

Sobre la conjetura de Poincaré

Mario Eudave-Muñoz
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria 04510
México DF, MEXICO
CIMAT, Callejón Jalisco s/n,
Col. Valenciana 36240,
Guanajuato, Gto. MEXICO
mario@matem.unam.mx

Resumen

La conjetura de Poincaré afirma que cualquier 3-variedad cerrada cuyo grupo fundamental es trivial es homeomorfa a la 3-esfera. En este artículo veremos como la conjetura ha impulsado el desarrollo de la topología tridimensional.

1. Introducción

El artículo de Poincaré *Analysis Situs* y sus cinco suplementos marcan el inicio de la topología algebraica y de la topología de variedades. En este artículo se define el grupo fundamental de un espacio así como los números de Betti y los coeficientes de torsión, que a la postre pasaron a ser parte de los grupos de homología de un espacio. Al final del segundo suplemento Poincaré enuncia un teorema del que no da la demostración y que en términos modernos dice:

Si una 3-variedad M tiene todos sus grupos de homología isomorfos a los grupos de una 3-esfera, entonces M es homeomorfa a la 3-esfera.

Sin embargo, en el quinto suplemento se da cuenta de su error y da un ejemplo de una 3-variedad cerrada cuyo primer grupo de homología es trivial, pero cuyo grupo fundamental no es trivial. A dicha variedad

se le conoce ahora como la variedad de Poincaré. Al final de dicho artículo hace una pregunta, que ahora se conoce como la conjetura de Poincaré y que en términos modernos dice lo siguiente:

Conjetura 1 (Conjetura de Poincaré). *Si M es una 3-variedad cerrada cuyo grupo fundamental es trivial, entonces M es homeomorfa a la 3-esfera.*

Esta conjetura tiene generalizaciones a dimensiones superiores, aunque notamos que no basta con pedir grupo fundamental trivial. En el caso general, la conjetura dice que si una n -variedad tiene todos sus grupos de homotopía isomorfos a los de una n -esfera entonces es homeomorfa a la n -esfera. La conjetura fue probada en dimensiones mayores o iguales a 5 por Smale [39] en 1961 y en dimensión 4 por Freedman [11] en 1982; quedando abierto, entonces, el caso de dimensión 3.

Una respuesta afirmativa a la conjetura fue anunciada, finalmente, por Perelman en 2003, en una serie de artículos en el arXiv [5], [32], [33], [31], un siglo después de que fuera formulada por Poincaré. La demostración usa técnicas de geometría riemanniana y según expertos en el área es correcta. En este artículo no hablaremos de la prueba de la conjetura, referimos al lector al artículo de Bessières, Besson y Boileau [6], donde se da una exposición de las ideas principales de la demostración, o al artículo panorámico de Morgan [25]. El lector interesado en una prueba completa de la conjetura puede consultar el libro de Morgan y Tian [26].

La conjetura de Poincaré ha impulsado el desarrollo de la topología tridimensional y está ligada a muchos avances de esta teoría. De esto hablaremos en este artículo. En la sección 2 recordamos la definición del grupo fundamental y damos varias maneras de construir 3-variedades; esto con el propósito de entender qué es lo que dice la conjetura. En la sección 3 mostramos algunos de los intentos que se han hechos para resolver la conjetura usando métodos topológicos o algebraicos y mencionamos resultados importantes en la teoría de 3-variedades que han sido inspirados por la conjetura. Cerramos nuestra exposición en la sección 4 con unos comentarios finales.

El lector interesado puede consultar los artículos originales de Poincaré, escritos en francés, los cuales se encuentran publicados en sus obras completas [34]. Recientemente se ha publicado una traducción de estas obras al inglés, en el libro *Papers on Topology. Analysis situs and its five supplements* [35].

2. Construcciones de 3-variedades

2.1. El grupo fundamental

Sea X un espacio topológico arcoconexo, o sea dados dos puntos en el espacio hay un arco que los conecta, y sea x un punto de X , llamado el punto base. Consideremos ahora la colección de todos los lazos en X cuyo punto inicial y final es x (o sea todas las funciones continuas $f : [0, 1] \rightarrow X$, tal que $f(0) = f(1) = x$). Decimos que dos lazos son homotópicos si se puede deformar uno en el otro continuamente, sin mover los extremos de los lazos, o sea el punto x . Pero nótese que en esta deformación el lazo puede apachurrarse o cruzarse sobre sí mismo. Podemos definir un producto de lazos, que es simplemente recorrer primero un lazo y luego el segundo. Las clases de homotopía de lazos forman un grupo, el llamado *grupo fundamental* de X , y que se denota por $\pi_1(X, x)$. Si se cambia el punto base, se encuentra un grupo que es isomorfo al antes definido, por lo que denotaremos al grupo fundamental simplemente por $\pi_1(X)$. Si $\pi_1(X)$ es trivial, es decir es el grupo que tiene un solo elemento, entonces cualquier lazo puede ser contraído al punto base. Que $\pi_1(X)$ no sea trivial quiere decir, entonces, que hay algún lazo que no puede contraerse a un punto, es decir, que al momento de tratar de contraerlo se atora en algún lado del espacio. Decimos que un espacio es simplemente conexo si su grupo fundamental es trivial. Para una definición formal del grupo fundamental, véase cualquier texto de topología algebraica.

Muchos de los grupos que aparecen al estudiar espacios topológicos se expresan por medio de generadores y relaciones. Sea $F(x_1, \dots, x_n)$ el grupo libre con n generadores, o sea, el grupo de palabras formadas con los símbolos x_1, \dots, x_n , y sean r_1, \dots, r_s palabras en estos símbolos. Denotamos por $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle$ al grupo cociente $F(x_1, \dots, x_n)/N(r_1, \dots, r_s)$, donde $N(r_1, \dots, r_s)$ denota al subgrupo normal de $F(x_1, \dots, x_n)$ más pequeño que contiene a r_1, \dots, r_s . Decimos que G es el grupo dado por generadores x_1, \dots, x_n y relaciones r_1, \dots, r_s . En otras palabras, G es el grupo que se obtiene de $F(x_1, \dots, x_n)$ al hacer cada palabra r_i igual a 1. Para estudiar grupos desde este punto de vista, véase por ejemplo el libro [22].

Una manera de calcular grupos fundamentales es a través del teorema de Seifert-Van Kampen, que nos dice como calcular el grupo de un espacio si se conocen los grupos de algunos subespacios. Más precisamente, sea X un espacio topológico arcoconexo, tal que $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1, X_2 son abiertos arcoconexos y $X_0 = X_1 \cap X_2$ es también arcoconexo. Tomando un punto base que se encuentre en X_0 , supóngase que

$\pi_1(X_1) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_s \rangle$, $\pi_1(X_2) = \langle y_1, \dots, y_m | t_1, \dots, t_k \rangle$, y $\pi_1(X_0) = \langle z_1, \dots, z_p | u_1, \dots, u_q \rangle$. Sea $\varphi_i : \pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X_i)$ ($i = 1, 2$), el mapeo inducido por la inclusión de X_0 en X_i ($i = 1, 2$). Sean $a_i = \varphi_1(z_i)\varphi_2(z_i)^{-1}$ ($i = 1, \dots, p$), entonces cada a_i es una palabra en los símbolos $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Entonces el teorema de Seifert-Van Kampen nos dice que

$$\pi_1(X) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m | r_1, \dots, r_s, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_p \rangle,$$

o sea, una presentación para $\pi_1(X)$ está dada por los generadores de X_1 , los generadores de X_2 , las relaciones de X_1 , las relaciones de X_2 , más una relación por cada generador de $\pi_1(X_0)$, donde se igualan la imagen de cada generador z_i en $\pi_1(X_1)$ con su imagen en $\pi_1(X_2)$.

