

La métrica de resistencia efectiva

Federico Menéndez Conde Lara
Área Académica de Matemáticas y Física, ICBI
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
fmclara@uaeh.edu.mx

1. Introducción

¿Cómo medir la distancia entre dos vértices de una gráfica?

La forma más usual de hacerlo, y tal vez también la más intuitiva, consiste en contar el número de aristas que hay en el camino más corto entre ellos. De haber pesos en las aristas, en vez de simplemente contarlas se suman los pesos; la idea en ambos casos es en todo caso la misma. Lo que acabamos de describir es lo que se conoce como la *métrica geodésica* de una gráfica con pesos, y ha sido ampliamente estudiada. Es sin duda una forma razonable y apropiada de medir distancias. Pensemos que los vértices de una gráfica representan ciudades y que los pesos de las aristas son los kilómetros de longitud de las carreteras que los unen o bien los tiempos medios de recorrido entre ellas. En esa situación la métrica geodésica reproduce de manera fiel lo que se entiende por distancia entre las ciudades. Existen sin embargo otras situaciones muy distintas, que también se modelan con gráficas, para las cuales la métrica geodésica deja de tener un comportamiento adecuado. Un ejemplo de esto es si los vértices son otra vez ciudades, pero ahora los pesos son el número de vuelos o corridas de autobuses diarios entre una ciudad y otra. En ese caso, la métrica geodésica aumentaría al agregar vuelos entre dos ciudades, cuando la verdad es que quisiéramos lo opuesto: que dos ciudades estén más cerca cuando están más conectadas entre sí. Otro escenario es cuando representamos una red social con una gráfica: los usuarios son los vértices y una arista indica que los usuarios son amigos en la red social. En automático, dos amigos están a distancia mínima uno (de acuerdo a la métrica geodésica) y lo mismo da que se trate de un contacto superficial entre dos personas que se acaban de conocer en un viaje a que se trate de usuarios con

docenas de viejos amigos en común. Sería bueno tener un indicador que distinga entre ambos casos, una distancia que sea menor en el segundo caso. También podemos pensar en que los vértices son películas en un servicio de streaming, y se plantea el problema de decidir «qué tan cerca están unas de otras» para hacer sugerencias a los usuarios. Podemos pensar en poner el peso en una arista de acuerdo a la cantidad de cosas en común que tengan las dos películas que une. Parece difícil que la métrica geodésica resulte útil en este contexto. Queremos una noción de distancia que acerque a los elementos cuando se agregan características en común: que los vértices de la gráfica se acerquen al agregar peso o alternativas de caminos entre los vértices. Hay en realidad un sin fin de escenarios donde «más significa menos», es decir que más peso entre las conexiones debería significar menor distancia.

Este artículo es una exposición de los fundamentos matemáticos de una forma de medir distancias entre los vértices de una gráfica llamada la *métrica de resistencia efectiva*. Esta métrica tiene características que la hacen apropiada para modelar situaciones como las comentadas en el párrafo anterior. Con la métrica de resistencia efectiva las distancias se reducen cada vez que agregamos un camino y también cuando aumentamos los pesos en las aristas. Esta métrica tiene su origen en el estudio de circuitos eléctricos (e.g. [6]), y se ha usado en aplicaciones muy diversas. Al estar relacionada de manera profunda con el operador de Laplace en gráficas, no es sorprendente que aparezca en muchos lados. Algunos contextos en los que se ha estudiado incluyen la química de moléculas [2], el tráfico aéreo [17], la curvatura en gráficas [5], el agrupamiento de datos [1], las caminatas aleatorias [6, 16, 15], entre otros. Esta métrica se ha definido también para conjuntos infinitos, como son los fractales auto-similares [9, 14] y las redes infinitas [8]; en estos dos ejemplos de conjuntos infinitos, la métrica de resistencia efectiva está relacionada de forma estrecha con la construcción de laplacianos asociados a esos objetos.

Relacionado con la resistencia efectiva está el *índice de Kirchhoff*, definido como la suma de las distancias entre las parejas de vértices. El que la resistencia efectiva entre dos vértices sea pequeña, significa que hay muchas conexiones entre ellos, de modo que el índice de Kirchhoff es un indicador que de algún modo refleja qué tan interconectada está la gráfica. Como resultado de esto, el índice de Kirchhoff se ha usado para analizar la robustez de las conexiones de redes (gráficas con pesos) en distintas aplicaciones (e.g. [3, 7, 11, 13, 12]). En 1993, D. Klein y M. Randić [10] probaron que el índice de Kirchhoff tiene una expresión muy simple en términos de los eigenvalores del laplaciano de una gráfica, hecho que evidencia que se trata un objeto relacionado de forma central y profunda a dicho operador. En concreto, lo que se probó en [10] es

que el índice de Kirchhoff es el producto del número de vértices de la gráfica por la traza de la pseudo-inversa del laplaciano.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se introducen la notación y la teoría preliminar, en concreto se presentan el operador de Laplace en gráficas y las funciones armónicas asociadas al mismo. En la sección 3 se define la métrica de resistencia efectiva, la calculamos en unos ejemplos y presentamos los teoremas 3.2 y 3.3 que dan herramientas prácticas para calcular la resistencia efectiva en muchos ejemplos. En la sección 4 damos una demostración del hecho de que en efecto la resistencia efectiva es una métrica. En la sección 5 se demuestra la igualdad (8), que relaciona a la resistencia efectiva con el espectro del laplaciano.

2. Funciones armónicas en gráficas

Una *gráfica* consta de un conjunto finito de vértices V y un conjunto de aristas E . Cada arista es una pareja no ordenada de vértices distintos; esto es, consideramos gráficas finitas, no dirigidas y sin lazos. Si existe una arista $\{u, v\} \in E$ decimos que los vértices u y v son vecinos entre sí y denotamos eso por $u \sim v$. En este trabajo será conveniente considerar que los vértices de la gráfica están ordenados $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Dada una gráfica G se asignan valores reales positivos a sus aristas, llamados *pesos*. Aprovechando el orden de los vértices, esto puede hacerse mediante una matriz simétrica ω de tamaño $n \times n$. Si $v_i \sim v_j$ la entrada $\omega_{i,j} > 0$ es el peso de la arista que los une, mientras que tener $\omega_{i,j} = 0$ significa que los vértices v_i y v_j no son vecinos entre sí. Decimos que la pareja (G, ω) es una *gráfica con pesos*. El caso en el que todas las entradas positivas de ω son iguales a 1, se considera igual a la gráfica original G , sin pesos. La suma de los pesos de las aristas que contienen a un vértice es el *grado* del vértice. Para vértices vecinos v_i y v_j usaremos la notación $r_{i,j} = 1/\omega_{i,j}$ y llamaremos a $r_{i,j}$ la *resistencia local* entre esos vértices, terminología que proviene de la teoría de circuitos eléctricos. Dado un subconjunto V' del conjunto de vértices de (G, ω) , la *subgráfica inducida* por V' es la gráfica con vértices V' y con las mismas aristas y pesos que tenían en la gráfica original.

