Miscelánea Matemática **58** (2014) 137–152 SMM

El error que cambió la mecánica celeste. Las vicisitudes de Poincaré

Shirley Bromberg y Ernesto Pérez-Chavela
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
México D.F. 09340
stbs@xanum.uam.mx, epc@xanum.uam.mx

Antecedentes

La observación de los cielos es una actividad casi tan vieja como la aparición de los primeros homo sapiens sobre la tierra como lo evidencian los múltiples observatorios astronómicos. Sin embargo el estudio moderno de la *mecánica celeste* como una rama importante de las matemáticas empieza con la publicación de los *Principia Mathematica* en 1687. En ellos, I. Newton establece la famosa ley de la gravitación universal para el movimiento de partículas puntuales en el espacio. Esta ley proporciona una formulación matemática de lo que hoy se conoce como el *problema de los* $N-$*cuerpos*, el cual modela el movimiento de N-masas puntuales moviéndose bajo la ley de atracción de Newton. Las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$m_i\ddot{q}_i = 2\sum_{1\leq j<i\leq N}^{N} \frac{Gm_im_j(q_j-q_i)}{\|q_j-q_i\|^3}, \quad i=1,2,\ldots,N,$$

donde $q_i \in \mathbb{R}^3$ representa la posición de la $i-$ésima partícula, m_i su masa y G es la constante de gravitación universal.

Es indudable que un hallazgo de esta naturaleza no aparece por generación espontánea. El descubrimiento de la gravitación universal de Newton estuvo basado en, y explica, las leyes del movimiento planetario establecidas por J. Kepler antes del nacimiento de Newton, las cuales a su vez se basaron en las observaciones del movimiento planetario efectuadas por el astrónomo danés T. Brahe. Los grandes descubrimientos son producto de trabajo arduo, disciplina y de aprender de nuestros antecesores. Como el mismo Newton decía en sus cartas «Si he logrado ver más lejos es porque estoy parado en hombros de gigantes».

Desde la formulación matemática del problema de los $N-$cuerpos, los científicos se preguntaron si nuestro sistema solar, visto como un problema de 8 cuerpos, el Sol y 7 planetas en aquella época, es estable. Newton, por ejemplo, sostenía que el sistema solar era inestable, y que Dios resuelve el problema controlando las inestabilidades. Obviamente esta idea fue muy criticada por sus colegas, particularmente por G. Leibniz. Los científicos franceses J-L. Lagrange y P-S. Laplace decían que el sistema solar es estable, afirmación basada en su análisis de los términos seculares al escribir las ecuaciones de movimiento en series de potencias. Por su parte, J. C. Maxwell y L. Boltzmann afirmaban que el sistema solar es inestable. Ellos creían en la inestabilidad en general, y hoy día nos damos cuenta de la certeza de sus afirmaciones.

El estudio del problema de los $N-$cuerpos ha producido múltiples aplicaciones, particularmente en las misiones espaciales y ha permitido comprender mejor nuestro sistema solar y muchos fenómenos astronómicos como, por ejemplo, los eclipses. La necesidad de resolver este problema ha requerido de nuevas maneras de mirar el problema y, en consecuencia, ha generado nuevas matemáticas entre las que podemos citar el estudio de singularidades, de diferentes sistemas coordenados, etc.

Poincaré y el problema de los $N-$cuerpos

Jules Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1854 en Nancy, Francia. Su padre fue un médico respetable, profesor de la escuela de medicina en la universidad de esa ciudad. Fue un niño de salud precaria, con miopía aguda, poco apto para las actividades físicas, sin dotes para el dibujo, pero de una inteligencia, profundidad de pensamiento y agudeza sobresalientes. Se doctoró el 1 de agosto de 1879 bajo la dirección de Ch. Hermite con la tesis titulada *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*. Desde 1881 hasta su muerte acaecida el 17 de julio de 1912 fue profesor de la Universidad de París (La Sorbona).

No es el objetivo de este trabajo ahondar más en la vida de Poincaré, así que con los antecedentes mencionados anteriormente nos abocaremos a describir su participación en el famoso concurso que cambió su vida, y que dividió la historia de la mecánica celeste en antes y después de Poincaré.