Los *grupos de homología* de un espacio X , $H_i(X)$, $i \geq 0$, son una colección de grupos abelianos asociados a un espacio X suficientemente bonito, digamos una variedad o un complejo celular. No hablaremos aquí de estos grupos; para su definición véase cualquier texto de topología algebraica. Solo mencionamos que si X es un espacio arcoconexo, entonces el grupo $H_1(X)$ es la abelianización del grupo $\pi_1(X)$, es decir, $H_1(X)$ es el grupo abeliano más grande al que $\pi_1(X)$ se proyecta, o sea, $H_1(X)$ es isomorfo al cociente $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, donde $[G, G]$ denota al subgrupo conmutador de un grupo G .

2.2. 3-variedades

Una *3-variedad* M es un espacio topológico que localmente se ve como el espacio tridimensional. Formalmente, una 3-variedad M es un espacio métrico separable tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad abierta homeomorfa a \mathbb{R}^3 o a $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$. De manera similar se puede definir una n -variedad. La *frontera* de M , denotada por ∂M , consiste de los puntos de M que tienen una vecindad abierta homeomorfa a \mathbb{R}_+^3 . Para una 3-variedad M , ∂M es vacía o es una 2-variedad sin frontera, es decir una superficie. Decimos que una 3-variedad es *cerrada* si es compacta y no tiene frontera. Una superficie es *no-orientable* si contiene una banda de Möbius. Esto se puede generalizar a dimensión tres y decimos que una 3-variedad es *no-orientable* si contiene una copia de $F \times I$, donde F es una banda de Möbius; entonces una 3-variedad es *orientable* si no contiene una copia de $F \times I$. En este artículo todas nuestras superficies y 3-variedades serán orientables. Para nociones generales de 3-variedades nos referimos al libro de Hempel [18] o al libro de Rolfsen [36].

Las 3-variedades más sencillas son el mismo \mathbb{R}^3 y una 3-bola $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$. La 3-esfera, S^3 , se define como la esfera

unitaria en \mathbb{R}^4 , o sea $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$. Usando una proyección estereográfica de S^3 en \mathbb{R}^3 , no es difícil ver que S^3 se puede expresar como la unión de dos 3-bolas pegadas a lo largo de sus fronteras, o sea, $S^3 = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son 3-bolas, y $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = S^2$. Esto es análogo al hecho que a una 2-esfera la podemos ver como la unión de dos discos pegados por su frontera (véase la figura 1). Una *esfera homotópica* es una 3-variedad cerrada M tal que $\pi_1(M)$ es trivial. Entonces la conjetura de Poincaré dice que cualquier esfera homotópica es homeomorfa a S^3 . Si M es una 3-variedad cerrada (y además conexa y orientable), entonces $H_0(X) \cong H_3(X) \cong \mathbb{Z}$, y $H_n(X) \cong 0$ si $n \geq 3$. Para S^3 tenemos, además, que $H_1(M) \cong H_2(X) \cong 0$. Una 3-variedad es una *esfera homológica* si tiene los mismos grupos de homología que la 3-esfera.

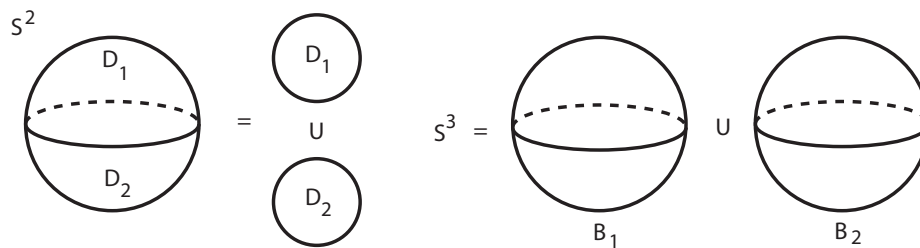


Figura 1.

Dadas dos 3-variedades M_1 y M_2 , podemos construir una nueva variedad, que es la *suma conexa* $M = M_1 \# M_2$. Para construirla, removemos el interior de una 3-bola en cada M_i ($i = 1, 2$); nos quedan dos 3-variedades cuya frontera es una esfera, y ahora pegamos dichas 3-variedades por estas esferas. Decimos que M es prima si siempre que tengamos una descomposición $M = M_1 \# M_2$, M_1 o M_2 es la 3-esfera. Una variedad M es *irreducible* si cualquier esfera encajada en M es frontera de una 3-bola. Las variedades irreducibles son entonces primas; $S^1 \times S^2$ es la única 3-variedad prima que no es irreducible.

2.3. Triangulaciones

Consideremos un tetraedro, o sea la cerradura convexa de 4 puntos en \mathbb{R}^3 no contenidos en un plano. A los cuatro puntos que lo definen los llamamos vértices. A un subespacio de dimensión uno generado por dos de los vértices lo llamamos arista, y a un subespacio de dimensión dos generado por 3 de los vértices lo llamamos triángulo. Un tetraedro consta de 4 vértices, 6 aristas y 4 triángulos, como se ve en la figura 2. Un tetraedro es una 3-variedad que es homeomorfa a una 3-bola,

su frontera es homeomorfa a una 2-esfera. Una 3-variedad compacta la podemos obtener a partir de una colección finita de tetraedros, los cuales identificamos con ciertas reglas para garantizar que el resultado sea una 3-variedad y decimos, entonces, que la variedad es *triangulable*. Sea $\{T_i\}$ una colección finita de tetraedros. Identificamos los tetraedros a lo largo de sus vértices, aristas y triángulos de manera que se satisface lo siguiente: a) para todo i, j , la intersección de T_i con T_j es vacía o consiste de un vértice, una arista o un triángulo; b) la colección de tetraedros adyacentes a cada arista están colocados ciclicamente alrededor de la arista, y forman una 3-bola; c) la colección de tetraedros adyacentes a cada vértice forman una 3-bola, que se ve como el cono sobre una esfera o una media esfera. Estas condiciones garantizan que el espacio que se obtiene es una 3-variedad. De hecho, todas las 3-variedades compactas se obtienen de esta manera pues es un teorema que cualquier 3-variedad es triangulable [24]; esto no es cierto en dimensiones superiores. Nótese, sin embargo, que se necesitan muchos tetraedros para definir una 3-variedad, y que una misma 3-variedad tiene muchas triangulaciones. En la figura 2 mostramos una triangulación de S^3 , que de hecho corresponde a la frontera de un 4-simplejo (la cerradura convexa de 5 puntos en \mathbb{R}^4).

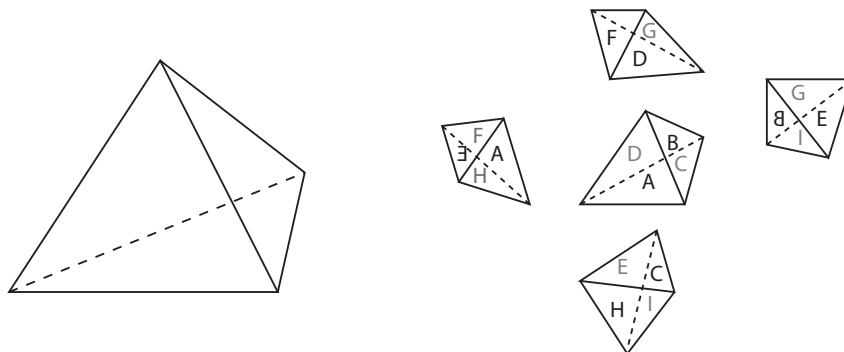


Figura 2.