Denotamos por $\ell(V)$ al espacio vectorial de funciones reales definidas en el conjunto de vértices de la gráfica. Haciendo de nueva cuenta uso del orden de los vértices, para $f \in \ell(V)$ escribimos $f_j = f(v_j)$. En $\ell(V)$ consideramos el producto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^n f_j g_j.$$

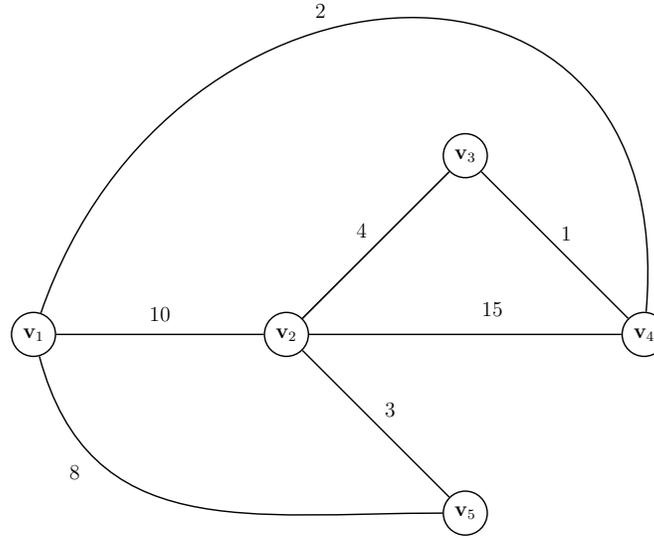


Figura 1. Una gráfica con pesos en las aristas, y con sus vértices ordenados.

Llamamos *base natural* a la base ortonormal de $\ell(V)$

$$\{\mathbf{1}_{v_1}, \dots, \mathbf{1}_{v_n}\},$$

donde $\mathbf{1}_v$ es la función indicadora del vértice v . De forma análoga definimos, para las aristas, el espacio $\ell(E)$ y su producto interno.

Existen diversos operadores definidos en $\ell(V)$ que resultan muy relevantes para entender la estructura subyacente de la gráfica. Sin duda uno de los más importantes de ellos es el laplaciano¹ que presentamos a continuación, y que es en muchos sentidos análogo al operador de Laplace usual de los cursos de ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 2.1. El operador de Laplace o laplaciano de la gráfica con pesos (G, ω) es el operador definido por

$$L_{G, \omega} : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$$

$$(L_{G, \omega} f)_j = \sum_{v_i \sim v_j} \omega_{i,j} (f_j - f_i).$$

Cuando no sea necesario precisar la gráfica o los pesos, los omitiremos escribiendo L_ω en vez de $L_{G, \omega}$, o incluso simplemente L . En la figura 2 se muestra un ejemplo del operador de Laplace de una gráfica con pesos aplicado a un vector particular. Notemos también que es inmediato de su definición que el laplaciano se anula en funciones constantes.

¹A veces llamado «laplaciano combinatorio» para distinguirlo de otros laplacianos que se consideran en la literatura de gráficas.

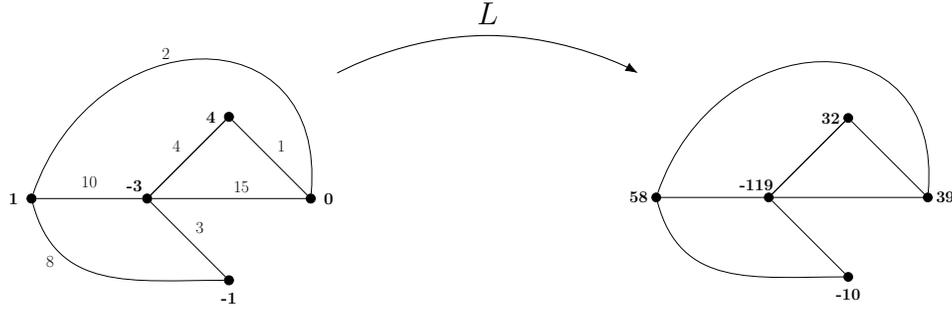


Figura 2. Una función en $\ell(V)$ y su imagen bajo el operador de Laplace. Los números junto a las aristas son los pesos y los números en negrita a los lados de los vértices son los valores de la función.

A la representación matricial de $L_{G,\omega}$ respecto a la base natural le llamaremos la *matriz laplaciana* de (G, ω) . Por poner un ejemplo, la matriz laplaciana de la gráfica en la figura 1 es

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 & -2 & -8 \\ -10 & 32 & -4 & -15 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & -15 & -1 & 18 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Desde luego, las matrices laplacianas que resultan dependen del orden de los vértices; pero todas ellas son unitariamente equivalentes entre sí. Más aún, pueden llevarse unas a otras permutando los mismos renglones y columnas. Si aplicamos el laplaciano al elemento $\mathbf{1}_{v_k}$ de la base natural obtenemos una función que en v_k toma el valor del grado de ese vértice, y para $i \neq k$ toma el valor $-\omega_{i,k}$. Por ello, las entradas en la diagonal de la matriz laplaciana son los grados de los vértices, mientras que las entradas fuera de la diagonal son los pesos en negativo.

De lo observado arriba se sigue que toda matriz laplaciana tiene las propiedades siguientes:

- Es simétrica.
- Las entradas en su diagonal principal son todas no negativas.
- Las entradas fuera de la diagonal principal son todas no positivas.
- La suma de las entradas de cada uno de sus renglones es igual a cero.

De la primera de estas propiedades se sigue que el laplaciano es un operador auto-adjunto, mientras que la última propiedad es consecuencia del hecho ya señalado de que los vectores constantes están en el núcleo del operador. En sentido opuesto, también es cierto que cualquier matriz que satisface las cuatro propiedades de arriba es la matriz laplaciana de una gráfica con pesos, ya que basta definir el peso entre

los vértices $v_i \neq v_j$ como el valor absoluto de la entrada (i, j) en la matriz.

La forma cuadrática asociada al laplaciano, a veces llamada la *forma de la energía* en analogía a la del laplaciano de EDPs, se define como:

$$\langle Lf, f \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{v_i \sim v_j} \omega_{i,j} (f_j - f_i) f_j.$$

La forma de la energía puede escribirse también como una suma sobre las aristas (e.g. [4, 14]):

$$\langle Lf, f \rangle = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \omega_{i,j} (f_j - f_i)^2. \quad (1)$$

Esta última igualdad puede probarse acomodando términos con cuidado. Hay sin embargo otro modo de probarla, que discutimos a continuación, y que resulta más interesante puesto que ayuda a entender mejor la estructura del laplaciano.