En 1885, G. Mittag-Leffler famoso e influyente matemático sueco propone al rey de Suecia y Noruega, Oscar II, organizar un concurso matemático para conmemorar su 60mo. aniversario, que tendría lugar casi cuatro años después, el 21 de enero de 1889. El rey, una persona culta, con un doctorado en filosofía y amante de las ciencias se entusiasma con la idea y le encarga su organización. Con este propósito Mittag-Leffler integra un comité científico formado por Hermite, K. Weierstrass y él mismo. Su primera tarea consistió en elaborar las reglas de la convocatoria y proponer los problemas del concurso. Finalmente se plantearon cuatro, tres por parte de Hermite y el restante por parte de Weierstrass. El anuncio del concurso apareció en 1885, en el Vol. 7 de *Acta Mathematica,* revista de mucho prestigio, fundada unos cuantos años antes y cuyo editor en jefe era el propio Mittag-Leffler. La fecha límite para presentar trabajos era el 1 de junio de 1888. Los ensayos deberían someterse con un seudónimo, adjuntando un sobre lacrado con el nombre del autor. El premio consistía en una medalla de oro y 2,500 coronas suecas, una cantidad no muy sustanciosa, pero que daría al ganador gran fama y prestigio.

Poincaré tenía 31 años de edad cuando escuchó hablar sobre el premio que ofrecía el rey Oscar II y decidió participar (algunos historiadores afirman que recibió una invitación personal del propio Mittag-Leffler para concursar), abordando el problema propuesto por Weierstrass, que decía lo siguiente:

> Dado un sistema con un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente bajo las leyes de Newton, nos proponemos, bajo la hipótesis de que dos puntos nunca chocan, representar las coordenadas de cada punto como series en una variable expresada mediante funciones de tipo conocidas, y que convergen uniformemente para cada valor real de la variable.

Poincaré decidió trabajar en este problema no solamente porque ya estaba interesado en mecánica celeste (ver [**8**] y [**9**]), sino además porque era consciente del gran reto que entrañaba su solución e intuía que para resolverlo habría que crear nuevas teorías matemáticas.

A principios de 1887, Poincaré había generado técnicas interesantes que podían ser aplicadas al problema de los $N-$cuerpos, ejemplo de las cuales son la teoría de las integrales invariantes, el teorema de recurrencia, los exponentes característicos. Sin embargo tenía claro que estaba lejos de una solución general del problema. En un momento estuvo tentado en desistir pero Mittag-Leffler lo alentó a continuar, sugiriéndole que podría trabajar en los otros problemas, idea que Poincaré descartó de inmediato: el problema que él quería resolver era el de los $N-$cuerpos.

Un año después Poincaré demostró que las únicas primeras integrales del sistema eran la energía total del sistema, el momento angular y la conservación del momento lineal. Esto implicaba, entre otras cosas, que el problema de los tres cuerpos no podía ser resuelto por métodos cuantitativos. Sin embargo a partir de este resultado creyó haber encontrado un cierto tipo de estabilidad en el problema restringido de los tres cuerpos, el cual precisaremos más adelante, y decidió escribir un ensayo con los resultados encontrados. A pesar de que este trabajo no respondía la pregunta original, lo sometió al concurso con fecha 17 de mayo de 1888, usando el seudónimo «Nada excede el límite de las estrellas». El trabajo de 158 páginas llevaba por título: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.*

Al concurso se presentaron 12 trabajos, 5 de los cuales abordaban el problema de los $N-$cuerpos. El comité evaluador decidió otorgar el premio a Poincaré por sus importantes contribuciones a la comprensión del problema. También otorgó medalla de oro a Paul Appell por su contribución a otro problema. Ambos recibieron el premio de manos del rey el día de su sexagésimo aniversario. Poincaré y Appell fueron recibidos en Francia como héroes nacionales.

Por esa época, preparar un manuscrito para enviarlo a imprenta llevaba alrededor de 9 meses. Durante ese lapso de tiempo E. Phramén uno de los editores de *Acta Mathematica* y encargado del trabajo de Poincaré, planteó ciertas preguntas sobre pasajes no muy claros en el trabajo. Mittag-Leffler transmitió estas preguntas a Poincaré quien escribió extensas notas explicatorias que serían añadidas como apéndices al texto original.[1] Cuando Poincaré se hallaba revisando a fondo su trabajo, encuentra un error realmente serio en otra parte de su ensayo. El 30 de noviembre de 1889, Poincaré envió un telegrama urgente a Mittag-Leffler pidiéndole parar inmediatamente la impresión de la revista. Desafortunadamente no solamente el número ya estaba impreso sino que además ya había comenzado a distribuirse.