2.4. Descomposiciones de Heegaard

Sea S un disco con n agujeros, $n \geq 0$, o sea, la 2-variedad obtenida a partir de un disco D contenido en \mathbb{R}^2 , al quitarle el interior de n discos ajenos contenidos en su interior. Consideremos ahora al espacio $S \times I = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in S, 0 \leq x_3 \leq 1\}$, este es una 3-variedad cuya frontera es una superficie conexa de género n (véase la figura 3). Un *cubo con asas* H es una 3-variedad homeomorfa a $S \times I$, para algún disco con agujeros S . El *género* de un cubo con asas H lo

definimos como el género de la superficie ∂H . Puede probarse que dos cubos con asas son homeomorfos si y solo si tienen el mismo género.

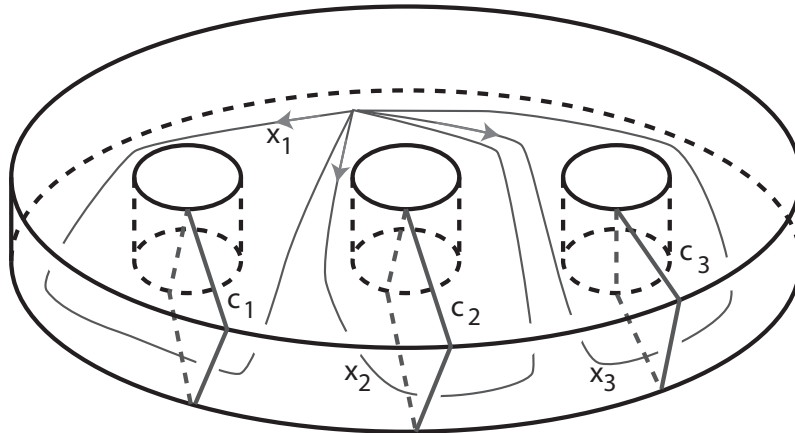


Figura 3.

Sean H_1 y H_2 dos cubos con asas, y $\phi : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ un homeomorfismo. Con esta información podemos construir una 3-variedad cerrada, que se obtiene al pegar los cubos con asas según la instrucción dada por ϕ , o sea, a cada punto $x \in \partial H_1$ lo identificamos con su punto imagen en ∂H_2 . Obtenemos así una 3-variedad $M = H_1 \cup_{\phi} H_2$. A esta descomposición de M la llamamos una *descomposición de Heegaard* y a $\partial H_1 = \partial H_2$ una *superficie de Heegaard*. No es difícil probar que toda 3-variedad cerrada tiene una descomposición de Heegaard; se sigue del hecho que toda 3-variedad admite una triangulación. El género de una descomposición es el género de la superficie de Heegaard y el género de una 3-variedad se define como el mínimo género de todas sus descomposiciones de Heegaard. Cabe decir que una misma 3-variedad tiene muchas descomposiciones de Heegaard diferentes.

Sea H_1 un cubo con asas de género n . Nótese, como se muestra en la figura 3, que existen n curvas c_1, c_2, \dots, c_n en ∂H_1 , tales que cada c_i es frontera de un disco D_i contenido en H_1 , y tal que $\partial H_1 - \cup c_i$ es homeomorfo a una esfera con $2n$ agujeros. Sea H_2 otro cubo con asas del mismo género y $\phi : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ un homeomorfismo; sean d_1, d_2, \dots, d_n , las imágenes de las curvas c_1, c_2, \dots, c_n . Sea $M = H_1 \cup_{\phi} H_2$ la 3-variedad determinada por ϕ . Se puede probar que para construir a M , no es necesario conocer toda la imagen de ϕ , basta con conocer las curvas d_i . Para ver esto, peguemos H_1 y H_2 por partes, o sea, primero le pegamos a H_2 el disco D_1 (o bien, una vecindad de D_1 , o sea, una versión engordada de D_1), luego D_2 , y así hasta pegar todos los discos D_i . Lo que resta por pegar es el complemento de los discos (o bien, el complemento de vecindades de los discos), lo que es una 3-bola. Ahora,

al pegar la 3-bola lo hacemos por su frontera, y puede verse que no importa como sea este pegado, pues las 3-variedades que se obtienen son homeomorfas.

Sea H_2 un cubo con asas de género n , y d_1, d_2, \dots, d_n una colección de curvas ajenas en ∂H_2 , tal que $\partial H_2 - \cup d_i$ es una esfera con $2n$ agujeros. A $(H_2, d_1, d_2, \dots, d_n)$ lo llamamos un *diagrama de Heegaard*. Por la discusión del párrafo anterior se sigue que este diagrama determina una única 3-variedad. Nótese, sin embargo, que una 3-variedad tiene muchos diagramas de Heegaard distintos que la definen.

A partir de un diagrama de Heegaard de una 3-variedad M es fácil calcular una presentación para el grupo fundamental de M . Nótese primero que si H_2 es un cubo con asas de género n , entonces $\pi_1(H_2) \cong F(x_1, \dots, x_n)$, el grupo libre de n generadores; esto es porque H_2 es homotópico a la cuña de n círculos, o sea, se puede deformar continuamente a dicho espacio. En la figura 3 mostramos una colección de curvas x_i que generan el grupo fundamental de un cubo con asas. Ahora, al pegar H_1 y H_2 aplicamos el teorema de Seifert-Van Kampen, pero lo hacemos por partes. Con la elección de un punto base adecuado, podemos expresar cada una de las curvas d_i en términos de los generadores x_1, \dots, x_n de $\pi_1(H_2)$, obteniendo n relaciones r_1, \dots, r_n . Al pegarle el disco D_1 a H_2 como lo hicimos arriba, vemos que la curva d_1 se vuelve trivial, o sea, la relación r_1 es trivial en el grupo del nuevo espacio. Hacemos lo mismo con las curvas restantes, y por el teorema de Seifert-Van Kampen, tenemos que

$$\pi_1(M) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n | r_1, r_2, \dots, r_n \rangle .$$

Como un ejemplo, considérese el diagrama de Heegaard mostrado en la figura 4, que determina una 3-variedad P .

Se sigue que $\pi_1(P) \cong \langle x_1, x_2 | x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}, x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-2} \rangle$. Este grupo no es trivial, pues existe un homomorfismo ϕ de $\pi_1(P)$ en el grupo S_5 dado por $\phi(x_1) = (12345)$ y $\phi(x_2) = (15324)$. Pero la abelianización de este grupo sí es trivial, lo que implica que $H_1(P) \cong 0$. Esta variedad P es la *variedad de Poincaré*, que es una esfera homológica.

