

La veleidosa propiedad del punto fijo

Alejandro Illanes
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo, con más de un punto. Se dice que un continuo X tiene la propiedad del punto fijo (p.p.f.) si para cualquier función continua $f : X \rightarrow X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Al punto p se le llama punto fijo de f .

La p.p.f. se puede definir en cualquier espacio topológico. De hacerlo así, se puede probar fácilmente que un espacio con la p.p.f. tiene que ser conexo. La compacidad ayuda de manera muy importante para tratar este tema. Así que, aunque se puede hacer teoría del punto fijo en forma más general, los continuos son un ambiente muy apropiado para desarrollarla. Como es bien conocido, la teoría del punto fijo permea muchas ramas de las matemáticas. Los resultados más conocidos por los matemáticos, en general, se ubican en las Ecuaciones Diferenciales y en el Análisis Matemático.

La pregunta que tiende el puente principal entre la teoría de continuos y la del punto fijo es: ¿cuáles continuos tienen la p.p.f.?

La p.p.f. suele ser caprichosa. Es muy común encontrar en ella resultados inesperados y está llena de contraejemplos. En 1969, R. H. Bing expuso en limpio lo que se sabía y lo que no se sabía acerca de la p.p.f. en continuos. Su artículo “The elusive fixed point property” [4] brindó un panorama muy preciso de los principales resultados que se conocían sobre el tema, sus ejemplos más sobresalientes y sus problemas abiertos. Este artículo fue una guía indispensable para todo aquél que quería trabajar en esta área. Afortunadamente, en 2007 [20], Charles L. Hagopian, uno de los expertos más reconocidos en este asunto, escribió un artículo excelente y muy bien documentado de lo que se ha hecho desde 1969 con los problemas que planteó Bing.

A cuarenta años de distancia, la teoría del punto fijo en continuos sigue dando sorpresas y confirmando su carácter veleidoso. En general es difícil predecir si la p.p.f. se conserva bajo ciertas operaciones entre continuos.

En este artículo presento las ideas de la teoría de la p.p.f. que me son más cercanas. En él expongo algunos resultados clásicos y también menciono algunos teoremas y ejemplos que he tenido la fortuna de descubrir o de ver nacer.

1. Perros y conejos

El continuo más simple que se puede construir es un intervalo de la recta real \mathbb{R} . Una aplicación directa del Teorema del Valor Intermedio (T.V.I.) nos dice que el intervalo $[0, 1]$ tiene la p.p.f. Para ver esto, consideramos una función continua cualquiera $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definimos la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula $g(t) = f(t) - t$. Claramente, g es una función continua tal que $g(0) = f(0) \geq 0$ y $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. De manera que el T.V.I. implica que existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = 0$. Esto implica que $f(p) = p$.

Otra forma muy popular, entre los expertos, de argumentar que $[0, 1]$ tiene la p.p.f., es la de usar la técnica del perro y el conejo. Para describirla, tomemos de nuevo una función continua cualquiera $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y supongamos que, dado un punto $t \in [0, 1]$, t marca la posición de un perro que quiere atrapar a un conejo que se encuentra en la posición $f(t)$. Lo que queremos mostrar es que, en algún momento p , $f(p) = p$, lo que equivale a decir que, en la posición p , el perro coincide con el conejo. Notemos que, para $t = 0$, el perro se ubica a la izquierda del conejo, mientras que, para $t = 1$ el perro ya se encuentra a la derecha del conejo. Como en el intervalo no hay espacio para hacerse a un lado, cuando el perro corre del 0 al 1, en algún momento ambos coinciden (para la mala fortuna del conejo). Es decir, f tiene algún punto fijo.



Figura 1

El argumento del párrafo anterior podría parecer un poco informal, pero se puede justificar plenamente con el T.V.I. y, por supuesto, se usa para continuos más complicados que el intervalo.

Por ejemplo, uno podría pensar que el segundo continuo en sencillez es el triodo simple representado en la Figura 2. Imagine usted cómo

podría usar el argumento del perro y el conejo para mostrar que este continuo tiene la p.p.f. De hecho, el mismo argumento que se puede usar en el triodo sirve para mostrar que cualquier árbol finito (es decir, cualquier gráfica finita y conexa sin ciclos, vista como un continuo) tiene la p.p.f.

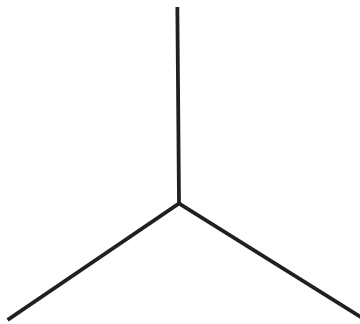


Figura 2

Otro ejemplo de continuo muy simple es la circunferencia. Notemos que las rotaciones (que no sean de 0 o 360 grados, por supuesto) son funciones continuas, de la circunferencia en ella misma, que no tienen puntos fijos. Aquí es un buen momento para que usted ejercite la mente pensando por qué la esfera hueca en el espacio \mathbb{R}^3 no tiene la propiedad del punto fijo. Después de esto, seguramente usted podrá decir por qué ninguna esfera hueca (de la dimensión que se quiera) tiene la p.p.f.

Tengamos en mente la pregunta clave: ¿cuáles son los continuos que tienen la p.p.f.? Como seguramente usted sospecha, esta pregunta es demasiado ambiciosa, de manera que, para hacerla más terrenal, podemos preguntar: ¿Cuáles son los continuos en el plano \mathbb{R}^2 que tienen la p.p.f.?

Armados de la experiencia que hemos adquirido, con los pocos ejemplos que hemos descrito aquí, tal vez podríamos aventurar la respuesta siguiente: un continuo X en \mathbb{R}^2 tiene la p.p.f. si y sólo si X no tiene agujeros, donde podemos decir que X no tiene agujeros si $\mathbb{R}^2 - X$ es conexo.

A continuación veremos que esta respuesta fue precipitada. Consideremos el siguiente continuo X , llamado Círculo de Varsovia.