El 5 de diciembre de 1889, Mittag-Leffler comunicó a Poincaré que había recuperado prácticamente todos los ejemplares enviados, que debía escribir una nueva versión libre de errores para que fuese pu-

[1]Esta es una de las versiones de la historia. La otra sostiene que Phramén se dió cuenta del error pero prefirió darle a Poincaré la oportunidad de encontrarlo.

blicada en ese número de la revista y que Poincaré mismo tenía que hacerse cargo del remplazo del número de la revista, lo cual le implicaba una erogación de $3,585$ coronas suecas, cantidad mucho mayor al premio recibido.

En su ensayo original Poincaré había creado una forma totalmente novedosa de estudiar las ecuaciones diferenciales: lo que hoy en día conocemos como teoría geométrica o teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, había pasado por alto un aspecto que debió haber sido obvio para él. Es fácil imaginar la gran presión y angustia que significaron los siguientes meses de su vida. Con gran estrés se puso a trabajar duramente, reflexionando a profundidad cada párrafo de su escrito. Los cambios que hizo al trabajo original modificaron sustancialmente su ensayo, que pasó de 158 a 270 páginas, marcando un nuevo rumbo en la historia de la mecánica celeste y los sistemas dinámicos. Su nuevo ensayo marca el inicio de una nueva forma de estudiar las ecuaciones diferenciales, donde aparece por primera vez el concepto de caos, aunque debemos señalar que Poincaré nunca usó esta palabra.

Finalmente en enero de 1890, un año después de haber recibido el premio, Poincaré envía a Phragmén la versión corregida de su ensayo que fué publicada en el Volumen 13 de *Acta Mathematica* con fecha de diciembre de 1890.

Este trabajo final es una primera versión de su obra monumental **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste** que consta de tres volúmenes cuyo contenido presentamos a continuación para que el lector pueda apreciar la diversidad de temas que contiene (puede encontrarse una versión en línea, ver [**7**].)

Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

Vol I. Soluciones periódicas, no existencia de integrales uniformes, soluciones asintóticas del problema de los tres cuerpos, dependencia continua de soluciones respecto a un parámetro.

Vol II. Métodos perturbativos y su aplicación al problema de los tres cuerpos.

Vol III. Integrales invariantes, estabilidad en el sentido de Poisson, órbitas periódicas de primera y de segunda especie, soluciones doblemente asintóticas o soluciones homoclínicas.

Antes de finalizar esta sección citaremos a Forest Moulton, famoso matemático especialista en mecánica celeste de mediados del siglo pasado, quien escribió:

> Se ha recalcado muchas veces que la memoria original de Poincaré, ganadora del premio otorgado por el rey Oscar II, contenía un error y que el trabajo finalmente publicado difiere del original. No nos quedemos con la impresión errónea de que la investigación original estaba totalmente equivocada y era de poco valor. Efectivamente, la versión original contenía un error señalado por Phragmén, que fue corregido por Poincaré, quien agradeció a Phragmén la revisión minuciosa de su trabajo.
>
> El error encontrado solo afecta la parte concerniente a soluciones asintóticas. El premio fue merecidamente otorgado. Si omitiéramos las partes afectadas por el error, el ensayo aún retiene muchos resultados originales y abre las puertas a nuevas teorías, hechos que son muy difíciles de encontrar en otros autores.
>
> Existen pocos hombres en la historia de la humanidad, incluyendo a los de gran reputación, que hayan sido más creativos en toda su vida, como lo fué Poincaré en el período que le llevó corregir su primer ensayo.

Sobre el error de Poincaré

Para entender el error contenido en la primera versión del ensayo de Poincaré, es necesario recurrir a un lenguaje más técnico, trataremos de hacerlo sin entrar en demasiados detalles. Esperamos que el lector pueda sobreponerse a las dificultades iniciales y disfrutar algunas de las brillantes ideas de Poincaré.

Empezaremos describiendo *el problema restringido de los tres cuerpos.* Este problema consiste en tomar dos cuerpos de masas positivas m_1, m_2 que llamaremos primarios, y un tercer cuerpo de masa m_3 tan pequeña que su fuerza de atracción sobre los primarios es despreciable. El objetivo es describir el movimiento del cuerpo de masa despreciable debido a las fuerzas gravitacionales que los primarios ejercen sobre él. Supondremos además que los primarios giran en órbitas circulares con velocidad angular constante ω. Recordemos que la motivación principal del problema era tratar de entender mejor nuestro sistema solar, donde los planetas giran en orbitas elípticas. Sin embargo las excentricidades de los planetas son tan pequeñas que bien podemos suponerlas circulares en una primera aproximación. Cuando nos paramos en un sistema rotatorio que gira a la misma velocidad angular ω, los primarios se ven como puntos fijos. Por consiguiente la posición de la masa despreciable m_3 se puede describir con dos coordenadas. Un problema con estas características se llama un *problema con dos grados de libertad.* Si normalizamos la masa total del sistema a 1, entonces un primario tendrá masa μ, el otro masa $1-\mu$, y cero el de masa insignificante (ver figura 1).