Definimos el operador

$$\begin{aligned} T : \ell(V) &\rightarrow \ell(E) \\ (Tf)(\{v_i, v_j\}) &= \sqrt{\omega_{i,j}} (f_j - f_i), \quad i < j. \end{aligned}$$

Escribiendo la representación matricial de T respecto a bases naturales en los vértices y en las aristas, y transponiendo dicha matriz, se puede ver que su operador adjunto T^* está dado por

$$\begin{aligned} T^* : \ell(E) &\rightarrow \ell(V) \\ (T^*F)(v_k) &= \sum_{\substack{v_j \sim v_k \\ j < k}} \sqrt{\omega_{k,j}} F(\{v_k, v_j\}) - \sum_{\substack{v_j \sim v_k \\ j > k}} \sqrt{\omega_{k,j}} F(\{v_k, v_j\}). \end{aligned}$$

El producto T^*T es igual al laplaciano L , lo que puede verificarse por simple sustitución, y entonces

$$\langle Lf, f \rangle = \langle T^*Tf, f \rangle = \langle Tf, Tf \rangle$$

de donde se sigue (1). Retomando la analogía con los operadores diferenciales, el operador T viene a ser el análogo del gradiente, y su adjunto T^* el análogo de la divergencia. Así que aquí también el laplaciano L es igual a la divergencia del gradiente. En ese sentido, puede decirse que (1) es una *identidad de Green*.

La igualdad (1) evidencia que el laplaciano es un operador semi-positivo definido. Sus eigenvalores los ponemos en orden no decreciente:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

La igualdad (1) también nos dice que para gráficas conexas el núcleo del laplaciano tiene dimensión 1: si un vector no es constante tiene que

existir una arista que une vértices para los que el vector toma valores distintos.

Como se hace para el laplaciano clásico, para el laplaciano en gráficas diremos que una función h es *armónica* en un conjunto de vértices W si $(Lh)(w) = 0$ para todo $w \in W$. En ambos contextos el llamado «problema de Dirichlet» consiste en encontrar funciones armónicas dados valores en la frontera. Para el caso de gráficas, la frontera puede ser cualquier subconjunto no vacío de vértices. La solución del problema de Dirichlet para el laplaciano en gráficas siempre existe, es única y juega un papel fundamental para definir la métrica de resistencia efectiva. Presentamos este resultado de manera precisa a continuación.

Definición 2.2 (Extensión armónica). Sea V el conjunto de vértices de una gráfica con pesos. Para $\tilde{V} \subset V$, sea $f \in \ell(\tilde{V})$. Si $g \in \ell(V)$ es tal que coincide con f en \tilde{V} diremos que g es una *extensión* de f . Si además se tiene que $(Lg)(v) = 0$ para todo $v \in V \setminus \tilde{V}$, diremos que g es una *extensión armónica* de f .

Teorema 2.3. Sea (G, ω) conexa, V su conjunto de vértices y $\tilde{V} \subset V$. Toda $f \in \ell(\tilde{V})$ tiene una única extensión armónica.

Demostración. Sean m y n respectivamente el número de vértices en \tilde{V} y en V . Consideremos un orden de los vértices en V tal que los primeros m vértices son los de \tilde{V} . La condición de que h_f sea la extensión armónica puede escribirse haciendo uso de la matriz laplaciana como

$$L h_f = \left(\begin{array}{c|c} H & J \\ \hline J^T & X \end{array} \right) \begin{pmatrix} f \\ \hat{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H f + J \hat{f} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde H y X son, de forma respectiva, matrices cuadradas de tamaño $m \times m$ y $(n - m) \times (n - m)$. El vector $\hat{f} \in \ell(V \setminus \tilde{V})$ corresponde a la parte de h_f fuera de \tilde{V} , es decir los valores por determinar.

La igualdad se cumple si y solo si

$$J^T f + X \hat{f} = 0,$$

de donde la existencia y unicidad de \hat{f} — y equivalentemente la de h_f — se sigue si X es una matriz no singular. De ser ese el caso, podemos despejar

$$\hat{f} = -X^{-1} J^T f.$$

De hecho, resulta ser que X es una matriz positiva definida, por lo que en particular es invertible, lo que podemos justificar de la manera siguiente: si a $g \in \ell(V \setminus \tilde{V})$ la extendemos a todo V poniendo $g = 0$ en \tilde{V} tenemos que $\langle X g, g \rangle = \langle L g, g \rangle$. De este modo X es semi-definido positivo como L , pero si $\langle X g, g \rangle = 0$ entonces g solo puede ser la

función cero, ya que $\langle Lg, g \rangle$ solo se anula cuando g es constante en V . Por lo tanto X es positiva definida. \square

Un resultado clásico en ecuaciones diferenciales parciales establece que, dentro de todas las extensiones posibles, la extensión armónica es la que minimiza la energía. Para gráficas con peso sucede lo mismo:

Teorema 2.4. *Sea h_f la extensión armónica de una función $f \in \ell(\tilde{V})$, como en el teorema 2.3. Para toda extensión $x \in \ell(V)$ de f se tiene que*

$$\langle Lh_f, h_f \rangle \leq \langle Lx, x \rangle,$$

con igualdad si y solo si $x = h_f$.

Demostración. Sean (x_1, \dots, x_n) los valores de x donde los vértices están ordenados de forma que primero estén todos los vértices de \tilde{V} . Si m es el número de vértices en \tilde{V} , queremos determinar los valores (x_{m+1}, \dots, x_n) que minimizan la expresión (1)

$$\langle Lx, x \rangle = \sum_{\{v_i \sim v_k\}} \omega_{i,j} (x_i - x_j)^2$$

donde (x_1, \dots, x_m) están dados. Derivando para cada x_k se obtiene

$$\frac{d}{dx_k} \langle Lx, x \rangle = 2 \sum_{\{v_i \sim v_k\}} \omega_{i,k} (x_k - x_i) = 2(Lx)_k.$$

De este modo, se observa que el único punto crítico es la extensión armónica. La matriz hessiana es igual a dos veces la matriz X que aparece en la prueba del teorema 2.3, por lo que sabemos que es definida positiva y nuestra función de interés tiene un único mínimo local para h_f . Como h_f es un polinomio cuadrático con coeficientes positivos, el mínimo tiene que ser global. \square

3. La resistencia efectiva

En esta sección presentamos nuestro objeto central de estudio: la resistencia efectiva, una función definida en $V \times V$ con valores reales que resulta ser una métrica, como mostramos más adelante (teorema 4.2). De la misma manera que con la métrica geodésica, la métrica de resistencia efectiva se define solo para gráficas conexas. De alguna manera, en ambos casos la distancia entre vértices de diferentes componentes conexas tendría que ser infinita por no existir ningún camino que los una. Por esta razón, en lo que sigue se van a considerar solo gráficas conexas.

La definición de resistencia efectiva está lejos de ser tan intuitiva a primera vista como la de la métrica geodésica. Presentaremos en esta sección algunos resultados (teoremas 3.2 y 3.3) que muestran que, sin embargo, la resistencia efectiva puede ser calculada sin demasiada dificultad en muchas situaciones.