En este continuo, la parte oscilante es como la gráfica de la función $\text{seno}(\frac{1}{x})$ definida en el intervalo $(0, 1]$. De manera que X tiene una infinidad de oscilaciones. Notemos que X tiene agujeros pues $\mathbb{R}^2 - X$ es disconexo. Mostraremos que X tiene la p.p.f. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Supongamos que f no tiene puntos fijos. Ponemos

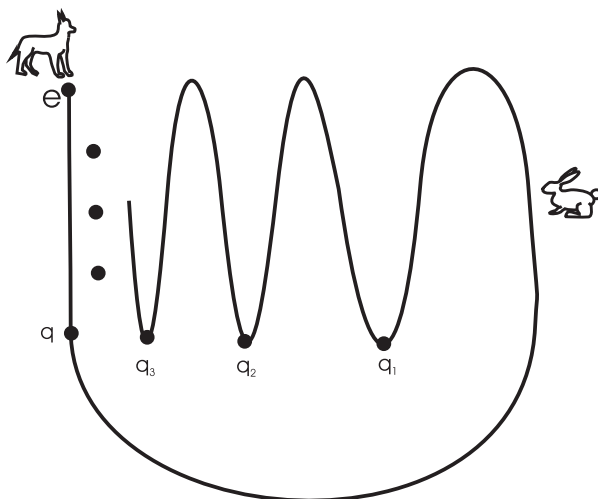


Figura 3

al perro en la posición e y al conejo en la posición $f(e)$. Pongamos al perro a recorrer todo el continuo a partir de e y, como antes, denotemos por p a la posición del perro y por $f(p)$ a la posición del conejo. A medida que p corre por X , $f(p)$ debe estar siempre “adelante” de p , pues de lo contrario se encontrarían, produciendo un punto fijo. En particular, cuando el perro está en un punto q_n , el conejo debe estar a la izquierda y más hacia arriba que q_n . Como la oscilación es infinita, parecería que el conejo se puede escapar. Pero, por la continuidad de f y como $\lim q_n = q$, tenemos que $f(q)$ debe estar hacia la izquierda y arriba de q . Así que $f(q)$ tiene que estar en el segmento que une a e con q . Esto quiere decir que $f(q)$ está antes que q , en el recorrido natural del perro. De manera que el perro tendría que haber atrapado al conejo en el segmento eq , lo cual es absurdo pues habíamos supuesto que f no tenía puntos fijos. Todo esto no hace sino mostrar que, forzosamente f tiene puntos fijos.

2. El problema

Ya vimos que no basta que un continuo en \mathbb{R}^2 esté agujerado para que no tenga la p.p.f. Tal vez es rescatable la otra parte de la pregunta.

PROBLEMA. ¿Si X es un continuo sin agujeros en \mathbb{R}^2 , entonces X tiene la p.p.f.?

Pues esta parte de la pregunta es tan rescatable que muchas personas piensan que es el problema más interesante e importante de la

topología del plano. Hasta el momento nadie ha podido resolverlo. La primera vez que este problema apareció en la literatura fue en 1930, en un artículo escrito por William Leake Ayres [2] (quien por cierto ya decía que era un problema bien conocido). Desde entonces se ha obtenido una gran cantidad de respuestas parciales. Entre los investigadores que han dado respuestas parciales más generales se encuentra Hagopian, quien en 1991 [18] hizo un recuento de los avances más importantes sobre esta pregunta. Como todos los problemas famosos, de vez en cuando aparece alguien que cree haberlo resuelto. En la versión de 1998 del congreso bianual de teoría de continuos que se celebra en Chico, California, EE.UU., Vladimir N. Akis anunció que prácticamente había resuelto este famoso problema. A la hora de presentar sus ideas en la versión de 1999 del congreso de primavera de topología, en Salt Lake, Utah, EE.UU., los tiburones de la teoría de continuos lo hicieron pedazos pues ya habían transitado el camino que él creía estar pisando por primera vez. Como sea, Akis [1] pudo contribuir con una más de las muchas respuestas parciales al problema.

Se sabe que el cuadrado $[0, 1]^2$ tiene la p.p.f. Esto es algo que se deduce fácilmente de la teoría básica del grupo fundamental. El teorema que dice que la n -celda $[0, 1]^n$ tiene la p.p.f. es conocido como el teorema de Brouwer pues Luitzen Egbertus Jan Brouwer lo probó, en 1909 [9], para $n = 3$, aunque un resultado equivalente había sido demostrado 5 años antes por Piers Bohl [5]. En 1910 [17], Salomon Hadamard probó este resultado para toda n . En 1929, Bronisław Knaster, Kasimierz Kuratowski y Stefan Mazurkiewicz [31] dieron una prueba corta del teorema de Brouwer, elegante y elemental (con una alta componente combinatoria, usando el lema de Sperner).

Una manera curiosa e ingeniosa de imaginarse el teorema de Brouwer es la siguiente. Supongamos que se tienen dos pedazos de hule flexible iguales, en forma de cuadrado. También supongamos que se dibujan dos mapas iguales, uno en cada uno de los pedazos de hule. Dejemos uno de los pedazos sin mover, sobre una mesa y el otro deformémoslo a placer, sin romper el hule. Se vale arrugarlo, doblar en algunas partes, estirarlo y achicarlo en otras y, así de deformado, ponerlo sobre el que dejamos inalterado, sin permitirle que se salga de los bordes del mapa intacto. Entonces, por el teorema de Brouwer, existe algún punto dibujado sobre el mapa deformado (pensemos en algún pueblo) que cae exactamente sobre el mismo punto dibujado en el mapa inmóvil.

Una m -celda es cualquier espacio homeomorfo al producto $[0, 1]^m$. Una manera equivalente de poner EL PROBLEMA es la siguiente: ¿Será cierto que si $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de 2-celdas en \mathbb{R}^2 que satis-

facen $D_1 \supset D_2 \supset \dots$, entonces el continuo definido por $\bigcap \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la p.p.f.?

Curiosamente, en un contexto un poco más general, la respuesta a este último problema es negativa, pues existe un continuo localmente conexo en \mathbb{R}^3 que es intersección anidada de 3-celdas y que no tiene la p.p.f. El ejemplo del que estamos hablando es el famoso doble tornado de Bing, se puede ver un dibujo de él en la página 129 de [4].

3. Los conos

Siguiendo con los continuos que no tienen agujeros, los objetos menos sospechosos de tenerlos son los conos de los continuos. No importa cómo se defina agujero en topología, siempre que se haga de manera sensata, los conos no están agujerados. De hecho los conos son el ejemplo más acabado de los continuos contráctiles. Seguramente por esta razón a Karol Borsuk, en 1948 [7], se le ocurrió preguntar si los conos de los continuos tienen forzosamente la p.p.f. (antes, en 1932 [6, p. 230], el mismo Borsuk había preguntado si los continuos contráctiles tienen la p.p.f.). Observemos que, aunque la circunferencia no tenga la p.p.f., su cono, que es homeomorfo a un disco (el cual es una 2-celda), sí tiene la p.p.f. Uno de los ejemplos más sorprendentes en esta teoría fue dado por Ronald J. Knill en 1967 [32], cuando mostró que el cono del continuo X que se construye poniendo una circunferencia y una espiral infinita girando alrededor de ella no tiene la p.p.f. Este continuo se ilustra en la Figura 4.