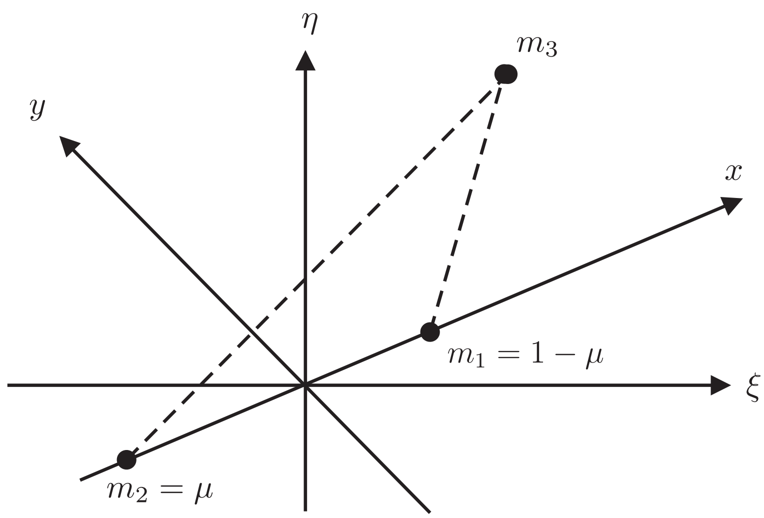

Figura 1: El problema restringido de los tres cuerpos.

Un *punto de equilibrio* de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

es un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donde el campo vectorial f se anula, es decir tal que $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio genera una solución de la forma $\phi(t) \equiv x_0$. Es decir una solución definida para todo tiempo t, donde las partículas permanecen siempre en el mismo estado. Denotemos por $\phi_t(x)$ a la solución del sistema (1) que en el tiempo cero está en la posición x. Un punto de equilibrio tiene asociados conjuntos de condiciones iniciales, cuyas órbitas terminan en el punto de equilibrio en tiempo pasado o futuro, estos conjuntos son llamados: *La variedad estable* asociada al punto de equilibrio x_0 que denotamos por $W^s(x_0)$ es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ cuya solución tiende a x_0, es decir

$$W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \phi_t(x) \to x_0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty\},$$

y *la variedad inestable* asociada a x_0

$$W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \phi_t(x) \to x_0 \quad \text{cuando} \quad t \to -\infty\}.$$

Cuando $W^s(x_0)$ coincide exactamente con $W^u(x_0)$, decimos que el punto de equilibrio x_0 es un *punto homoclínico.* Observemos que, por definición, la órbita $(\phi_t(x))$ que pasa por cualquier punto x de la intersección $W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ converge en tiempo futuro y pasado al punto x_0. Este concepto fue introducido por Poincaré, quien las llamó en su trabajo inicial *órbitas doblemente asintóticas.* En la figura 2, el lector puede observar un sistema con dos puntos de equilibrio p y q, q es un punto homoclínico y p, que está rodeado de órbitas periódicas, se llama *centro.*

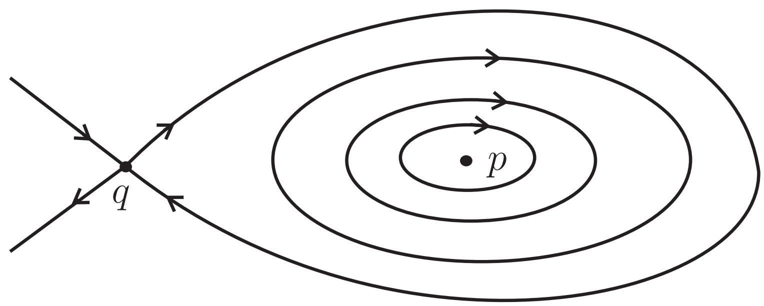

Figura 2: Soluciones doblemente asintóticas y órbitas periódicas.

Una sección transversal S en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ para el flujo generado por el sistema de ecuaciones diferenciales (1), es un subespacio de codimensión 1 en $\mathbb{R}^n$ con $p \in S$ y tal que el vector tangente en el punto de intersección de una órbita con S nunca está contenido en S. En otras palabras, localmente alrededor de p, las órbitas generadas por la ecuación (1) realmente atraviesan S.