Definición 3.1. Dados dos vértices distintos u y v en (G, ω) , sea h la extensión armónica de la función con dominio $\{u, v\}$ dada por $h(u) = 1$ y $h(v) = 0$. Definimos la resistencia efectiva entre u y v por

$$r_\omega(u, v) = \langle L_\omega h, h \rangle^{-1}.$$

La resistencia efectiva de un vértice consigo mismo se define como

$$r_\omega(u, u) = 0.$$

NOTA: Por lo general, omitiremos ω del subíndice de r , escribiendo $r(\cdot, \cdot)$ por $r_\omega(\cdot, \cdot)$ a menos que sea necesario especificar.

Observamos que si no se tuviera la hipótesis de conexidad en la definición 3.1, tomando los vértices u y v en distintas componentes conexas la extensión armónica h sería constante en cada componente, con la consecuencia de que entonces $\langle Lh, h \rangle = 0$ y se podría decir que en ese caso la resistencia efectiva es infinita.

La expresión Lh en la definición 3.1 se anula en todos los vértices excepto en u y en v , mientras que $h(v) = 0$. De esto es claro que $\langle L_\omega h, h \rangle = (L_\omega h)(u)$, por lo que la resistencia efectiva también puede escribirse como

$$r_\omega(u, v) = \frac{1}{(L_\omega h)(u)}.$$

Mostraremos más adelante (teorema 4.2) que la resistencia efectiva es una métrica en el conjunto de vértices.

A continuación calculamos la resistencia efectiva en dos ejemplos que son a la vez muy simples y muy ilustrativos: el *camino* P_3 y el *ciclo* C_3 , las únicas gráficas conexas con tres vértices, que mostramos en la figura 3.



Figura 3. A la izquierda el camino P_3 y a la derecha el ciclo C_3 .

RESISTENCIA EFECTIVA EN P_3 .

Para calcularla basta encontrar las extensiones armónicas correspondientes, que se ilustran en la figura 4. Los cálculos pueden hacerse de forma directa en todos los casos: para calcular $r(v_1, v_2)$ observamos que

basta tomar $h_3 = h_2$ y el laplaciano de h se anula en v_3 . Si queremos calcular $r(v_1, v_3)$, ponemos $h_1 = 1$, $h_3 = 0$ y necesitamos que $(Lh)_2 = 0$, lo que significa que

$$(Lh)_2 = \omega_{1,2}(h_2 - 1) + \omega_{2,3}h_2 = 0.$$

Despejando se obtiene el valor

$$h_2 = \frac{\omega_{1,2}}{\omega_{1,2} + \omega_{2,3}}.$$

De las extensiones armónicas, se sigue que la resistencia efectiva entre parejas de vértices vecinos es simplemente

$$r(v_i, v_2) = \frac{1}{\omega_{i,2}}, \quad i = 1, 3,$$

mientras que para los vértices en los extremos está dada por

$$r(v_1, v_3) = \left[\omega_{1,2} \left(1 - \frac{\omega_{1,2}}{\omega_{1,2} + \omega_{1,3}} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\omega_{1,2}} + \frac{1}{\omega_{2,3}}.$$

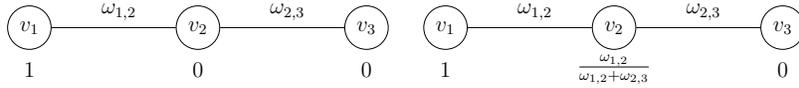


Figura 4. Las extensiones armónicas para las resistencias efectivas en P_3 , a la izquierda para vértices vecinos y a la derecha para vértices en los extremos.

Notemos que en este último caso las resistencias se suman:

$$r(v_1, v_3) = r(v_1, v_2) + r(v_2, v_3) = r_{1,2} + r_{2,3}.$$

Este es el caso más simple de algo que sucede en situaciones mucho más generales, que incluye a todos los árboles (gráficas sin ciclos), y que presentamos en el teorema 3.2.

RESISTENCIA EFECTIVA EN C_3 .

En este caso, para calcular la resistencia efectiva entre un par de vértices v_i y v_j se considera la función que es armónica en el tercer vértice v_k (figura 5). Dados $h_i = 1$ y $h_j = 0$ se requiere que

$$(Lh)_k = \omega_{i,k}(h_k - 1) + \omega_{j,k}h_k = 0,$$

de donde se obtiene el valor

$$h_k = \frac{\omega_{i,k}}{\omega_{i,k} + \omega_{j,k}}.$$

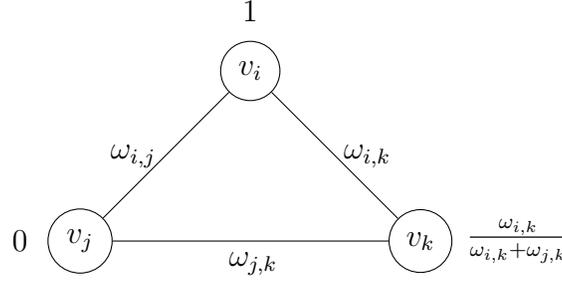


Figura 5. La extensión armónica para la resistencia efectiva entre dos vértices v_i y v_j en el ciclo C_3 .

Como consecuencia de esto, en C_3 la resistencia efectiva entre vértices arbitrarios v_i y v_j está dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r(v_i, v_j)} &= \omega_{i,j} + \omega_{i,k} \left(1 - \frac{\omega_{i,k}}{\omega_{i,k} + \omega_{j,k}} \right) \\
 &= \omega_{i,j} + \frac{\omega_{i,k} \omega_{j,k}}{\omega_{i,k} + \omega_{j,k}} \\
 &= \omega_{i,j} + \left(\frac{1}{\omega_{i,k}} + \frac{1}{\omega_{j,k}} \right) \\
 &= r_{i,j}^{-1} + (r_{i,k} + r_{j,k})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Lo que observamos es que en el caso del ciclo no se suman las resistencias; lo que se suma son sus recíprocos. El recíproco de la distancia es igual al recíproco de la distancia por el camino corto más el recíproco de la distancia por el camino largo. Consecuencia de esto es que las distancias entre vértices en C_3 son siempre menores que las distancias en P_3 . Al tener dos caminos por donde ir de un vértice a otro en vez de solo uno la distancia se reduce. Este es el caso más simple de una situación mucho más general que presentamos en el teorema 3.3, que hará evidente el hecho de que agregar caminos acorta la distancia.

Ahora procedemos a mostrar situaciones que generalizan los dos ejemplos anteriores, correspondientes a las conexiones en serie y en paralelo, términos que tienen también su origen en electricidad.

El siguiente resultado corresponde a un hecho bien conocido en teoría de circuitos eléctricos, que establece que al conectar nodos en serie las resistencias se suman.