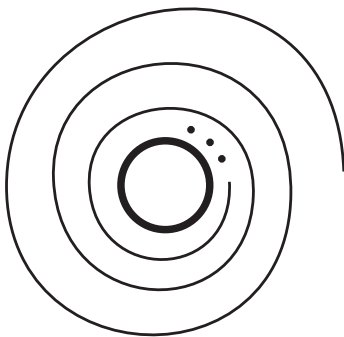


Figura 4

Demostraremos que el cono de X , ilustrado en la Figura 5, no tiene la p.p.f. Damos esta prueba por dos razones. La primera porque aunque es un argumento fácil, también es sumamente ingenioso, por cierto, la

demostración que damos aquí es ligeramente diferente de la de Knill. La segunda, porque si va usted a ver el artículo original de Knill, tiene que tener mucho empeño para traducir lo que éste quiso decir, pues la forma en que lo describió fue de pocos amigos.

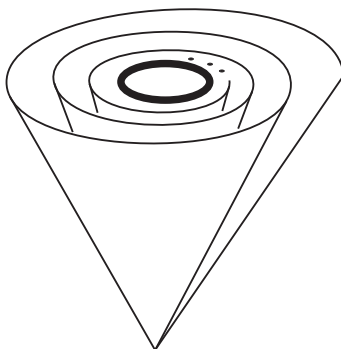


Figura 5

Para explicar la prueba con más facilidad, antes que nada, enderezamos el cono para que la punta quede hacia arriba.

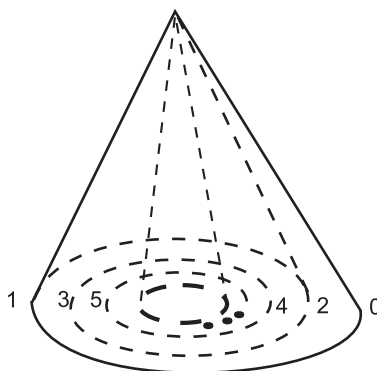


Figura 6

Ahora desenredemos la sábana infinita que rodea al cono central. Para describir mejor la función que no tiene puntos fijos, imaginemos que dicha sábana es un rectángulo infinito, pero que al final de cuentas toda la orilla superior de dicho rectángulo tiene que ser comprimida en un solo punto (el vértice del cono).

En la Figura 7, el rectángulo se debe extender indefinidamente hacia la izquierda. La numeración de la parte inferior, corresponde a la del dibujo del cono, es decir, 0 es donde empieza la sábana infinita, 1 es el

punto después de haber dado media vuelta, 2 después de una vuelta, etc. Recordemos que todos los puntos de la línea superior del rectángulo representan al vértice del cono

Llamemos W al cono de X . Definiremos una función continua $F : W \rightarrow W$ sin puntos fijos. Para esto, dividimos al rectángulo infinito en dos porciones. Primero consideramos la parte a la izquierda del número 1, cualquier segmento vertical, del piso al techo del rectángulo, a la izquierda de 1, lo dividimos en tres partes iguales, como se muestra en la Figura 7. A estas partes las pensamos como flechas y las llamamos A , B y C , al aplicarles F , $F(A)$, $F(B)$ y $F(C)$ son las flechas ilustradas en la figura. Notemos que las colas de las flechas $F(A)$ y $F(B)$ no coinciden en el dibujo, pero como todos los puntos de la parte superior del rectángulo representan al mismo punto del cono (el vértice), la función F está bien definida. Para mayor precisión, diremos que $F(B)$ se coloca una unidad hacia atrás en la sábana (media vuelta antes) y la punta de $F(C)$ se ubica una unidad adelante de la punta de C (media vuelta después). En el cono, cada uno de los segmentos verticales representa un segmento que une uno de los puntos de la base con el vértice del cono. La definición de F en el cono central (sobre la circunferencia) se hace de manera similar, en ese caso cada flecha A , va a dar a la sábana, la flecha B , baja del lado opuesto al del segmento y la flecha C da una vuelta a la circunferencia, la punta de C va a dar al punto antípoda.

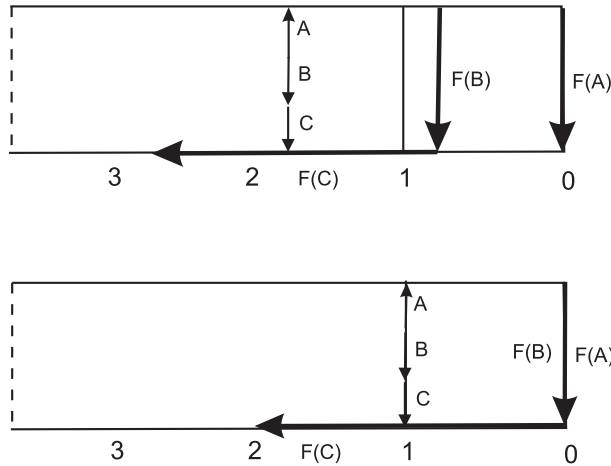


Figura 7

Con esto ya tenemos definida la función F en casi todo el cono W . Notemos que hasta ahora, la función F es continua y no tiene puntos fijos, pues los únicos puntos en los que un segmento interseca a su

imagen son la punta de A y la punta de C , pero la punta de A (que es el vértice de W) va a dar al punto donde empieza la sábana y la punta de C va a dar media vuelta adelante.

En la segunda parte de la Figura 7, se puede observar cómo quedó la imagen del segmento que se ubica sobre el número 1. En este caso, $F(A)$ y $F(B)$ son la misma flecha.

Para completar la definición de F , tenemos que decir cómo definir F en el cuadrado comprendido entre los números 0 y 1. Tal definición está representada en la Figura 8.

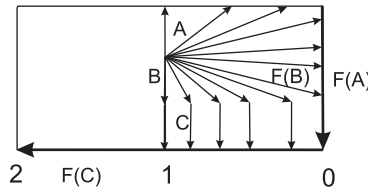


Figura 8

En esta figura, todas las flechitas verticales se envían a la flecha $F(C)$ y todas las flechitas que parten del punto común, que es la cola tanto de A como de B , se envían a $F(A)$. Observe que la función completa, así definida, es continua y que no tiene puntos fijos.