Otro concepto interesante introducido por Poincaré en su estudio del problema restringido de los tres cuerpos fue lo que hoy conocemos como *mapeo de Poincaré o función del primer retorno.* Este mapeo se define de una sección transversal S en sí misma y asigna a cada punto en $x \in S$ el primer punto donde la órbita por $x, \phi_t(x)$ con $t > 0$ vuelve a atravesar S (ver figura 3). Con esto, para entender la dinámica alrededor de un punto x, es suficiente estudiar los iterados del mapeo de Poincaré, reduciendo en uno la dimensión del espacio donde tenemos que hacer el análisis, una idea realmente genial.

Como ya mencionamos anteriormente, el problema restringido de los tres cuerpos es un problema con dos grados de libertad con una primera integral (una cantidad conservada: la integral o la constante de Jacobi). Cuando tomamos en cuenta la velocidad de la masa despreciable, obtenemos que el retrato fase vive en una variedad $3-$dimensional, de tal forma que una sección transversal en esta variedad tendrá dimensión

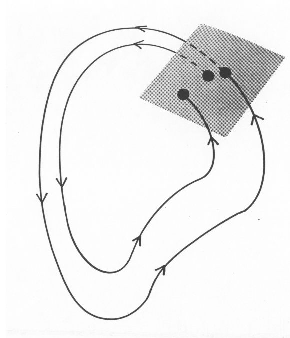

Figura 3: El mapeo de Poincaré.

2. Poincaré estaba particularmente interesado en las órbitas periódicas, así que primero encuentra los puntos de equilibrio en el sistema rotatorio. Observemos que esto corresponde a una órbita periódica que debe moverse a la misma velocidad angular constante ω con la que se mueven los primarios. Poincaré demuestra que este punto de equilibrio tiene asociadas órbitas doblemente asintóticas.

Para facilitar la explicación, vamos a suponer una situación más sencilla que la del problema restringido de los tres cuerpos, pero que contiene los mismos elementos, como son: un punto de equilibrio y soluciones doblemente asintóticas (una estrategia que Poincaré mismo usó en varios de sus trabajos). Supongamos que tenemos la misma situación descrita en la figura 2. Perturbamos este sistema mediante una aplicación periódica de periodo T. La sección transversal consiste en tomar el cociente del flujo módulo T, es decir seguir las órbitas un tiempo T, marcar los puntos correspondientes, y así sucesivamente, identificando todas estas secciones como una sola. Si tomamos el tiempo como una nueva variable (espacio fase extendido) y no tomamos en cuenta la perturbación periódica, entonces obtenemos un esquema como el mostrado en la figura 4. Observemos que el punto de equilibrio aparece como una línea recta, que al hacer la identificación módulo T se convierte en un círculo. Las variedades estables e inestables ahora son dos dimensionales y simétricas. Además la energía total del sistema se conserva.

Cuando tomamos en cuenta la perturbación periódica, podemos seguir hablando de las variedades estables e inestables, aunque ahora estas se ven ligeramente deformadas como se muestra en la figura 5. La energía total del sistema ya no es una primera integral (constante de movimiento), así que para saber cual es el comportamiento de una órbita en tiempo pasado o futuro, debemos analizar con cuidado la

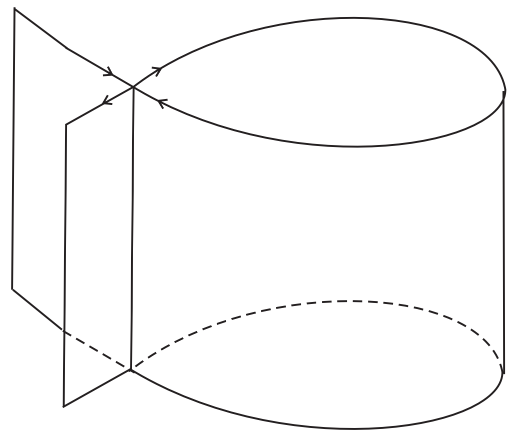

Figura 4: Soluciones homoclínicas en $\mathbb{R}^3$.

forma en que ella se acerca a la variedades inestables o estables respectivamente. De esta forma se puede mostrar que pequeños cambios en las condiciones iniciales de una órbita puede producir comportamientos totalmente diferentes.