Damos ahora un esbozo de la clasificación de las 3-variedades con género de Heegaard 0 o 1. Un cubo con asas de género 0 es una 3-bola y, entonces, una variedad de género 0 se obtiene al identificar dos bolas por sus fronteras. Pero la variedad que se obtiene de esta manera, sin importar el pegado es S^3 ; o sea S^3 es la única 3-variedad de género de Heegaard 0. Un cubo con asas de género 1 es un toro sólido. Al identificar dos toros sólidos por sus fronteras obtenemos una familia de 3-variedades que se conocen como *espacios lentes*. Sea H un toro

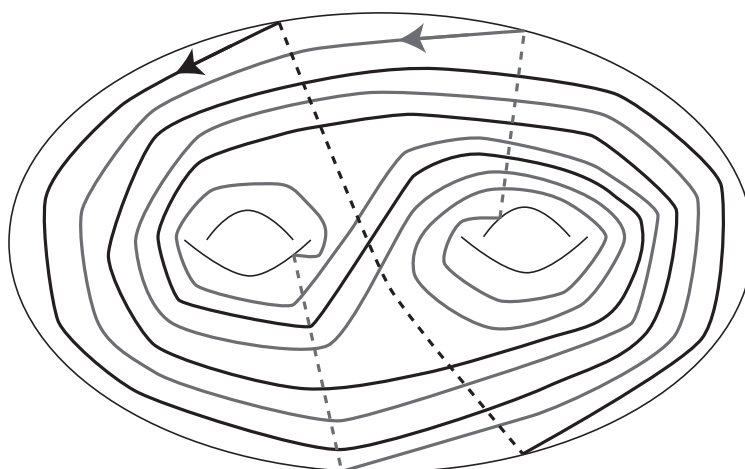


Figura 4.

sólido, y sean μ y λ un meridiano y una longitud de H , es decir μ es una curva esencial en ∂H que es frontera de un disco en H y λ es una curva esencial en ∂H que interseca a μ en un punto. Las clases de homología de las curvas μ y λ forman una base para $H_1(\partial H) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si r es una curva simple cerrada en ∂H , entonces existen enteros p y q , primos relativos, tales que $[r] = p[\mu] + q[\lambda]$ (si r es una curva en una superficie o una 3-variedad, denotamos por $[r]$ a la clase de homología u homotopía determinada por r). Denotamos por $L(p, q)$ a la 3-variedad determinada por el diagrama de Heegaard (H, r) . Se sigue que $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$. Esta familia ya ha sido clasificada, dados $L(p, q)$ y $L(p', q')$ se sabe bajo qué condiciones en los parámetros estos son equivalentes. En particular, $L(p, q) \cong S^3$ si y solo si $p = 1$.

Las variedades de género 2 se obtienen al identificar dos cubos con asas de género 2. Aquí obtenemos una familia infinita de 3-variedades que no se ha clasificado; de hecho la familia es bastante complicada.

2.5. Cirugía de Dehn

Sea k un nudo en S^3 , o sea, una curva simple cerrada en S^3 y sea $N(k)$ una vecindad tubular de k ; entonces $N(k) \cong S^1 \times D^2$, es decir, $N(k)$ es un toro sólido. Entonces el espacio $E(k) = S^3 - \text{int}N(k)$, llamado el exterior de k , es una 3-variedad cuya frontera es un toro $T = \partial E(k) = \partial N(k)$. Sean μ y λ un meridiano y una longitud preferente de $\partial E(k)$, es decir, μ es una curva esencial en T que es frontera de un disco en $N(k)$ y λ es una curva esencial en T que es homológicamente trivial en $E(k)$, de hecho, λ es frontera de una superficie encajada en $E(k)$ (para un nudo en S^3 siempre existe tal longitud preferente). Las clases de las

curvas μ y λ forman una base para $H_1(T)$. Sea ahora r una curva simple cerrada en T , tal que $[r] = p[\mu] + q[\lambda]$, donde p y q son enteros primos relativos. Hacer r -cirugía de Dehn en k , consiste en identificar $E(k)$ y un toro sólido V por sus fronteras, de modo que un meridiano de V se identifica con la curva r (véase la figura 5). El resultado es un 3-variedad cerrada, que denotamos por $M_k(r)$. No es difícil ver $H_1(M_k(r)) \cong \mathbb{Z}_p$. En particular, si $p = 1$, tenemos que $M_k(r)$ es una esfera homológica. Por ejemplo, para el nudo trébol mostrado en el figura 5, tenemos que $M_k(1)$ es la variedad de Poincaré. Dehn usó este método para construir una infinidad de esferas homológicas distintas. Para ver esto hay que probar que, para algún nudo k , $M_k(1/q_1) \neq M_k(1/q_2)$, para $q_1 \neq q_2$.

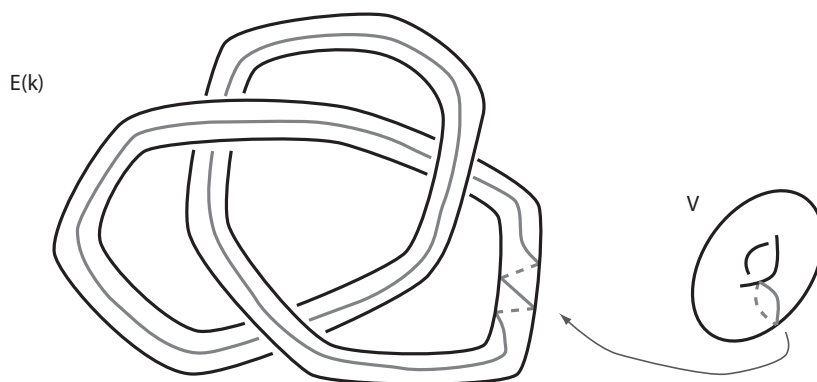


Figura 5.

Si $L = k_1 \cup k_2 \cdots \cup k_n$ es un enlace de n componentes en S^3 , es decir, la colección de n nudos ajenos, y (r_1, \dots, r_n) es una colección de curvas simples cerradas en los $\partial N(k_i)$, podemos definir $M_L(r_1, \dots, r_n)$ como la 3-variedad que se obtiene al rellenar $E(L)$ con n toros sólidos, donde los meridianos de los toros se identifican con las curvas r_i . El teorema fundamental de cirugía, probado independientemente por Lickorish y Wallace, nos dice que cualquier 3-variedad cerrada se puede obtener por cirugía en algún enlace en S^3 , y además, la cirugía se puede escoger que sea entera, es decir, para cada r_i tenemos que $[r_i] = p[\mu_i] + [\lambda_i]$. Para una prueba de este teorema véase [36]. Además, este teorema se puede refinar, y se puede probar que cualquier 3-variedad cerrada se obtiene por cirugía entera en una n -trenza pura cerrada. No definiremos aquí lo que es una trenza, solo decimos que una n -trenza pura cerrada es un enlace de n componentes que tiene una proyección en el plano de modo que cada rayo que sale del origen interseca a cada componente del enlace exactamente en un punto; note que cada componente de una n -trenza pura cerrada es un nudo trivial. En la figura 6 puede verse un ejemplo de una 3-trenza pura cerrada.

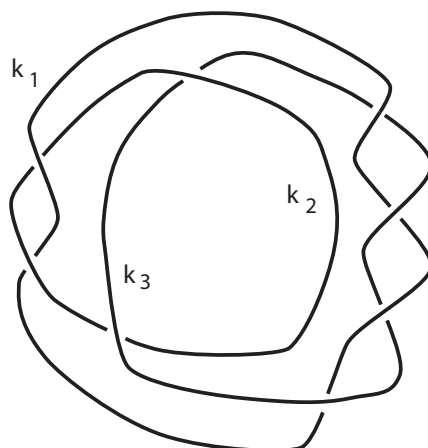


Figura 6.

Existen otras manera de representar 3-variedades que no hemos definido por cuestiones de espacio, estas son las cubiertas ramificadas sobre un nudo en S^3 y los libros abiertos.

3. La conjetura de Poincaré y sus consecuencias

Uno de los problemas con la conjetura de Poincaré es que la definición del grupo fundamental es muy general, se aplica a cualquier espacio topológico, para que esté bien definido basta que el espacio sea arcoconexo, no se requiere que sea variedad. En el caso de que tengamos una 3-variedad dada por una triangulación, no es difícil ver que podemos tomar como punto base alguno de los vértices de la triangulación y que cualquier lazo es homotópico a uno contenido en el 1-esqueleto de la 3-variedad (o sea el conjunto de vértices y aristas). Sin embargo, si un lazo es trivial, no tenemos control sobre las posibles homotopías que contraen a dicho lazo.