Teorema 3.2. Sean u_1 , u_2 y v tres vértices en una gráfica con pesos (G, ω) tal que todos los caminos que van de u_1 a u_2 pasan por v . Entonces

$$r(u_1, u_2) = r(u_1, v) + r(u_2, v).$$

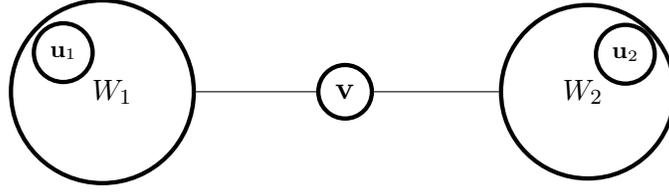


Figura 6. Conexión en serie.

Demostración. Podemos considerar que los tres vértices u_1 , u_2 y v son distintos, puesto que en caso de igualdad el resultado es trivial. Para cada u_i definimos el conjunto W_i dado por todos los vértices w para los cuales existe un camino que va de u_i a v que pasa por w sin pasar dos veces por v (véase la figura 6). Es evidente que $u_i \in W_j$ si y solo si $i = j$. Aún más, se tiene que $W_1 \cap W_2 = \{v\}$: si hubiera otro vértice en la intersección, entonces existiría un camino entre u_1 y u_2 que evita pasar por v lo que contradice la hipótesis.

Sea h_1 la extensión armónica correspondiente a la resistencia efectiva entre u_1 y v ; es decir, h_1 es la función dada por $h_1(u_1) = 1$, $h_1(v) = 0$ y $Lh_1 = 0$ fuera de $\{u_1, v\}$. Definimos h_2 de manera análoga sustituyendo u_1 por u_2 . Un hecho importante es que $h_1(u_2) = 0$ y $h_2(u_1) = 0$. Esta afirmación puede probarse como sigue.

Sea G_i la gráfica inducida por W_i . En G_i existe la extensión armónica \tilde{h}_i de la función que vale uno en u_i y cero en v . Si extendemos \tilde{h}_i poniendo $\tilde{h}_i(w) = 0$ para $w \notin W_i$ esta función es armónica en w . Necesariamente $h_i = \tilde{h}_i$, al ser la extensión armónica única.

Haciendo uso de estas funciones h_1 y h_2 queremos construir la extensión armónica que nos dé la resistencia efectiva $r(u_1, u_2)$, es decir la única función h que satisface

$$h(u_1) = 1 \quad \text{y} \quad h(u_2) = 0 \quad (3)$$

y que es armónica fuera de $\{u_1, u_2\}$. Con esa finalidad, notemos primero que toda combinación lineal de h_1 y h_2 es armónica fuera de los tres vértices $\{u_1, u_2, v\}$. Para que sea armónica también en el vértice v se elige la combinación lineal particular

$$\psi = (Lh_2)(v)h_1 - (Lh_1)(v)h_2.$$

Falta hacer cumplir las condiciones en (3). La condición en u_2 es muy sencillo obtenerla: basta restarle a ψ la constante $\psi(u_2)$. Para cumplir la condición en u_1 habría que poner

$$h = \frac{\psi - \psi(u_2)}{\psi(u_1) - \psi(u_2)} \quad (4)$$

ya que así definida la función satisface lo que se quiere: $h(u_1) = 1$, $h(u_2) = 0$ y $(Lh)(w) = 0$ para todo $w \neq u_1, u_2$, con la única salvedad de que hay que justificar que esta función esté bien definida: es decir, necesitamos mostrar que $\psi(u_1) \neq \psi(u_2)$. Pero, ¿qué pasaría si se tuviera la igualdad? La respuesta es que tendríamos que ψ es la extensión armónica de una función constante en $\{u_1, u_2\}$, de modo que ψ tendría que ser constante en toda la gráfica, y de hecho igual a cero porque $\psi(v) = 0$. Pero entonces h_1 y h_2 serían linealmente dependientes, lo que no es posible.

Tenemos entonces que h definida por (4) es la extensión armónica asociada a $r(u_1, u_2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(u_1, u_2)} &= (Lh)(u_1) \\ &= \frac{(L\psi)(u_1)}{\psi(u_1) - \psi(u_2)} \\ &= \frac{(Lh_2)(v) (Lh_1)(u_1)}{(Lh_2)(v) + (Lh_1)(v)} \\ &= \frac{\frac{1}{r(u_2, v)} \cdot \frac{1}{r(u_1, v)}}{\frac{1}{r(u_1, v)} + \frac{1}{r(u_2, v)}} \\ &= \frac{1}{r(u_1, v) + r(u_2, v)}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. \square

El resultado anterior determina por completo el comportamiento de la resistencia efectiva en árboles (gráficas sin ciclos): la distancia entre dos vértices de un árbol es igual a la suma de las resistencias locales de las aristas del único camino que los une. En el caso particular de los árboles sin peso se tiene que la resistencia efectiva coincide con la métrica geodésica. Ese es el único caso en que ambas cantidades coinciden.

La existencia de ciclos implica que hay más de una posibilidad para ir de un vértice a otro. El siguiente teorema muestra que la resistencia efectiva se reduce al agregar opciones de caminos. Esta situación se ilustra en la figura 7, donde para ir del vértice u al vértice v podemos

irnos por G_W o de manera alternativa por G_Z . En teoría de circuitos eléctricos se dice que los nodos están conectados en paralelo.

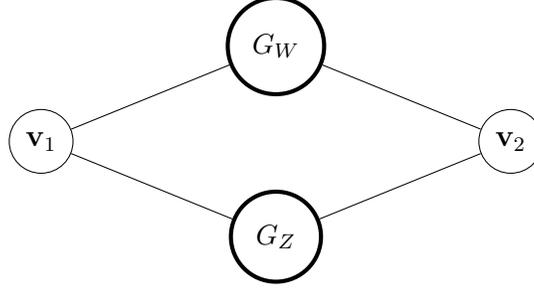


Figura 7. Conexión en paralelo.