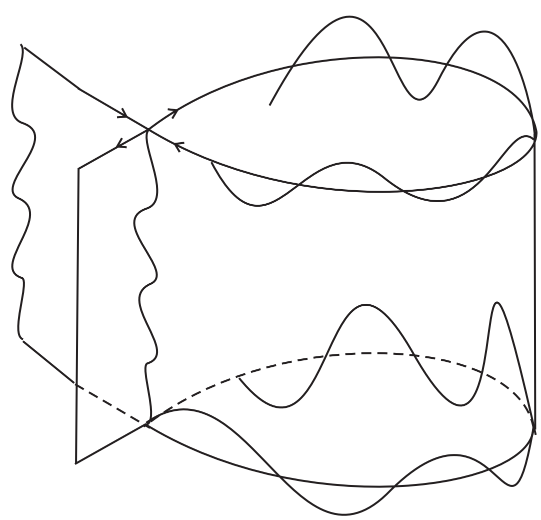

Figura 5: Intersección transversal de las subvariedades estable e inestable.

Poincaré creyó que el sistema perturbado no debía diferir mucho del sistema original. Argumentaba esto a partir del desarrollo local en series de potencias de las variedades invariantes asociadas al punto de equilibrio (punto homoclínico). Concluyó que las variedades invariantes debían continuarse hasta intersectarse, ya que si una de ellas quedaba en el interior de la otra, se perdería la propiedad de que el flujo preserva áreas. Hasta aquí su análisis es impecable. El error consiste en que, partiendo de estos argumentos concluye que la variedad estable y la variedad inestable deberían coincidir y que, por consiguiente, el sistema debía tener cierta estabilidad. Poincaré no se dió cuenta en un principio de que las variedades podían intersectarse transversalmente, creando una gran riqueza de movimientos y con una dinámica impredecible. Es increíble que con tantas ideas geniales en su manuscrito, se le haya escapado en primera instancia un detalle que hoy día nos parece muy inocente.

En un intento por explicar esto, digamos primero que Poincaré basaba sus trabajos en la intuición. Decía que «la intuición es el instrumento de la invención»[**6**]. Observemos a continuación que varias de sus demostraciones adolecen de un formalismo estricto y que no era muy cuidadoso al escribir. Si añadimos a lo anterior que Poincaré había impuesto tantas restricciones al problema de los tres cuerpos: los cuerpos se mueven a velocidad angular uniforme y constante en órbitas periódicas circulares y no elípticas, puede entenderse que haya pensado que el problema debía ser estable.

En la versión final de su ensayo, Poincaré muestra que la variedad estable y la variedad inestable tienen una infinidad de puntos de intersección, y que estas interesecciones son transversales (ver figura 5), esto produce una gama muy grande de movimientos, haciendo que el sistema sea muy sensible a pequeños cambios en las condiciones iniciales, dando como resultado la impredecibilidad.

En la figura 6 se muestra lo complicadas que son las variedades estable e inestable asociadas a un punto homoclínico sobre una sección transversal.

La siguiente sección es un poco más técnica. Describe el método de S. Smale [**11**] para mostrar el comportamiento errático cerca de un punto donde las variedades estable e inestable, se intersectan transversalmente, mediante un proceso de «discretización» y puede omitirse en una primera lectura. Sin embargo el genio que produjo esta demostración está a la altura del de Poincaré.

La herradura de Smale

Recordemos que un sistema caótico está caracterizado por las siguientes propiedades

1. Sensibilidad respecto a las condiciones iniciales, esto es, pequeñas

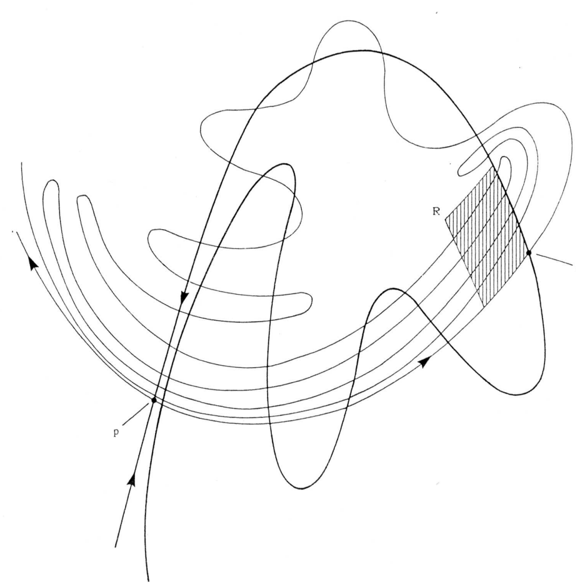

Figura 6: Intersección transversal de las subvariedades estable e inestable sobre una sección transversal.

perturbaciones en las condiciones iniciales pueden ocasionar dramáticas diferencias en el comportamiento futuro;