4. Conos más complicados

Si nos ponemos exigentes podemos decir que, está bien, ya encontramos un cono sin la p.p.f., pero es claro que se trata del cono de un continuo que no tiene la p.p.f., pues la circunferencia con su espiral (que llamamos X) puede ser “rotada” y con ello podemos obtener una función continua de X en X sin puntos fijos. Así que queda la tarea de ver si se puede encontrar un cono sin la p.p.f., pero que sea de un continuo con la p.p.f. Bueno, pues respondamos también a esta pregunta. Primero necesitamos una definición.

Un subcontinuo Y de un continuo Z es un retracto de Z si existe una función continua $r : Z \rightarrow Y$ tal que $r(y) = y$ para toda $y \in Y$. Es decir, el subcontinuo Y es un retracto de Z , si podemos empujar continuamente a Z embarrándolo en Y , sin mover ningún punto de Y . A una función como la r se le llama retracción.

Esta definición de retracto es pertinente aquí porque podemos mostrar lo siguiente: si Z tiene la p.p.f. y Y es un retracto de Z , entonces Y tiene la p.p.f. La prueba de esta afirmación va como sigue. Sea

$f : Y \rightarrow Y$ una función continua y sea $r : Z \rightarrow Y$ una retracción, entonces $f \circ r : Z \rightarrow Y \subset Z$ y como Z tiene la p.p.f., entonces existe $p \in Z$ tal que $f(r(p)) = p$. Esto implica que p está en el contradominio de f , el cual se llama Y , así que $p \in Y$, y como r es retracción, $r(p) = p$. De modo que $f(p) = p$. Por tanto Y tiene la p.p.f.

Para dar ejemplos fáciles de retracciones, sea Z un triángulo relleno con vértices A , B y C en el plano. Sea Y la unión de los lados AB y BC . Imagínese en este momento por qué Y es retracto de Z . Si se lo pudo imaginar, entonces podrá imaginarse el siguiente ejemplo. Ahora tomemos Y un cono sobre una circunferencia y Z el cono del disco contenido en la circunferencia. Esto es, imaginemos a Y como un cono de helado y a Z como el cono de helado, con helado. Seguramente podrá convencerse de que Y es retracto de Z .

Considere ahora el espacio W , de la Figura 9, que consta de un disco relleno con una espiral infinita rodeándolo. Usando que el disco tiene la p.p.f. y que las funciones continuas mandan arco componentes dentro de arco componentes, es relativamente fácil probar que W tiene la p.p.f.

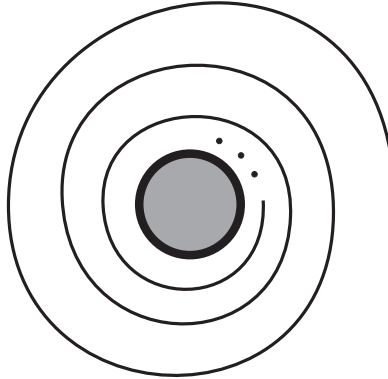


Figura 9

Como ya vimos que el helado se puede empujar continuamente a la pared del cono, tenemos que, en la Figura 10, el cono de la izquierda se puede retraer en el de la derecha y, como ya vimos que el de la derecha no tiene la p.p.f., entonces el de la izquierda tampoco la tiene.

Por tanto, existe un continuo con la p.p.f. tal que su cono no la tiene.

Tal vez esta respuesta ya nos deje satisfechos, pero a alguien que se dedica a la teoría de continuos le puede parecer insuficiente. El problema con el continuo que acabamos de ver es que W es gordo, en varios

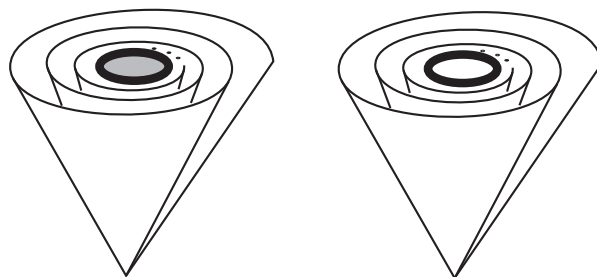


Figura 10

sentidos bien definidos. Para empezar tiene dimensión 2. Una manera de definir flaco en teoría de continuos, es diciendo que el continuo parece un árbol. La definición precisa es la siguiente.

Un continuo X , con métrica d , es arbolado si, para toda $\varepsilon > 0$, existen un árbol T y una función continua $g : X \rightarrow T$ tal que, para cualesquiera $t \in T$ y $u, x \in g^{-1}(t)$, se tiene que $d(u, x) < \varepsilon$.

Si le parece muy técnica la definición anterior, tiene usted razón, la idea que hay detrás de ella es que un continuo X es arbolado si cuando lo vemos con un lente borroso, lo vemos parecido a un árbol (un poco engordado) y que si lo vemos con un lente un poco menos borroso, entonces lo seguimos viendo parecido a un árbol (un poco más flaco y tal vez con más ramas).

Los continuos arbolados tienen algunas propiedades parecidas a las de los árboles. En particular se esperaría que los continuos arbolados tuvieran la p.p.f. Sin embargo, contestando una pregunta que estuvo abierta por un buen tiempo, David P. Bellamy en 1980 [3] construyó un continuo arbolado bastante espectacular que no tiene la p.p.f.

Tal vez ya le parezca exagerado preguntarse si el cono de un continuo arbolado tiene la p.p.f., pero ésta no es una pregunta inusual dentro de la teoría de continuos. Después de dar el ejemplo del cono sin la p.p.f. que hemos discutido antes, el mismo Knill comentó en 1967 [32, p. 36] “Aún es un problema abierto saber si es cierto o no que el cono de un continuo arbolado tiene la p.p.f.”.

Es relativamente fácil probar que los conos de los árboles tienen la p.p.f. De modo que, para estudiar la pregunta de Knill, uno tiene que trabajar con continuos arbolados que no sean árboles. El más sencillo de ellos es el representado en la Figura 11, en ella, tenemos un triodo simple en el centro (una unión de tres segmentos) y una espiral infinita que le da vueltas y que se aproxima a él.

El cono de este espacio está representado en la Figura 12.