Teorema 3.3. *Sea V el conjunto de vértices de una gráfica conexa con pesos (G, ω) , y sean W y Z dos subconjuntos de V tales que $W \cup Z = V$ y $W \cap Z = \{v_1, v_2\}$. Denotamos por (G_W, ω_W) y (G_Z, ω_Z) a las gráficas inducidas por W y Z . Si ambas gráficas inducidas son conexas y no existe ninguna arista en (G, ω) entre vértices de W y vértices de Z , entonces*

$$\frac{1}{r_\omega(v_1, v_2)} = \frac{1}{r_{\omega_W}(v_1, v_2)} + \frac{1}{r_{\omega_Z}(v_1, v_2)}.$$

Demostración. Sea h_W la extensión armónica en G_W de la función en $\{v_1, v_2\}$ dada por $h_W(v_1) = 1$ y $h_W(v_2) = 0$. Sea h_Z la función definida de forma análoga en G_Z . Si $h \in \ell(V)$ está dada por

$$h(v) = \begin{cases} h_W(v) & \text{si } v \in G_W \\ h_Z(v) & \text{si } v \in G_Z. \end{cases}$$

se tiene que h sigue siendo armónica fuera de $\{v_1, v_2\}$, puesto que la hipótesis de que no haya aristas entre W y Z implica que no se agrega ninguna arista al pasar de las gráficas inducidas a toda (G, ω) . Se sigue de ello que

$$\begin{aligned} (Lh)(v_1) &= \sum_{V \ni v_k \sim v_1} \omega_{1,k}(h(v_1) - h(v_k)) \\ &= \sum_{W \ni v_k \sim v_1} \omega_{1,k}(h(v_1) - h(v_k)) + \sum_{Z \ni v_k \sim v_1} \omega_{1,k}(h(v_1) - h(v_k)) \\ &= (Lh_W)(v_1) + (Lh_Z)(v_1), \end{aligned}$$

que es equivalente a la igualdad que queremos probar. \square

Cuando la gráfica es un ciclo, el resultado anterior nos permite encontrar de forma directa y sencilla la resistencia efectiva: dados dos vértices en el ciclo C_n hay dos rutas para ir de uno a otro que son

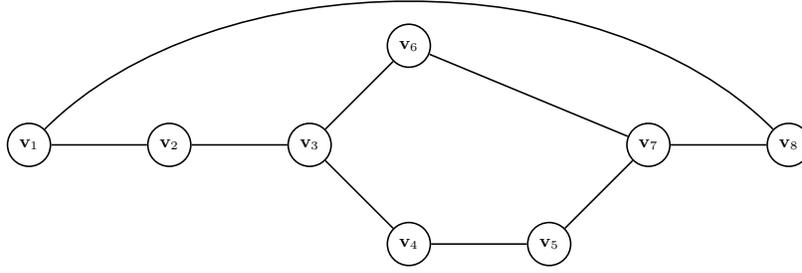


Figura 8. Una gráfica sin pesos.

caminos P_m y P_{n-m} para algún $m < n$. Como ya sabemos calcular la resistencia efectiva en caminos, podemos obtenerla en el ciclo sumando los recíprocos.

Los teoremas presentados en esta sección ilustran que es posible calcular de forma relativamente simple la resistencia efectiva en muchos casos, sin necesidad de resolver de forma explícita el problema de Dirichlet, cosa esta última que en muchos casos puede resultar muy complicada. Para dar un ejemplo consideramos la gráfica G (elegida sin pesos por simplicidad) que se muestra en la figura 8 y calculemos la resistencia efectiva $r_G(v_1, v_8)$.

Denotamos por H a la gráfica que resulta de quitar de G la arista que conecta a v_1 con v_8 . El teorema 3.3 nos dice que

$$\frac{1}{r_G(v_1, v_8)} = 1 + \frac{1}{r_H(v_1, v_8)}.$$

El teorema 3.2 nos dice que

$$\begin{aligned} r_H(v_1, v_8) &= r_H(v_1, v_3) + r_H(v_3, v_7) + r_H(v_7, v_8) \\ &= r_H(v_3, v_7) + 3. \end{aligned}$$

Por otra parte, la distancia $r_H(v_3, v_7)$ es igual a la distancia entre esos mismos vértices dentro del ciclo $\{v_3, v_4, v_5, v_7, v_6\}$; esto es porque si tenemos la extensión armónica h para la distancia en el ciclo y la extendemos a toda H poniendo $h(v_1) = h(v_2) = h(v_3) = 1$ y $h(v_8) = h(v_7) = 0$ tenemos la extensión armónica en todo H , de modo que no se modifica el valor de $(Lh)(v_3)$. Entonces, aplicando de nueva cuenta el teorema 3.3 tenemos que

$$\frac{1}{r_H(v_3, v_7)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Ya solo es cosa de sustituir y hacer las cuentas para obtener

$$r_G(v_1, v_8) = 21/26.$$

4. Es una métrica

Para demostrar que la resistencia efectiva es una métrica, usaremos un resultado fundamental: dada una gráfica con pesos siempre podemos considerar una gráfica más pequeña, con otros pesos, que tiene la misma resistencia efectiva. De forma precisa:

Teorema 4.1. *Para todo subconjunto de vértices $\tilde{V} \subset V$ de una gráfica con pesos (G, ω) existe una gráfica con vértices \tilde{V} y pesos $\tilde{\omega}$ en ella, tal que para toda función $f \in \ell(\tilde{V})$ se cumple*

$$\langle L_{\tilde{\omega}} f, f \rangle = \langle L_{\omega} h_f, h_f \rangle$$

donde h_f es la extensión armónica de f . Más aún, para toda pareja de vértices u y v en \tilde{V} se tiene que

$$r_{\tilde{\omega}}(u, v) = r_{\omega}(u, v).$$

Demostración. Con la notación que usamos en la demostración del teorema 2.3 se tiene para toda $f \in \ell(\tilde{V})$ que

$$\langle L h_f, h_f \rangle = \langle Hf + J\hat{f}, f \rangle.$$

Usando $\hat{f} = -X^{-1}J^T f$ esto lo podemos escribir como

$$\langle L h_f, h_f \rangle = \langle (H - JX^{-1}J^T)f, f \rangle. \quad (5)$$

Es claro que $H - JX^{-1}J^T$ es un operador actuando en $\ell(\tilde{V})$, y la igualdad de arriba implica que es no-negativo definido. De hecho es un laplaciano. Para mostrarlo solo falta verificar que se anula en las funciones constantes, pero eso también se sigue de (5) ya que la extensión armónica de una constante sigue siendo constante. Entonces, podemos definir $\tilde{\omega}$ como los pesos correspondientes al laplaciano $\tilde{L} = H - JX^{-1}J^T$ que actúa en una gráfica con vértices \tilde{V} , cuyas aristas quedan determinadas por los pesos $\tilde{\omega}$. Esto concluye la primera parte del enunciado.

Para probar el resto del teorema, conviene usar la siguiente expresión para la resistencia efectiva

$$r(u, v) = \frac{1}{\min \left\{ \langle Lf, f \rangle \mid f \in \ell(V), f(u) = 1, f(v) = 0 \right\}}, \quad (6)$$

que es cierta en virtud del teorema 2.4. Sean v_1 y v_2 vértices en \tilde{V} , y sean g y \tilde{g} funciones que toman el valor 1 en v_1 , el valor 0 en v_2 y son armónicas en $V \setminus \{v_1, v_2\}$ y $\tilde{V} \setminus \{v_1, v_2\}$, respectivamente; esto es

$$\frac{1}{r_{\omega}(v_1, v_2)} = \langle L_{\omega} g, g \rangle, \quad \frac{1}{r_{\tilde{\omega}}(v_1, v_2)} = \langle L_{\tilde{\omega}} \tilde{g}, \tilde{g} \rangle. \quad (7)$$

Por un lado, si $h_{\tilde{g}}$ es la extensión armónica de \tilde{g} a todo V entonces

$$\langle L_{\tilde{\omega}}\tilde{g}, \tilde{g} \rangle = \langle L_{\omega}h_{\tilde{g}}, h_{\tilde{g}} \rangle$$

por el resultado de la primera parte de este teorema. Y por otra parte se tiene la desigualdad

$$\langle L_{\omega}h_{\tilde{g}}, h_{\tilde{g}} \rangle \geq \langle L_{\omega}g, g \rangle,$$

que se sigue del hecho de que $h_{\tilde{g}}(v_1) = 1$ y $h_{\tilde{g}}(v_2) = 0$, mientras que g es la extensión armónica para esos valores.