2. Existencia de al menos una órbita densa;

3. Las órbitas periódicas forman un conjunto denso.

Mostraremos que esta es la dinámica alrededor de un punto homoclínico donde las variedades estable e inestable se intersectan transversalmente. Para ello, tomemos un punto p en la intersección de las subvariedades estable e inestable y construyamos un rectángulo R con vértice en p, dos de cuyos lados estan formados por pequeños segmentos de la variedades estables e inestables, los otros dos lados son segmentos paralelos a los dos primeros, ver figura 6. Observemos que este rectángulo se expande en una dirección y se contrae en otra. Si hacemos una abstracción de este esquema podemos considerar un cuadrado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ en el plano, topológicamente equivalente al rectángulo original R. Definamos la función $f : D \to \mathbb{R}^2$ que es una contracción en x y una expansión en y. Si tomamos la intersección $f(D) \cap D$ obtenemos un esquema como el que se muestra en la figura 7. Esta función se conoce como la herradura de Smale.

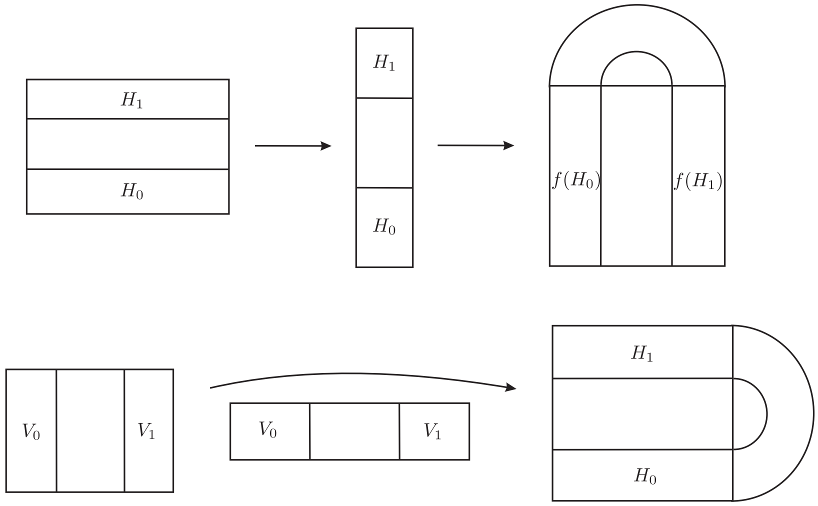

Figura 7: La función herradura de Smale.

Con cada uno de los rectángulos obtenidos de la intersección $f(D) \cap D$ podemos proceder en forma análoga. No es díficil mostrar que la función f tiene una inversa f^{-1}. Por lo tanto, es posible también hacer un proceso iterativo en sentido inverso como se muestra en la figura 8. Esta función f no es más que una función de Poincaré.

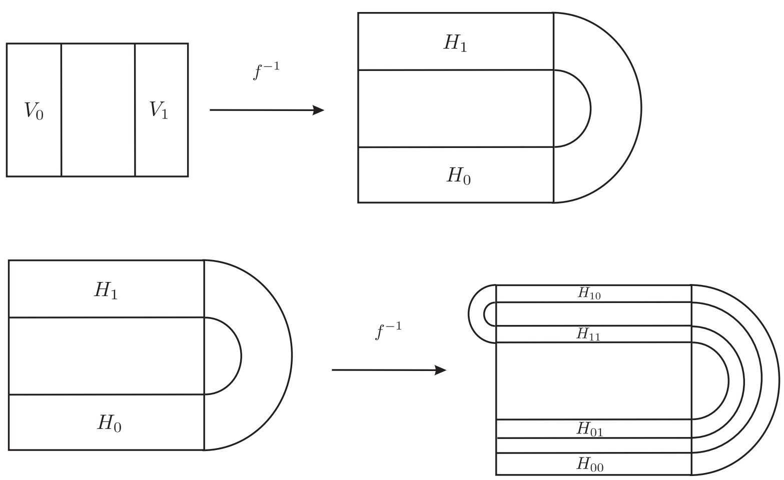

Figura 8: Algunos iterados de la función herradura de Smale.