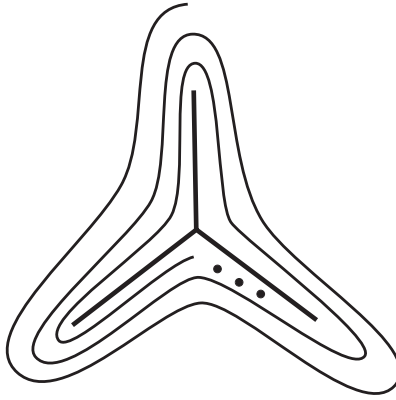


Figura 11

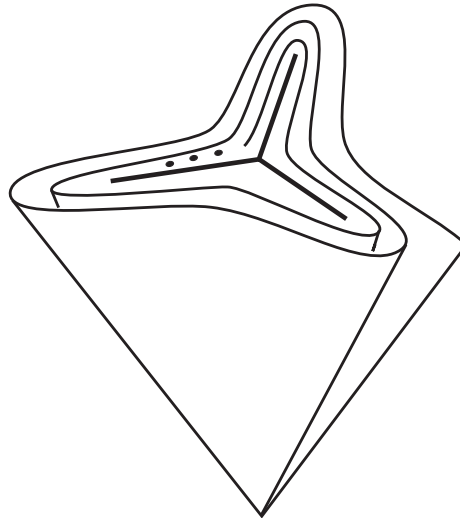


Figura 12

Siendo el objeto más simple para atacar el problema contenido en el comentario de Knill, uno debería tratar de determinar si este cono tiene la p.p.f. o no. Este objeto resultó más complicado de lo que parece. Charles L. Hagopian visitó México por primera vez en 1996 y, en un taller que dio en Oaxaca planteó este problema. Lo mismo le oí a Hagopian por lo menos en dos pláticas más y, por lo que supe después, Hagopian lo había planteado un buen número de ocasiones, en diferentes lugares. Desde que lo vi tuve la impresión de que era un problema que yo podría atacar y me recuerdo pensando en él en una aburrida reunión a la que asistí en 1997.

Pasé mi año sabático de 2004 en la Universidad Estatal de California, en Sacramento, con Hagopian y otros topólogos distinguidos. Cuando llegamos ahí, Vero, mi esposa, le dijo a Hagopian que yo había dicho que algún día iba a resolver ese problema, al saber esto, para no quedar tan mal, no tuve otro remedio que pensarlo en serio. Después de unas semanas, un viernes me presenté al seminario con la “prueba” de que este cono tenía la p.p.f. El sábado siguiente Hagopian pasó por mi casa para preguntarme un detalle que le parecía oscuro. El detalle que Hagopian quería aclarar no era difícil de solventar pero cuando él se fue me di cuenta que tenía un error y, en ese momento se me ocurrió cómo podía construir una función de este cono en él mismo sin puntos fijos. De manera que el siguiente viernes presenté la nueva respuesta en el seminario.

Por supuesto que este resultado causó revuelo entre los investigadores a los que Hagopian les había propuesto el problema y que habían intentado resolverlo. Me imagino que, igual que yo, todos pensaban que, en realidad, este cono sí tenía la p.p.f. Esto desanimaba un poco pues parecía que la prueba de este hecho era complicada y, de completarse, no tendría gran valor, pues: ¿de qué serviría saber que el ejemplo más fácil no era un contraejemplo de la pregunta más general? En fin, se ve que tuve un poco de suerte y finalmente, este resultado salió publicado en [25]. Desafortunadamente, la construcción de la función es bastante más complicada que el ejemplo de Knill que vimos antes y no se puede explicar en un artículo como éste. Presenté este resultado en la Reunión Conjunta AMS-SMM que se celebró en Houston, EE.UU. en mayo de 2004. Un detalle curioso es que después de dar mi plática, me pidieron que la repitiera dos días después. Por supuesto que acepté. Siempre he tenido sentimientos encontrados acerca de esa petición. Para empezar nunca he visto que a alguien más le pidan que repita una plática. Nunca he sabido si tomarlo como un cumplido, aparentemente el grupo de teoría de continuos que asistió a esa reunión estaba muy interesado en conocer más a fondo mi construcción, o tomarlo como una prueba de mi incapacidad para explicar el ejemplo con la claridad que se merecía, a pesar de que lo explique con unas cartulinas y unos dibujos de colores para que, según yo, se entendiera.

5. Hiperespacios

Poco tiempo después recordé otro problema planteado por Jim T. Rogers en [41, p. 283] (este problema también apareció en [12, Question 199], [35, Question 7.8], [42, Question 8, p. 207] y [33, Problem 109]), en

el que preguntaba si el hiperespacio de subcontinuos de un continuo arbolado tiene la p.p.f. Para que se entienda de qué estamos hablando empecemos con la siguiente definición.

Dado un continuo X , su hiperespacio de subcontinuos se define así:

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de } X\}.$$

A $C(X)$ se le da la llamada métrica de Hausdorff H , la cual se define como sigue. Dados $p \in X$, $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, denotemos por $B(\varepsilon, p)$ a la bola centrada en p y de radio ε en X ; y definamos $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B(\varepsilon, a) : a \in A\}$. Dados, $A, B \in C(X)$, sea $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Es relativamente fácil mostrar que H es una métrica, también se sabe (aunque no es tan fácil de probar) que, con la métrica H , $C(X)$ resulta también un continuo.

Vamos a construir un par de modelos de hiperespacios para que se vea más claro lo que sigue.

Dado que $[0, 1]$ es el continuo más simple, podemos tratar de ver cómo es $C([0, 1])$. Notemos que los subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de $[0, 1]$ son los conjuntos de un solo punto o sus subintervalos cerrados, por lo que podemos escribir.

$$C([0, 1]) = \{[a, b] \subset [0, 1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

De manera que podemos definir la función $g : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g([a, b]) = (a, b)$. Esta función resulta una biyección continua cuya imagen es el triángulo de la Figura 13.

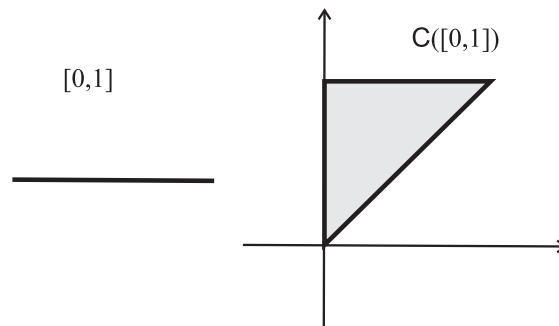


Figura 13

Otro continuo para el que es fácil encontrar un modelo para $C(T)$ es el del triodo simple T dibujado en la Figura 14.