Ha habido muchos intentos de probar la conjetura, y matemáticos de primera línea han trabajado en ella. Los intentos de demostración han inspirado muchos de los desarrollos en la teoría de 3-variedades.

3.1. Variedades de Whitehead

En 1933 Whitehead publicó una prueba de la conjetura de Poincaré [44]. Un año después el mismo Whitehead [45] encontró un error en su demostración. De hecho su prueba también implicaba que una

3-variedad abierta (no compacta y sin frontera) y simplemente conexa tenía que ser homeomorfa a \mathbb{R}^3 . Whitehead dio un ejemplo de una 3-variedad abierta y simplemente conexa, de hecho contraíble, y que no es homeomorfa a \mathbb{R}^3 . O sea, el análogo de la conjetura pero para variedades abiertas es falso. Una descripción de esta variedad puede verse en los libros [18], [36]. A las variedades que cumplen con estas propiedades se les conoce como *variedades de Whitehead*.

3.2. El lema de Dehn y el teorema del lazo

En general, es difícil deducir información topológica a partir del grupo fundamental. Papakyriakopoulos demostró en los años 50 del siglo pasado varios resultados que combinan el álgebra con la topología y que son ahora parte fundamental de la teoría de 3-variedades [27], [28]. Estos son el lema de Dehn, el teorema del lazo y el teorema de la esfera. El lema de Dehn fue enunciado y probado por Dehn en 1910, sin embargo, en 1927 Kneser encontró un grave error en su demostración. Una demostración correcta fue dada por Papakyriakopoulos en 1957. El lema dice lo siguiente:

Lema 2. *Sea k un nudo en una 3-variedad M y supóngase que existe una función $f : D^2 \rightarrow M$ tal que f restringida a ∂D es un homeomorfismo de ∂D sobre k y que $f(\text{int}D) \cap k = \emptyset$. Entonces existe un disco F encajado en M , tal que $\partial F = k$.*

La hipótesis de que el interior de D no toque a k es esencial, pues cualquier curva que es homotópicamente trivial es frontera de un disco con singularidades, por ejemplo, cualquier nudo en S^3 es frontera de un disco con singularidades, pero solo el nudo trivial es frontera de un disco encajado (véase la figura 7). Este teorema implica que si k es un nudo en S^3 , o bien en una esfera homotópica, entonces $\pi_1(E(k)) \cong \mathbb{Z}$ si y solo si k es el nudo trivial.

Sea M una 3-variedad con frontera y sea S una componente de ∂M . La inclusión $\iota : S \hookrightarrow M$ induce un homomorfismo $\iota_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$. El teorema del lazo nos dice lo siguiente:

Teorema 3. *Si ι_* no es un monomorfismo, entonces existe una curva simple cerrada α en S , que es esencial en S , y un disco D encajado en M tal que $\partial D = \alpha$.*

Si existe tal α , entonces es claro que $[\alpha]$ no es trivial en $\pi_1[S]$ pero $\iota_*([\alpha])$ es trivial en $\pi_1(M)$; pero si el núcleo de ι_* no es trivial, no es obvio ver que existe una curva simple en el núcleo. El teorema del lazo

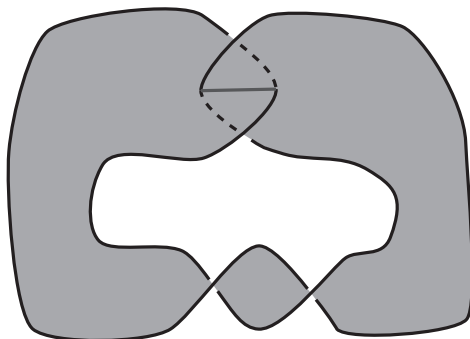


Figura 7.

es más general que el lema de Dehn, y de hecho, el lema se sigue al aplicar el teorema a $E(k)$.

El teorema de la esfera nos dice lo siguiente:

Teorema 4. *Si $\pi_2(M) \neq 1$, es decir, el segundo grupo de homotopía de la 3-variedad M no es trivial, entonces existe una esfera encajada S en M , tal que su clase de homotopía es no trivial.*

Este teorema implica que para una 3-variedad irreducible M , $\pi_2(M) \cong 0$. La prueba de estos teoremas es complicada; para una prueba véase el libro [18].

Sea S una superficie propiamente encajada en una 3-variedad M (es decir, $S \cap \partial M = \partial S$) o contenida en ∂M . Decimos que S es *compresible* si existe una curva γ , esencial en S , y un disco D en M tal que $D \cap S = \partial D = \gamma$. Si no existe tal curva γ entonces decimos que S es *incompresible*. Se sigue del teorema del lazo y del teorema de Seifert-Van Kampen que, si S es incompresible, entonces la inclusión $\iota : S \hookrightarrow M$ induce un monomorfismo en grupos fundamentales. Esto implica que cualquier superficie (distinta a una 2-esfera) encajada en una esfera homotópica es compresible. Las superficies incompresibles son fundamentales en la teoría de 3-variedades. Decimos que una 3-variedad M es *Haken* si es irreducible y contiene una superficie incompresible. Haken demostró, entre otras cosas que platicaremos más adelante, que todas las variedades Haken se pueden descomponer cortando por superficies incompresibles hasta llegar a una colección de cubos con asas. Esto lo utilizó Waldhausen para probar que las variedades Haken cerradas están determinadas por su grupo fundamental, es decir, si tienen el mismo grupo entonces son homeomorfas. Esto no es cierto en el caso de variedades con frontera, pero para este caso probó que el grupo fundamental más su estructura periférica, o sea, la imagen del grupo fundamental de la frontera, determinan a la 3-variedad [42].

3.3. Caracterizaciones de la 3-esfera y versiones equivalentes de la conjetura de Poincaré

Ha habido muchos intentos para probar la conjetura de Poincaré. Una estrategia consiste en dar condiciones que garanticen que una 3-variedad es S^3 , o sea, en dar una caracterización de S^3 . Entonces quedaría por probar que toda esfera homotópica satisface estas condiciones. En 1958 Bing [7] probó el siguiente resultado: *Una 3-variedad cerrada M es S^3 si y solo si todo nudo en M se encuentra dentro de una 3-bola. Este resultado se sigue del siguiente: Toda 3-variedad contiene un nudo cuyo exterior es irreducible.* Para probar que tal nudo existe hay que tomar una descomposición de Heegaard de género mínimo y un nudo en uno de los cubos con asas de manera apropiada. Para probar el teorema de Bing, sea k un nudo con exterior irreducible, entonces por hipótesis k está dentro de una 3-bola B . Entonces como $E(k)$ es irreducible, ∂B es frontera de una 3-bola B' en el exterior de k , luego $M = B \cup B'$, de donde se sigue que M es S^3 . Ahora el problema está en probar que una esfera homotópica satisface estas condiciones. Parece intuitivamente claro que si un nudo (o sea un lazo) lo podemos contraer a un punto, entonces en algún momento, al irlo contrayendo, estará dentro de una 3-bola. El problema está en que al contraer el nudo, este pudo autocruzarse y para probar que se puede contraer sin autocruzarse necesitaríamos usar alguna propiedad global de M , no basta con saber que el nudo en cuestión es homotópicamente trivial. De hecho, en cualquier 3-variedad existe un nudo homotópicamente trivial cuyo complemento es irreducible; entonces, en una variedad distinta a una esfera homotópica, al empujar a dicho nudo dentro de una 3-bola necesariamente se autointerseca.