Por lo tanto

$$\langle L_{\tilde{\omega}}\tilde{g}, \tilde{g} \rangle \geq \langle L_{\omega}g, g \rangle.$$

De manera similar podemos proceder con $g|_{\tilde{V}}$, la restricción de g al conjunto \tilde{V} . Al ser g su extensión armónica a V se sigue de la primera parte de este teorema que

$$\langle L_{\omega}g, g \rangle = \langle L_{\tilde{\omega}}g|_{\tilde{V}}, g|_{\tilde{V}} \rangle.$$

Al ser $g|_{\tilde{V}}$ una extensión a \tilde{V} de la función que vale 1 en v_1 y 0 en v_2 tenemos la desigualdad

$$\langle L_{\tilde{\omega}}g|_{\tilde{V}}, g|_{\tilde{V}} \rangle \geq \langle L_{\tilde{\omega}}\tilde{g}, \tilde{g} \rangle.$$

por ser \tilde{g} la extensión armónica correspondiente.

Concluimos que

$$\langle L_{\omega}g, g \rangle \geq \langle L_{\tilde{\omega}}\tilde{g}, \tilde{g} \rangle$$

y por lo tanto $\langle L_{\omega}g, g \rangle = \langle L_{\tilde{\omega}}\tilde{g}, \tilde{g} \rangle$, de donde es inmediata la igualdad $r_{\omega}(u, v) = r_{\tilde{\omega}}(u, v)$ que se quería demostrar. \square

Probemos ahora sí que la resistencia efectiva es en efecto una métrica.

Teorema 4.2. *La resistencia efectiva $r(\cdot, \cdot)$ es una métrica en el conjunto de vértices V , esto es:*

- (a) $r(u, v) \geq 0$, con igualdad si y solo si $u = v$.
- (b) $r(u, v) = r(v, u)$.
- (c) $r(u, v) \leq r(u, w) + r(w, v)$.

Demostración. La primera condición es inmediata de la definición, por ser el laplaciano semi-positivo definido y no anularse para la extensión armónica h que por definición no puede ser constante.

Para verificar la simetría, tomemos h la extensión armónica de la función que vale 1 en el vértice u y 0 en el vértice v . Observemos que $1 - h$ es la extensión armónica de la función que vale 0 en u y 1 en v . De esto se tiene que

$$r(v, u) = \langle L(1 - h), (1 - h) \rangle = \langle Lh, h \rangle = r(u, v),$$

donde la segunda igualdad se sigue del hecho de que la constante 1 y Lh son ortogonales entre sí, puesto que el primero está en el núcleo de L y el segundo está en su imagen.

Mostremos ahora que se cumple la desigualdad del triángulo. Del teorema 4.1 sabemos que dados tres vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ siempre es posible elegir pesos entre esos tres vértices que preservan la resistencia efectiva que había entre ellos dentro de la gráfica G . Esto nos dice que es suficiente verificar la desigualdad del triángulo en gráficas de tres vértices, que son P_3 y C_3 : las dos gráficas de las que ya calculamos la resistencia efectiva en la sección 3.

En el caso de P_3 las tres distancias son $r_{1,2}$, $r_{2,3}$ y $r_{1,2} + r_{2,3}$. Es claro que ninguna de ellas puede ser mayor que la suma de cualesquiera dos, por lo que la desigualdad del triángulo se garantiza.

Para el ciclo C_3 , en (2) se calculó la resistencia efectiva entre los vértices $v_{i,j}$ como

$$r(v_i, v_j) = \left(\frac{1}{r_{i,k} + r_{j,k}} + \frac{1}{r_{i,j}} \right)^{-1},$$

de modo que lo que queremos mostrar es que se cumple la desigualdad

$$\left(\frac{1}{r_{i,k} + r_{j,k}} + \frac{1}{r_{i,j}} \right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{r_{i,j} + r_{j,k}} + \frac{1}{r_{i,k}} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{r_{i,j} + r_{i,k}} + \frac{1}{r_{j,k}} \right)^{-1}.$$

Esto se transforma tras cálculos elementales en

$$\frac{r_{i,j}(r_{i,k} + r_{j,k})}{r_{i,j} + r_{i,k} + r_{j,k}} \leq \frac{r_{i,k}(r_{i,j} + r_{j,k}) + r_{j,k}(r_{i,j} + r_{i,k})}{r_{i,j} + r_{i,k} + r_{j,k}},$$

desigualdad que es evidentemente cierta. \square

La formulación (6) que fue importante en la demostración anterior también resulta útil para ver de forma rápida que la métrica de resistencia efectiva tiene propiedades que mencionamos desde la introducción: si se aumenta el peso de una arista entonces las distancias se reducen o al menos podemos estar seguros de que no aumentan (ya que es claro que el mínimo involucrado no decrece); esto incluye el caso en que se agrega una arista nueva, que es lo mismo que aumentar el peso entre dos vértices de cero a algo positivo.

5. El índice de Kirchhoff

Dada una gráfica con pesos (G, ω) , la suma de las resistencias entre todas sus parejas de vértices se conoce como su *índice de Kirchhoff*:

$$\text{K.I.}(G, \omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j r_{G, \omega}(v_i, v_j).$$

Remarcamos que la suma se hace sobre todas las parejas de vértices, sean o no vecinos entre sí. Algunos autores se refieren al índice de Kirchhoff como *la resistencia efectiva total* (e.g. [7]). Mientras más conectada esté la gráfica, las resistencias efectivas entre sus vértices son menores, por lo que su índice de Kirchhoff también será menor en ese caso. Por ello este es un índice del que se puede decir que mide qué tanto están conectados entre sí los vértices de una gráfica.

El propósito de esta sección es presentar una demostración de la identidad

$$\text{K.I.}(G, \omega) = n \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_n}, \quad (8)$$

que relaciona a la resistencia total con los eigenvalores del laplaciano y que fue probada originalmente en [10].