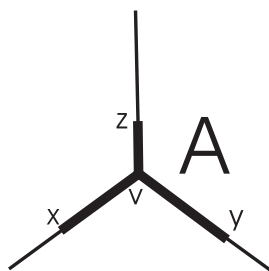


Figura 14

Para construir un modelo para $C(T)$, observemos que los subcontinuos A que contienen al vértice v del triodo son subtrioditos que están perfectamente determinados por una terceta de números (x, y, z) , que nos dicen lo que mide cada una de las patitas de A . Como los números x, y, z se pueden mover en un intervalo, digamos que se mueven en el intervalo $[0, 1]$, tenemos que el conjunto de todos los trioditos se puede representar como el cubo sólido $[0, 1]^3$. Para completar un modelo para $C(T)$, debemos añadir los subcontinuos de T que no tienen a v . Éstos son segmentos contenidos en alguna de las patitas de T , y por el modelo que vimos antes, los subcontinuos de cada una de las patitas se puede representar como un triángulo. Entonces tenemos que pegar tres triángulos a un cubo sólido. Observando con cuidado se puede uno convencer de que cada triángulo se tiene que pegar (como una bandera) a una de las aristas del cubo. En la Figura 15 ponemos una representación del espacio obtenido.

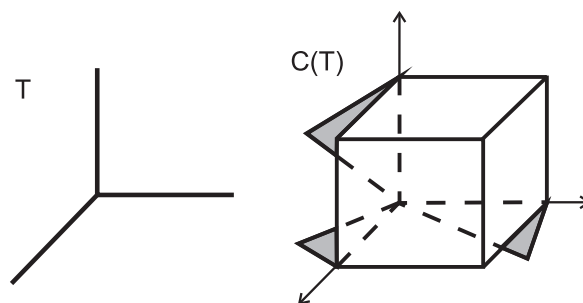


Figura 15

Haciendo unas contorsiones topológicas, se puede ver que el cubo con alas de la Figura 15 es homeomorfo al cohete de la Figura 16.

Después de esto tal vez pueda usted creer que la Figura 18 representa un modelo para el hiperespacio $C(X_0)$ del continuo X_0 de la Figura 17.

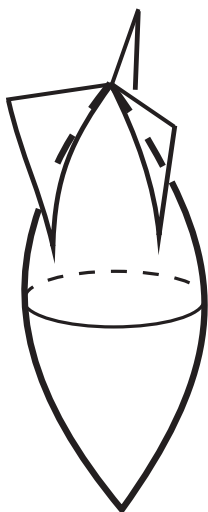


Figura 16

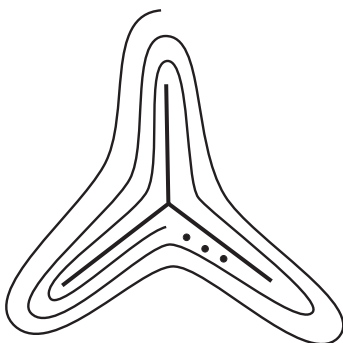


Figura 17

El dibujo de la Figura 18 tiene un corazón en forma del cohete de la Figura 16 y tiene una sábana infinita envolviéndose a su alrededor.

Tal vez en este momento usted esté pensando que ya olvidé que estábamos hablando de punto fijo y que me desvié a mi tema favorito que son los hiperespacios, pero en realidad lo que ocurre es que le quiero platicar otra historia.

En 1952, Bronislaw Knaster preguntó en [16, Problem 186] si el hiperespacio $C(X)$ tiene la p.p.f. cuando X tiene la p.p.f. Sam B. Nadler, Jr. y Jim T. Rogers, Jr. [37] mostraron que si Y es el continuo de la espiral que se envuelve en un disco (Figura 9), entonces $C(Y)$ se puede retraer a un subespacio homeomorfo al cono de Knill de la Figura 15. Como tal cono no tiene la p.p.f., entonces $C(Y)$ tampoco

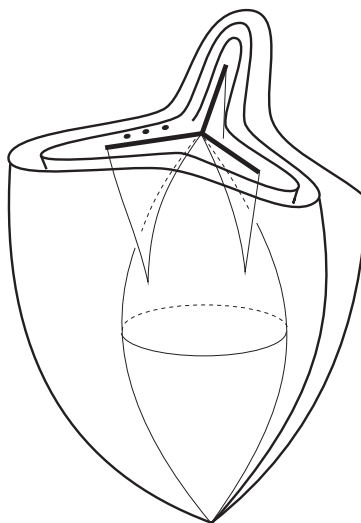


Figura 18

la tiene. Dado que Y tiene la p.p.f., entonces la respuesta a la pregunta de Knaster es negativa. Como es una constante en este tema, Rogers, preguntó si poniendo condiciones más restrictivas al continuo se podría obtener que su hiperespacio de subcontinuos tiene la p.p.f. En particular, Rogers preguntó [41, p. 283] si existirá un continuo arbolado Z tal que $C(Z)$ no tiene la p.p.f.

Ahora podemos volver al cohete ensabanado de la Figura 18. Imaginemos la siguiente operación topológica. Retraigamos las alas, de manera que, cada una de ellas, se envíe continuamente al segmento que la une con el cuerpo del cohete, además comprimamos toda la curva de la parte superior del cohete hasta llevarla a un punto. Observemos que lo que nos queda es el espacio representado en la Figura 19.

Este último espacio es simétrico con respecto al plano horizontal de la mitad por lo que podemos enviar continuamente la parte de arriba en la parte de abajo y quedarnos nada más con la parte inferior representada en la Figura 20.