Otra estrategia es suponer que tenemos una descomposición de Heegaard y entonces probar que hay alguna manera de reducir el género. Supongamos que $H_1 \cup H_2$ es una descomposición de Heegaard de una esfera homotópica M . Sea Γ una cuña de n círculos tal que una vecindad $N(\Gamma)$ de Γ es el cubo con asas H_1 . Cada círculo γ_i de Γ es homotópicamente trivial en M y es, por lo tanto, la frontera de un disco singular en M que puede intersecar a Γ . Si existiera un disco D encajado en M con $D \cap \Gamma = \partial D = \gamma_i$, entonces este disco podría usarse para reducir la descomposición de Heegaard. Aquí el problema es que no es claro cómo encontrar dicho disco. Habría que usar alguna propiedad global de M , pues esta estrategia también podría emplearse para tratar de probar una conjetura de Waldhausen que generaliza a la de Poincaré:

Conjetura 5. *Para una 3-variedad cerrada, el género de Heegaard es*

igual al rango de su grupo fundamental, o sea, al mínimo número de generadores del grupo fundamental.

Sin embargo, ahora se sabe que dicha conjetura es falsa y, de hecho, la diferencia entre el género y el rango puede ser arbitrariamente grande [21].

Un procedimiento más elaborado para tratar de probar la conjetura de Poincaré usando descomposiciones de Heegaard es el siguiente. Sea $M = H_1 \cup H_2$ una descomposición de Heegaard de M de género $g \geq 2$, y sea $T = \partial H_1 = \partial H_2$. La inclusión de T en H_1 y H_2 induce homomorfismos $\phi_1 : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(H_1)$ y $\phi_2 : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(H_2)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(H_1) & \\
 \phi_1 \nearrow & & \searrow \iota_1 \\
 \pi_1(T) & \xrightarrow{\phi_1 \times \phi_2} & \pi_1(H_1) \times \pi_1(H_2) \\
 \phi_2 \searrow & & \nearrow \iota_2 \\
 & \pi_1(H_2) &
 \end{array}$$

Esto nos da un homomorfismo $\phi_1 \times \phi_2 : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(H_1) \times \pi_1(H_2)$. Se puede probar que $\phi_1 \times \phi_2$ es un epimorfismo si y solo si $\pi_1(M)$ es trivial. El núcleo de este homomorfismo es la intersección de los núcleos de ϕ_1 y ϕ_2 . Por lo que podemos conjeturar:

Conjetura 6. *Sea $M = H_1 \cup H_2$ una descomposición de Heegaard de género $g \geq 2$ de una esfera homotópica M , con homomorfismo de descomposición $\phi_1 \times \phi_2$. Entonces existe un elemento no trivial en el núcleo de $\phi_1 \times \phi_2$ que se representa por una curva simple cerrada α en $T = \partial H_1 = \partial H_2$.*

Esta conjetura se puede expresar en términos puramente algebraicos al considerar cualquier epimorfismo de $\pi_1(T)$, con T una superficie de género g , en el producto directo $F_g \times F_g$ de dos grupos libres de rango g . Esta conjetura implica la conjetura de Poincaré, pues si tenemos tal curva α , entonces por el lema de Dehn, aplicado por separado en cada H_i , tenemos que la curva α es frontera de un disco D_1 en H_1 y un disco D_2 en H_2 . Entonces $S = D_1 \cup D_2$ es una esfera que interseca a T en una sola curva y, al cortar por S , podemos expresar a M como una suma conexa de dos 3-variedades $M = M_1 \# M_2$ (necesariamente esferas homotópicas) que tienen descomposiciones de Heegaard inducidas por la descomposición de M y cada una de género de Heegaard menor a

g ; por lo tanto, por inducción, serían la 3-esfera y se sigue M es la 3-esfera. Se puede probar que S^3 satisface la conjetura, es decir, que para cualquier descomposición de Heegaard de S^3 de género mayor a 1, existe tal curva α . Esto se sigue del teorema de Waldhausen [43] que prueba que cualquier descomposición de Heegaard de S^3 es equivalente a una descomposición estándar.

Papakiryakopoulos intentó probar la conjetura de Poincaré probando esta última conjetura y encontró condiciones suficientes en el epimorfismo $\phi_1 \times \phi_2$ que garantizan la existencia de la curva α [29], [30].

Connor dio otra caracterización de S^3 [10]: *Sea M una esfera homotópica. Supóngase que para cualquier nudo K en M existe un nudo K_1 en S^3 tal que $\pi_1(M - K) \cong \pi_1(S^3 - K_1)$. Entonces M es S^3 .* Posteriormente Simon [38], usando un resultado de González-Acuña probó que basta tomar nudos fibrados, o sea, si para cualquier nudo fibrado K en M , existe un nudo K_1 en S^3 , tal que $\pi_1(M - K) \cong \pi_1(S^3 - K_1)$, entonces M es S^3 . Para probar estos resultados, observamos primero que si dos variedades tienen grupos isomorfos entonces son homotópicamente equivalentes y, si el exterior de K es suficientemente complicado, o sea, tiene ciertas superficies incompresibles, entonces, usando los resultados de Waldhausen sobre variedades Haken, puede probarse que los exteriores de K y K_1 son homeomorfos y que el homeomorfismo manda un meridiano de K en uno de K_1 .

Usando estos resultados González-Acuña ha dado una formulación equivalente a la conjetura de Poincaré que ahora describimos. Una presentación artiniiana de un grupo G es una presentación $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ tal que

$$\prod_{i=1}^n r_i x_i r_i^{-1} = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{en} \quad F(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

Por ejemplo, si e, e_1, e_2 son enteros, entonces $\langle x_1, x_2 : (x_1 x_2)^e x_1^{e_1}, (x_1 x_2)^e x_2^{e_2} \rangle$ es una presentación artiniiana. González-Acuña ha probado que un grupo G es isomorfo al grupo fundamental de una 3-variedad cerrada si y solo si tiene una presentación artiniiana [14]. Para probar esto recuérdese que cualquier 3-variedad cerrada se puede obtener por cirugía de Dehn entera en una n -trenza pura cerrada. A partir de una descripción de cirugía entera en una n -trenza pura cerrada se puede obtener una descomposición de Heegaard y un diagrama de Heegaard de un tipo muy especial; de donde se sigue que la presentación asociada al diagrama es artiniiana. Al revés, dada una presentación artiniiana, se puede construir un diagrama de Heegaard que tenga como grupo asociado la presentación dada. Ahora, los grupos de nudos en S^3 también se pueden caracterizar. Se sigue del trabajo de Artin [4], que

un grupo es el grupo de un nudo si y solo si tiene una presentación $\langle y_1, \dots, y_n : s_1 y_1 s_1^{-1} y_2^{-1}, \dots, s_{n-1} y_{n-1} s_{n-1}^{-1} y_n^{-1}, s_n y_n s_n^{-1} y_1^{-1} \rangle$ tal que

$$\prod_{i=1}^n s_i y_i s_i^{-1} = \prod_{i=1}^n y_i \quad \text{en} \quad F(y_1, \dots, y_n) \quad (2)$$

Si $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ es una presentación artiniana del grupo trivial, entonces decimos que el grupo dado por la presentación $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \rangle$ es un *grupo-rat*. Los grupos-rat son precisamente los grupos de nudos en esferas homotópicas.

Conjetura 7. *Un grupo-rat es un grupo de nudo, o sea un grupo-rat tiene una presentación que satisface (2).*

Esta conjetura es equivalente a la conjetura de Poincaré [12]. Hay varias dificultades al tratar de probar esta conjetura. Primero, aún cuando un grupo-rat sea el grupo de un nudo, no es claro como transformar unos generadores que satisfacen (1) a otros que satisfagan (2). Segundo, el grupo trivial tiene muchas presentaciones artinianas y es difícil determinar si una presentación dada representa al grupo trivial. Tenemos ejemplos que ilustran esta dificultad. En [3] damos ejemplos de 3-trenzuras puras cerradas no triviales que producen S^3 por cirugía y, usando los cálculos de [1] se puede dar una colección infinita de presentaciones artinianas del grupo trivial [2] que, en general, son bastante complicadas. Por ejemplo, al hacer cirugía $(2, -4.1)$ en la 3-trenza pura cerrada de la figura 6 se obtiene S^3 .

