\ &= \left(a(t) + \frac{b}{2}\right) x^6(t) + b(t)x^3(t)x^3(t-h) - \frac{b}{2}x^6(t-h).\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad

$$b(t)x^3(t-h)x^3(t-h) \leq \frac{b}{2} (x^6(t) + x^6(t-h)),$$

se obtiene que

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq (a(t) + b) x^6(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Así, si $a(t) + b < 0, \forall t \geq 0$, entonces la solución trivial de (7) es asintótica y uniformemente estable por el teorema 5.3.

Utilizando el hecho que $\lim_{s \rightarrow \infty} v_1(s) = \infty$ es posible concluir que la estabilidad asintótica y uniforme de la solución trivial de (7) es global [5].

7. Conclusiones y notas

Hemos presentado una breve introducción al enfoque de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardos. Para lograr el objetivo, hemos primeramente presentado una breve introducción al problema de estabilidad y al enfoque clásico de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la presentación del problema de estabilidad y el enfoque de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias hemos seguido el excelente libro de Halanay [4]. Para la presentación del problema de estabilidad y el enfoque de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardo hemos seguido fundamentalmente el libro de Kharitonov [8] y tomado elementos importantes de los libros de Krasovskii [10] y Halanay [4]. Para el desarrollo de los ejemplos nos hemos basado en el libro de Hale y Verduyn Lunel [5].

El autor espera haber logrado introducir el enfoque de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con retardo y al mismo tiempo despertar en los estudiantes el interés en el tema fascinante de la estabilidad de ecuaciones diferenciales con retardos.

Bibliografía

- [1] R. Bellman y K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963.
- [2] A. Estrella, G. García y E. J. Ávila, «Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones», *Miscelánea Matemática*, vol. 51, 2010, 73–92.
- [3] K. Gu, V. L. Kharitonov y J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [4] A. Halanay, *Differential equations: Stability, oscillations, time lags*, Academic Press, New York, 1996.
- [5] J. K. Hale y S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer, New York, 1993.
- [6] V. Kharitonov y D. Melchor-Aguilar, «On delay-dependent stability conditions», *Syst. Control. Lett.*, vol. 40, 2000, 71–76, [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00003-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00003-7).
- [7] ———, «On delay-dependent stability conditions for time-varying systems», *Syst. Control. Lett.*, vol. 46, 2002, 173–180, [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00124-X](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00124-X).
- [8] V. L. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*, Birkhäuser, Boston, 2013.
- [9] N. N. Krasovskii, «On using the Lyapunov second method for equations with time delay [russian]», *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 20, 1956, 315–327.
- [10] ———, *Stability of motion: Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*, Stanford University Press, 1963.
- [11] A. M. Lyapunov, «The general problem of the stability of motion (english translation)», *Int. J. Control*, vol. 55, núm. 3, 1992, 531–534, <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>.
- [12] N. Minorsky, «Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions», *J. Appl. Mech.*, vol. 9, 1942, 65–71, <https://doi.org/10.1115/1.4009185>.
- [13] A. D. Myshkis, «General theory of differential equations with delay», *Amer. Math. Transl.*, vol. 55, 1951, 1–62.
- [14] S. Pérez y A. Bengochea, «Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo», *Miscelánea Matemática*, vol. 67, 2018, 57–71.
- [15] B. S. Razumikhin, «On the stability of systems with a delay [russian]», *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 20, 1956, 500–512.
- [16] V. Volterra, «Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires», *J. Math. Pures Appl.*, vol. 7, 1928, 249–298.
- [17] V. Volterra, *Theorie mathématique de la lutte pour la vie (in french)*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.