Este espacio es homeomorfo al espacio del lado izquierdo de la Figura 10. Notemos que podemos hacer todas las transformaciones mencionadas sin mover nunca el espacio de la Figura 20. Es decir, el hiperespacio $C(X_0)$ (el cohete ensabanado) se puede retraer continuamente al espacio de la Figura 20. Como vimos que el espacio de la Figura 20 no tiene la p.p.f., concluimos que $C(X_0)$ no tiene la p.p.f. Esto contesta la pregunta de Rogers. Claro que una cosa es platicarlo con dibujos y otra muy distinta es dar las fórmulas que describen y prueban todo lo que

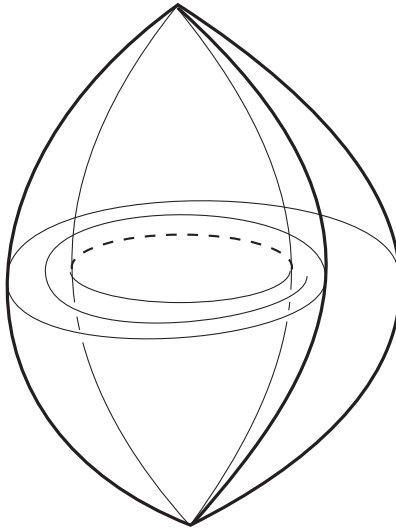


Figura 19

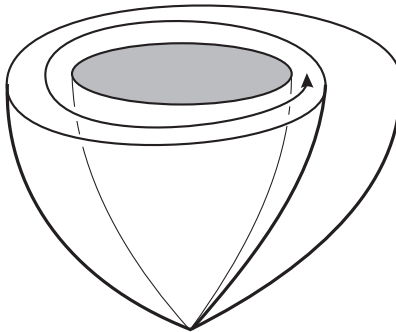


Figura 20

se dijo. Si usted tiene un estómago fuerte, no se asusta con fórmulas feonas y quiere conocer las fórmulas de las transformaciones descritas aquí, las puede encontrar en [27].

Para más problemas sobre la p.p.f. en hiperespacios lo invito a ver [26], [29, Chapter VI], [35, Chapter VII] y [36]. Si a usted le gustó la manera en que se construyen los modelos de los hiperespacios, lo invito a leer [23, Capítulo 3] o [24] donde puede encontrar una explicación detallada y pausada de casi todos los modelos conocidos de estos objetos. Se pueden encontrar algunos otros modelos, más nuevos, en [39] y [45].

6. Cilindros

Otro ejemplo famoso que dio Knill en su artículo [32] es el de la lata con falda ilustrado en la Figura 21.

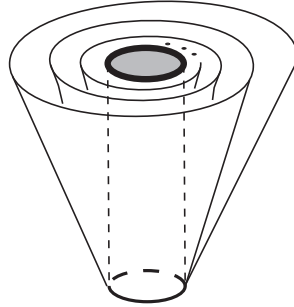


Figura 21

En este continuo L , se pone un cilindro en la parte central (la lata), el cilindro es hueco, sin la tapa inferior pero con la tapa superior. Además la sábana infinita que rodea la lata, en la parte inferior sólo consta de una circunferencia y en la parte superior es una espiral infinita rodeando a la circunferencia que contiene al disco sombreado. Para que sea más claro este ejemplo, hicimos el dibujo invertido, con respecto al de Knill, si se invierte (intercambiando la parte inferior con la superior) se entenderá por qué se llama lata con falda.

El objetivo de Knill fue el de dar un ejemplo de un continuo contráctil L tal que L tiene la p.p.f. pero $L \times [0, 1]$ no la tiene. Shin'ichi Kinoshita ya había dado un ejemplo con esta propiedad en 1953 [30], el cual se llama, lata con rollo de papel del baño y se ilustra en la Figura 22. Sin embargo, el ejemplo de Knill también sirvió para mostrar dos continuos (L y la lata rellena R , la cual es homeomorfa a $[0, 1]^3$) con la p.p.f. tales que $L \cap R$ es la lata y, por tanto homeomorfa a $[0, 1]^2$, con la propiedad adicional de que $L \cup R$ no tiene la p.p.f.

En vista de estos ejemplos, Bing [4, Question 9] preguntó si existe un continuo X , de dimensión uno con la p.p.f., tal que su cilindro $X \times [0, 1]$ no tiene la p.p.f. Esta pregunta fue respondida recientemente, en forma positiva, por Mirosław Sobolewski [43].

7. Productos simétricos

Dado un continuo X y un entero positivo $n > 1$, se define el enésimo producto simétrico de X como

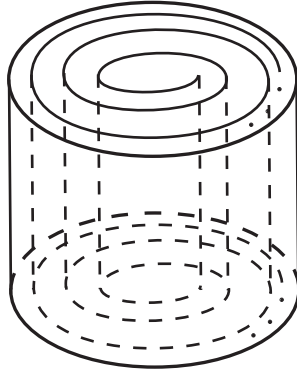


Figura 22

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A estos productos se les puede ver como el cociente del producto X^n cuando se usa la relación (x_1, \dots, x_n) es equivalente a (y_1, \dots, y_n) si y sólo si $\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Estos espacios fueron introducidos por Karol Borsuk y Stanisław Marcin Ulam en 1930 [8]. En ese artículo hicieron la pregunta, ¿si X tiene la p.p.f., será cierto que $F_n(X)$ tiene la p.p.f.? Esta pregunta fue respondida por Juliusz Oledzki quien en 1988 [38] vio que si a la lata con falda L le añadimos un segmento Q , como se muestra en la Figura 23, entonces el espacio resultante $X = L \cup Q$ tiene la p.p.f., pero $F_2(X)$ no la tiene.

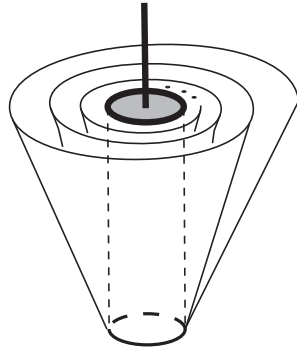


Figura 23

Para comentar la idea esencial de Oleski, primero notemos que $F_2(X) = \{\{p, q\} : p, q \in X\}$ contiene un subespacio natural \mathcal{S} , homeomorfo al producto $L \times [0, 1]$, a saber, $\mathcal{S} = \{\{p, q\} \in F_2(X) : p \in L$

y $q \in Q$. El resto del trabajo fue notar que $F_2(X)$ se puede retraer a \mathcal{S} . Y como \mathcal{S} no tiene la p.p.f., pues entonces $F_2(X)$ tampoco la tiene.