Al ser singular, el operador laplaciano L no tiene inversa. Sin embargo, existe un operador L^+ tal que $LL^+ = L^+L$ es «casi la identidad»; en concreto, es igual a $P_{\text{Ran}(L)}$, la proyección ortogonal sobre el rango de L . Como estamos considerando gráficas conexas, el rango de L tiene codimensión 1, por lo que $P_{\text{Ran}(L)}$ es igual a la identidad en un subespacio de dimensión $n - 1$. El operador L^+ es la *pseudo-inversa de Moore–Penrose* de L . Esta idea de pseudo-inversa es una generalización — definida para todo operador en espacios vectoriales de dimensión finita — del concepto de operador inverso. En el caso que nos ocupa, L^+ puede expresarse de forma simple, gracias al hecho de que L es un operador auto-adjunto: si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de eigenvectores de L tales que $Lu_k = \lambda_k u_k$, entonces

$$L^+u_1 = 0, \quad L^+u_k = \frac{1}{\lambda_k}u_k, \quad k = 2, \dots, n.$$

Se observa que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es también base ortonormal de eigenvectores para la pseudo-inversa, por lo que es un operador semi-definido positivo, y su traza es igual a la suma en el lado derecho de (8). También se puede ver que $LL^+L = L$, aplicando ambos lados de la igualdad a los elementos de la base.

La resistencia efectiva tiene una expresión simple en términos de la pseudo-inversa L^+ , lo que resultará muy útil para demostrar (8).

Teorema 5.1. *En toda gráfica con pesos y para toda pareja de vértices se cumple la igualdad*

$$r(v_i, v_j) = \left\langle L^+(\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}), (\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}) \right\rangle.$$

Demostración. Comenzamos notando que si h es la extensión armónica de $h(v_i) = 1$ y $h(v_j) = 0$ entonces

$$(Lh)(v) = \begin{cases} 1/r(v_i, v_j) & v = v_i. \\ -1/r(v_i, v_j) & v = v_j, \\ 0 & v \notin \{v_i, v_j\}. \end{cases}$$

Es decir que $(\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}) = r(v_i, v_j)Lh$ de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \langle L^+(\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}), (\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}) \rangle &= r^2(v_i, v_j) \langle L^+Lh, Lh \rangle \\ &= r^2(v_i, v_j) \langle LL^+Lh, h \rangle \\ &= r^2(v_i, v_j) \langle Lh, h \rangle \\ &= r(v_i, v_j) \end{aligned}$$

como se quería demostrar. \square

Ahora sí, como se anunció al principio de esta sección:

Teorema 5.2. *La igualdad (8) es cierta para toda (G, ω) .*

Demostración. La afirmación a demostrar es equivalente a que el índice de Kirchhoff sea igual al producto del número de vértices por la traza de la pseudo-inversa.

De la fórmula para la resistencia efectiva dada por el teorema 5.1, tenemos que la resistencia efectiva total es la suma

$$\text{K.I.} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \langle L^+(\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}), (\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}) \rangle. \quad (9)$$

Denotando por $b_{i,j}$ a las entradas de la representación matricial de L^+ respecto a la base natural, es fácil ver que

$$\langle L^+(\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}), (\mathbf{1}_{v_i} - \mathbf{1}_{v_j}) \rangle = b_{i,i} - 2b_{i,j} + b_{j,j}.$$

Cada vértice ocurre $n-1$ veces en la suma (9) y cada pareja de vértices aparece solo una vez. Podemos reescribir la suma como

$$\text{K.I.} = (n-1) \sum_{i=1}^n b_{i,i} - 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j b_{i,j}. \quad (10)$$

Por otra parte, el núcleo de L^+ coincide con el de L , por lo que L^+ se anula en vectores constantes. Esto implica que la suma de las entradas de la matriz $(b_{i,j})$ es igual a cero. Tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^n b_{i,i} + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j b_{i,j} = 0.$$

Sustituyendo en (10) concluimos que

$$\text{K.I.} = n \sum_{i=1}^n b_{i,i}$$

que es el producto de n por la traza de L^+ , como se quería. \square

AGRADECIMIENTOS. Agradezco a ambos árbitros por las observaciones que sin duda contribuyeron a la mejora de esta exposición.

Bibliografía

- [1] V. L. Alev, N. Anari, L. C. Lau y S. O. Gharan, «Graph Clustering using Effective Resistance», en *9th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2018)*, ed. Anna R. Karlin, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), vol. 94, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018, 41:1–41:16.
- [2] D. Babić, D. Klein, I. Lukovits, S. Nikolić y N. Trinajstić, «Resistance-distance matrix: A computational algorithm and its application», *Int. J. Quantum Chem.*, vol. 90, 2002, 166–176.
- [3] G. Clemente y A. Cornaro, «Bounding robustness in complex networks under topological changes through majorization techniques», *Eur. Phys. J. B*, vol. 93, núm. 114, 2020, .
- [4] D. Cvetkovic, P. Rowlinson y S. Simić, *Introduction to the theory of graph spectra*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 75, Cambridge University Press, 2009.
- [5] K. Devriendt y R. Lambiotte, «Discrete curvature on graphs from the effective resistance», *J. Phys. Complex.*, vol. 3, 2022, .
- [6] P. G. Doyle y D. J. Snell, *Random walks and electrical networks*, Carus Mathematical Monographs, MAA, 1984.
- [7] A. Ghosh, S. Boyd y A. Saberi, «Minimizing effective resistance of a graph», *SIAM Review*, vol. 50, núm. 1, 2008, 37–66.
- [8] P. Jorgensen y E. Pearse, «A Hilbert space approach to effective resistance metric», *Complex Anal. Oper. Theory*, vol. 4, 2010, 975–1013.
- [9] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2001.
- [10] D. Klein y M. Randić, «Resistance distance», *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 12, núm. 1, 1993, 81–95.
- [11] J.-B. Liu, X.-F. Pan y F.-T. Hu, «The 1-inverse of the Laplacian of subdivision-vertex and subdivision-edge coronae with applications», *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 65, núm. 1, 2017, 178–191.
- [12] Q. Liu, J.-B. Liu y J. Cao, «The Laplacian polynomial and Kirchhoff index of graphs based on R-graphs», *Neurocomputing*, vol. 177, núm. C, 2016, 441–446.
- [13] Y. Peng, J. Li y W. He, «Estimating robustness through Kirchhoff index in mesh graphs», *IEEE Access*, vol. 8, 2020, 111822–111828.
- [14] R. S. Strichartz, *Differential equations on fractals: A tutorial*, Princeton University Press, 2006.
- [15] J. Sylvester, «Random walk hitting times and effective resistance in sparsely connected Erdős-Rényi random graphs», *Journal of Graph Theory*, vol. 96, núm. 1 44–84.
- [16] P. Tetali, «Random walks and the effective resistance of networks», *Journal of Theoretical Probability*, vol. 4, 1991, 101–109.

- [17] C. Yang, J. Mao, X. Qian y P. Wei, «Designing robust air transportation networks via minimizing total effective resistance», *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 20, núm. 6, 2019, 2353–2366.