3.4. La propiedad P

Como mencionamos anteriormente, cualquier 3-variedad cerrada puede obtenerse por cirugía de Dehn en un enlace. Si existiera una esfera homotópica distinta a S^3 , un lugar para buscarla podría ser haciendo cirugía en un nudo. Motivados por esto, González-Acuña [13] e, independientemente, Bing y Martin [8] definieron la propiedad P para un nudo. Decimos, entonces, que un nudo tiene la *propiedad P* si ninguna cirugía no trivial en K produce una esfera homotópica. Hay muchas maneras de probar que un nudo tiene la propiedad P , por ejemplo, calculando presentaciones para los grupos fundamentales y probando que no son triviales, o probando que la variedad obtenida es Haken, o sea, encontrando una superficie incompresible en el exterior de K y probando que sobrevive a la cirugía, es decir, la superficie permanece incompresible en la 3-variedad obtenida por cirugía. La propiedad P

se probó para muchas familias de nudos. Gordon y Luecke [16] probaron que no es posible obtener a S^3 por cirugía no trivial en un nudo no trivial, lo que es equivalente a probar que los nudos están determinados por su complemento, es decir, si los exteriores de dos nudos son homeomorfos, entonces los nudos son equivalentes. Al probar esto, quedó abierta la posibilidad de que se obtuviera una esfera homotópica distinta a S^3 . Finalmente, Kronheimer y Mrowka [20] dieron una prueba de la propiedad P para todos los nudos. Claro, la conjetura de Poincaré más el resultado de Gordon y Luecke implican la propiedad P , pero la prueba de Kronheimer y Mrowka es independiente de esto.

El estudio de la propiedad P propició que se buscaran cirugías excepcionales de otros tipos, por ejemplo cirugías que producen una variedad reducible o, en general, una variedad que no es hiperbólica. Aquí no hemos hablado de variedades hiperbólicas, por lo que referimos al lector a alguno de los artículos panorámicos sobre cirugía de Dehn en un nudo [15], [9].

3.5. Algoritmos para 3-variedades

Haken trabajó también en la conjetura de Poincaré y en [17] la estudia desde diferentes enfoques. Una de sus contribuciones más importantes es que encontró la manera de producir algoritmos para decidir cuestiones de 3-variedades que ahora describimos. Si M es una 3-variedad triangulada, digamos formada por n tetraedros T_1, T_2, \dots, T_n y S es una superficie incompresible en M , entonces S se puede isotopar, o sea, mover sin autointersecarse, de modo que interseque a cada tetraedro de manera sencilla, es decir, la intersección entre S y cada T_i consiste de un número finito de triángulos y cuadrados como se muestra en la figura 8. Entonces la superficie en cuestión estará formada de una unión de triángulos y cuadrados. Decimos que una superficie es *normal* si está formada de esta manera. También se podría pensar al revés, empezar con la triangulación y tratar de encontrar todas las superficies normales. De hecho, la triangulación determina un número finito de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son el número de triángulos y cuadrados de cada tipo en cada tetraedro. Nótese que cada triángulo de la triangulación pertenece a dos tetraedros y en cada uno de los triángulos hay tres posibles tipos de arcos esenciales; cada uno de los arcos determina una ecuación, la cual resulta al igualar el número de triángulos y cuadrados que aparecen en un tetraedro y que tienen a un tipo de arco, con el correspondiente número de triángulos y cuadrados que aparecen en el otro tetraedro. Una solución a estas ecuaciones corresponde a una

superficie normal. Aunque, claro, muchas de las soluciones no son superficies incompresibles. Puede probarse que hay un número finito de soluciones, llamadas fundamentales tales que cualquier otra solución es una suma finita de soluciones fundamentales; la suma tiene una interpretación topológica y se prueba que si hay superficies incompresibles entonces hay una de tales superficies entre las soluciones fundamentales. Esto ha producido algoritmos para 3-variedades. Por ejemplo, hay un algoritmo para decidir si un nudo en la 3-esfera es trivial; en este caso se triangula el exterior de un nudo dado y se prueba que si el nudo es trivial entonces, entre las superficies fundamentales, existe una que es un disco cuya frontera es una copia del nudo dado. También existe un algoritmo para determinar si una variedad irreducible es Haken. Asimismo, existe un algoritmo para determinar si dos variedades Haken son homeomorfas o no. Para una exposición de estos algoritmos véase [23].

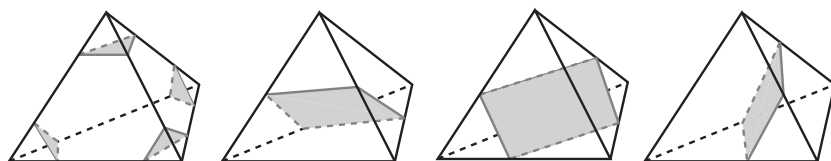


Figura 8.

Si se aplican estos métodos a una esfera homotópica pareciera que no se encontrará nada, pues tal 3-variedad no contiene superficies incompresibles. Rubinstein generalizó la idea de superficies normales al permitir que un solo tetraedro contenga una pieza que no sea un triángulo o cuadrado, sino un octágono o dos discos unidos por un tubo desanudado. A tales superficies las llamamos casi normales. Rubinstein demostró que cualquier superficie de Heegaard fuertemente irreducible es isotópica a una superficie casi normal. Una superficie de Heegaard F es fuertemente irreducible si no existen discos $D_1 \subset H_1$ y $D_2 \subset H_2$, propiamente encajados en H_1 y H_2 , con frontera no trivial en T y tal que sus fronteras no se intersequen. Se puede probar que una superficie de Heegaard de género mínimo de un esfera homotópica tiene que ser fuertemente irreducible. Estos resultados permiten encontrar algoritmos para superficies de Heegaard. Usando estas ideas, Rubinstein demostró que existe un algoritmo para determinar si una 3-variedad dada es homeomorfa a S^3 [37], [23]. Este se basa en el hecho que cualquier triangulación de S^3 tiene una superficie casi normal.

Cabe decir que este algoritmo no usa el grupo fundamental, o sea, se puede aplicar a cualquier 3-variedad sin conocer su grupo fundamental. El hecho que ya se haya probado la conjetura de Poincaré no implica que

sea fácil reconocer a S^3 , pues si nos dan una 3-variedad por medio de un diagrama de Heegaard o una triangulación, entonces es fácil encontrar una presentación para su grupo fundamental, pero puede ser muy difícil determinar si dicho grupo es trivial.

4. Conclusiones

En la sección anterior hemos tratado de explicar cómo los intentos de resolver la conjetura de Poincaré produjeron avances significativos en la teoría de 3-variedades. No hemos sido exhaustivos, pues ha habido muchos intentos de resolver la conjetura y existen muchos resultados parciales sobre esta. Véanse por ejemplo los artículos de Haken [17] o Stallings [40], o la serie de artículos que aparecen en las memorias de un congreso realizado en 1961, mismo que ha sido reimpresso recientemente [19]. Menciono también que ha habido muchas pruebas falsas de la conjetura, algunas de ellas hechas por matemáticos reconocidos, que circularon por algún tiempo hasta que se les encontró algún error. También ha habido pruebas falsas dadas por matemáticos aficionados, y de hecho, en el ArXiv [5] se pueden encontrar varias de estas pruebas, algunas escritas después de los artículos de Perelman.