La intersección infinita de todos los iterados del conjuto D hacia adelante y hacia atrás es un conjunto de Cantor que denotamos por Δ. Sobre este conjunto es posible definir una dinámica simbólica. Para esto definamos $S = \{0, 1\}$, y

$$\Sigma = \{\text{sucesiones doblemente infinitas de elementos de } S\}.$$

Sobre Σ, definimos una distancia: Dados $s = (\cdots, s_{-1}.\, s_0, s_1, \cdots)$ y $\bar{s} = (\cdots, \bar{s}_{-1}.\, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \cdots)$ en Σ definimos

$$d(s, \bar{s}) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i / 2^{|i|},$$

donde $\delta_i = 0$ si $s_i = \bar{s}_i$ y $\delta_i = 1$ cuando $s_i \neq \bar{s}_i$. En otras palabras las sucesiones s y $\bar{s}$ están cerca si coinciden sobre un bloque central. Finalmente definimos la función corrimiento $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ dada por

$$\sigma\left((\cdots, s_{-1} \,.\, s_0, s_1, \cdots)\right) = (\cdots, s_{-1}, s_0 \,.\, s_1, \cdots).$$

Se puede demostrar fácilmente que σ con la métrica d es continua, que es invertible y que su inversa es continua. Los iterados de σ definen una dinámica sobre Σ. Mencionemos algunas de sus propiedades:

1. σ tiene exactamente dos puntos fijos: $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ (sucesiones de puros ceros y unos respectivamente).

2. σ tiene órbitas periódicas de cualquier longitud (basta tomar sucesiones doblemente infinitas formada de bloques con todas las combinaciones posibles de dos elementos, de tres elementos, etc.).

3. σ tiene un conjunto no numerable de órbitas no-periódicas.

4. σ tiene una órbita densa (se obtiene al acomodar en una sola sucesión todos los bloques del segundo punto).

De la teoría de las ecuaciones diferenciales sabemos que las dinámicas sobre Δ y Σ son conjugadas, i.e. existe un homeomorfismo $\phi : \Delta \to \Sigma$ (función continua con inversa continua), tal que $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi = f|_\Delta$.

Por consiguiente, en una pequeña vecindad de un punto en la intersección transversal de las variedades estable e inestable asociadas a un punto homoclínico, podemos definir una dinámica simbólica, lo cual prueba la existencia de caos.

Para finalizar...

Cabe señalar que Poincaré nunca se refirió a este fenómeno como «caótico». Comportamientos de este tipo de fenómenos fueron apareciendo en distintos ámbitos de la ciencia. En matemáticas fueron estudiados bajo el nombre de Teoría ergódica. En 1961, E. Lorenz, estudiando modelos para la predicción del clima, encontró un fenómeno del mismo tipo. En 1969 en la reunión anual de la AAAS (American Association for the Advancement of Science) bautizó este fenómeno como el «efecto mariposa». El nombre *caos* fue acuñado por J. A. Yorke y apareció en título de un artículo del American Mathematical Monthly [**3**] con el nombre «Periodo tres implica caos». No es de sorprender que llamada así la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales capturara la imaginación de propios y extraños y abriera nuevas maneras de abordar problemas en diversas áreas científicas.

Sin embargo, Poincaré fue el primero en darse cuenta de lo complicada e intrincada que es la dinámica aun en un problema en apariencia simple como lo es el problema restringido de los tres cuerpos. Esta riqueza de la Mecánica Clásica sigue produciendo problemas que representan un gran reto para los investigadores interesados en profundizar en el conocimiento de nuestro sistema solar en particular y de la mecánica celeste en general.

Bibliografía

1. J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, AMS-LMS, 1991.
2. F. Diacu y P. Holmes, *Celestial Encounters. The origins of chaos and stability*, Princeton University Press, 1996.
3. T.-Y. Li y J. A. Yorke, «Period Three Implies Chaos», *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, núm. 10, 1975, 985–992.
4. F. R. Moulton, *Introduction to Celestial Encounters*, Dover, New York, 1970, Reprinted.
5. I. Peterson, *Newton's Clock. Chaos in the Solar System*, New York, 1993.
6. H. Poincaré, «La valeur de la Science», `http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/hp1905vs.xml`.
7. ———, «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», `http://ahp-poincare-biblio.univ-lorraine.fr/?t=on&page=10"`.
8. ———, *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, CRAS, 1883.
9. ———, «Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps», *Bulletin Astronomique*, vol. 1, 1884, 65–74.

10. C. Shaw, *La incógnita de Newton*, Roca editorial, 2004.
11. S. Smale, «Notes on differentiable dynamical systems, 1970 Global Analysis(Proc. Sympos. Pure Math.)», *Berkeley, Calif.*, vol. XIV, 1968, 277–287.
12. C. Villani, «http://www.dailymotion.com/video/xrm0hw_cedric-villani-la-meilleure-et-la-pire-des-erreurs-de-poincare_tech».