También hemos dejado de lado resultados importantes en la teoría de 3-variedades, porque tienen que ver más con el problema de clasificación de 3-variedades que con la conjetura de Poincaré. Algunos de ellos son la descomposición única de 3-variedades en factores primos, la descomposición canónica de una variedad irreducible por toros incompresibles, las variedades de Seifert, las descomposiciones de Heegaard generalizadas, el invariante de Casson para esferas homológicas, etc. Tampoco hablamos sobre la conjetura de geometrización de Thurston que dice que los pedazos de la descomposición canónica de una variedad admiten una estructura geométrica. Thurston probó esta conjetura para variedades Haken y, en particular, para las variedades que tienen más de un pedazo en su descomposición canónica, dejando abierto el caso de variedades cerradas que no contienen toros incompresibles [41]. Debemos mencionar que Perelman también da una prueba de la conjetura de geometrización.

La solución a la conjetura de Poincaré cierra, de alguna manera, un capítulo en la teoría de 3-variedades. No termina con la teoría, pues quedan muchos problemas sin resolver, como el de la clasificación de 3-variedades, que tampoco se termina con la solución a la conjetura de geometrización. Sin embargo, esto nos obliga a los topólogos en dimensiones bajas a replantearnos cuáles son los objetivos principales de la

teoría de 3-variedades.

Finalmente menciono que a muchos topólogos en dimensiones bajas nos gustaría tener una prueba topológica de la conjetura de Poincaré, no solo por el capricho de tener una prueba escrita en nuestros términos y que podamos entender, sino por tener una prueba que aporte más a nuestro entendimiento de las 3-variedades.

Agradecimientos

Agradezco los valiosos comentarios y sugerencias de los árbitros. Este trabajo fue apoyado por el proyecto UNAM-PAPIIT IN109811.

Bibliografía

1. L. Armas-Sanabria, «Artin presentations and fundamental groups of 3-manifolds», *Topology Appl.*, vol. 159, 2012, 990–998.
2. L. Armas-Sanabria y F. Jasso-Hernández, «Artin presentations of the trivial group and hyperbolic, closed pure 3-braids producing S^3 », en preparación.
3. L. Armas-Sanabria y M. E.-M. noz, «The hexatangle», *Topology Appl.*, vol. 156, 2009, 1037–1053.
4. E. Artin, «Theorie der Zöpfe», *Hamb. Math. Abh.*, vol. 4, 1925, 47–72, o en *Collected papers*. Edited by Serge Lang and John T. Tate. Reprint of the 1965 original. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
5. ArXiv, «<http://front.math.ucdavis.edu>».
6. L. Bessières, G. Besson y M. Boileau, «The proof of the Poincaré conjecture, according to Perelman. The scientific legacy of Poincaré», *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, vol. 36, 2010, 243–255, *Hist. Math.*
7. R. H. Bing, «Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3 », *Ann. of Math.*, vol. 68, núm. 2, 1958, 17–37.
8. R. H. Bing y J. M. Martin, «Cubes with knotted holes», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 155, 1971, 217–231.
9. S. Boyer, *Dehn surgery on knots, Handbook of geometric topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002.
10. A. C. Connor, «An algebraic characterization of the 3-sphere», *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 266, núm. 17, 1970, 672–635, Manuscript. (See also: An algebraic characterization of 3-manifolds.
11. M. H. Freedman, «The topology of four-dimensional manifolds», *J. Differential Geom.*, vol. 17, 1982, 357–453.
12. F. González-Acuña, «A group-theoretic formulation of the Poincaré conjecture».

13. ———, «Dehn's construction on knots», *Bol. Soc. Mat Mexicana*, vol. 15, núm. 2, 1970, 58–79.
14. ———, *3-Dimensional Open Books*, Lecture Notes, University of Iowa, 1974.
15. C. Gordon, *Dehn surgery and 3-manifolds*, *Low dimensional topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, IAS/Park City Math. Ser., 15.
16. C. Gordon y J. Luecke, «Knots are determined by their complements», *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 2, 1989, 371–415.
17. W. Haken, *Various aspects of the three-dimensional Poincaré problem*, Markham, Chicago, Ill, 1970, *Topology of Manifolds (Proc. Inst., Univ. of Georgia, Athens, Ga., 1969)* pp. 140–152.
18. J. Hempel, *3-Manifolds*, *Ann. of Math. Studies*, 1976, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J., University of Tokyo Press, Tokyo.
19. M. F. Jr, «Proceedings of The University of Georgia Institute», en *Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961, 2010, Reimpreso por Dover Publications, Inc., Mineola, NY.
20. P. Kronheimer y T. Mrowka, «Witten's conjecture and property P», *Geom. Topol.*, vol. 8, 2004, 295–310.
21. T. Li, «Rank and genus of 3-manifolds», *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 26, 2013, 777–829.
22. W. Magnus, A. Karrass y D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, Reprint of the 1976 second edition.
23. S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, 2.^a ed., *Algorithms and Computation in Mathematics*, 9, Springer, Berlin, 2007.
24. E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 47, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
25. J. W. Morgan, «The Poincaré conjecture, International Congress of Mathematicians», *Eur. Math. Soc., Zürich*, vol. I, 2007, 713–736.
26. J. W. Morgan y G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, *Clay Mathematics Monographs*, 3, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007.
27. C. Papakyriakopoulos, «On Dehn's lemma and the asphericity of knots», *Ann. of Math*, vol. 66, núm. 2, 1957, 1–26.
28. ———, «On solid tori», *Proc. London Math. Soc.*, vol. 7, 1957, 281–299.
29. ———, «A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures», *Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, 250–305.
30. ———, «Planar regular coverings of orientable closed surfaces. Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)», *Ann. of Math. Studies*, núm. 84, 1975, 261–292, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

31. G. Perelman, «The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications», arXiv:math/0211159.
32. ———, «Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds», arXiv:math/0307245.
33. ———, «Ricci flow with surgery on three-manifolds», arXiv:math/0303109.
34. H. Poincaré, *Oeuvres. Tome VI. (French) [Works. Vol. VI] Géométrie. Analysis situs (topologie). [Geometry. Analysis situs (topology)] Reprint of the 1953 edition. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]*, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1996.
35. ———, *Papers on topology. Analysis situs and its five supplements*, American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 2010, Translated and with an introduction by John Stillwell. History of Mathematics, 37.
36. D. Rolfsen, *Knots and links. Corrected reprint of the 1976 original. Mathematics Lecture Series, 7*, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
37. J. Rubinstein, «Proceedings of the International Congress of Mathematicians», en *An algorithm to recognize the 3-sphere*, tomo 1, 2, Zürich, Birkhäuser, Basel, 1995, 1994, 601–611.
38. J. Simon, «Fibered knots in homotopy 3-spheres», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 58, 1976, 325–328.
39. S. Smale, «Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four», *Ann. of Math.*, vol. 74, núm. 2, 1961, 391–406.
40. J. Stallings, «How not to prove the Poincaré conjecture», *Ann. of Math. Stud.*, núm. 60, 1966, 83–88, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
41. W. Thurston, «Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry», *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, núm. 6, 1982, 357–381.
42. F. Waldhausen, «Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre», *Topology*, vol. 7, 1968, 195–203.
43. ———, «On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large», *Ann. of Math.*, vol. 87, núm. 2, 1968, 56–88.
44. J. Whitehead, «Certain theorems about three-dimensional manifolds», *Quarterly journal of mathematics*, vol. 5, 1934, 308–320.
45. ———, «A certain open manifold whose group is unity», *Quarterly journal of mathematics*, vol. 6, 1935, 268–279.