Todo esto viene a colación porque es natural preguntarse si el hecho de que algún $F_n(X)$ tiene la p.p.f. implica que X tiene la p.p.f. Recientemente Galo Higuera y Alejandro Illanes han encontrado un ejemplo de un continuo X tal que $F_2(X)$ tiene la p.p.f. pero X no la tiene. Este último ejemplo es más o menos fácil de describir, siempre que uno crea que existe el continuo extremadamente rígido Z que construyó Howard Cook en [11], el cual tiene la propiedad de que si W es un subcontinuo de Z y $f : W \rightarrow Z$ es una función continua, entonces f es una función constante o $f(w) = w$, para cada $w \in W$. Es decir, f es una función constante o es el encaje natural. Para comprender la fuerza de esta propiedad, observemos que Z no puede contener arcos (subespacios homeomorfos a $[0, 1]$), pues de contener alguno, bastaría poner W como el arco y dar una función continua del arco en sí mismo que no fuera la identidad. De hecho, esta propiedad de rigidez también tiene como consecuencia que si W es un subcontinuo cualquiera de Z , entonces las únicas funciones continuas de W en W son las constantes y la identidad. Otra consecuencia de la rigidez es que si W y Y son continuos diferentes de Z , entonces las únicas funciones continuas de W en Y son las constantes.

Una vez que se ha saboreado un poco la rigidez extrema del continuo Z , para construir X , tómanse dos copias Z y Z_0 de Z y fíjense dos puntos (diferentes) P, Q en Z . Tómanse los puntos correspondientes Q_0 y P_0 en Z_0 y péguense las copias Z y Z_0 haciendo $P = Q_0$ y $Q = P_0$. Este espacio X que es la unión de Z y Z_0 , con esos pegados, está representado en la Figura 24.

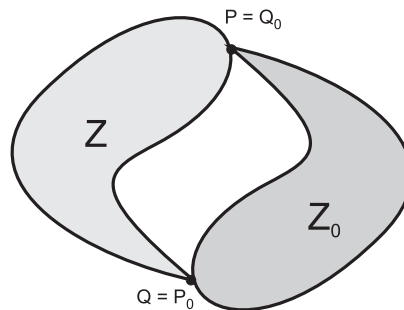


Figura 24

Es fácil mostrar que X no tiene la p.p.f., pues se puede definir la función continua $f : X \rightarrow X$ dada por $f(z) = z_0$ (a z lo enviamos a su

copia en Z_0), si $z \in Z$ y $f(z_0) = z$, si $z_0 \in Z_0$. Lo que ya no es tan fácil es probar que $F_2(X)$ tiene la p.p.f. Los detalles de esta prueba pueden verse en [22].

8. Continuos encadenables

Así como hay continuos arbolados, también se definen los continuos encadenables, con una definición similar sólo que, en lugar de poner un árbol, se pone el intervalo $[0, 1]$. Es decir, un continuo X , con métrica d , es encadenable si para toda $\varepsilon > 0$, existe una función continua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que, para cualesquiera $t \in [0, 1]$ y $u, x \in g^{-1}(t)$, se tiene que $d(u, x) < \varepsilon$.

Es relativamente fácil ver que cada continuo encadenable tiene la p.p.f. De hecho, en 1956 [14], Eldon Dyer probó que cualquier producto de continuos encadenables tiene la p.p.f. Entonces tiene sentido preguntarse, y Sam B. Nadler, Jr., lo hizo en [36, p. 77], si cualquier producto simétrico de un continuo encadenable tiene la p.p.f. De hecho, es fácil ver, y se puede poner como ejercicio, que $F_2(X)$ tiene la p.p.f., si X es encadenable ([29, Exercise 22.25]). Sin embargo, para $n > 2$ el asunto no es tan fácil. En [28] se muestra que $F_3(X)$ tiene la p.p.f., si X es encadenable. La pregunta para $F_n(X)$, donde $n > 3$, permanece abierta.

9. Descomposiciones

Otra pregunta natural en la teoría del punto fijo es la siguiente. Supongamos que podemos dar una partición de un continuo X en subcontinuos de tal manera que cada uno de ellos tenga la p.p.f. y el espacio que resulta de comprimir (hasta hacerlos puntos) cada uno de los elementos de la partición es un intervalo, ¿será cierto que X tiene la p.p.f.?

Con la experiencia que tenemos en este momento, de la lectura de este artículo, seguramente ya se sospechará que la respuesta a esta última pregunta también es negativa. Efectivamente, en 2003 [19] Hagopian dio un ejemplo para mostrar esto y preguntó si sería posible construir un tal ejemplo en el plano \mathbb{R}^2 . Pues resulta que también es posible dar ejemplos en el plano con tales propiedades. Ejemplos así han sido construidos por Charles L. Hagopian y Roman Mańka en [21] y por Verónica Martínez de la Vega y Mansilla [34]. El ejemplo de Verónica tiene el aspecto de la Figura 25.

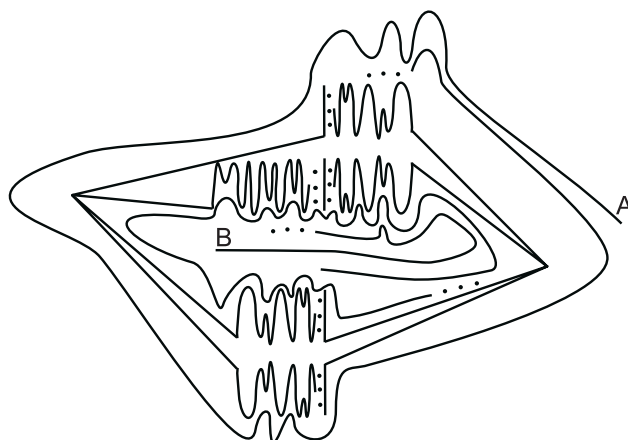


Figura 25

En este ejemplo, todas las líneas que tienen tres puntos son homeomorfas al rayo $[0, \infty)$. Los rayos que se acumulan en algún segmento vertical tienen, como se ve, jorobas que van variando de tamaño, esto se hace en forma muy escogida para que el ejemplo funcione bien y de paso, sirve para ver que se puede encontrar una cantidad no numerable de ejemplos. Para dar la partición deseada se toma cada conjunto de la forma $\{p\}$, donde p es un punto del rayo exterior que empieza en el punto A , también se toma cada conjunto de la forma $\{q\}$, donde q es un punto del rayo interior que empieza en el punto B y, por último se toma como un solo elemento de la partición al conjunto R que resulta de tomar X y quitarle los dos rayos (el que empieza en A y el que empieza en B). Cuando se comprime R en un punto, el espacio que resulta es el intervalo $[0, 1]$.

Desafortunadamente, este espacio no es apropiado para dar los detalles de que R tiene la p.p.f. y que X no la tiene, pues el argumento es un poco largo.

Para terminar diré que hay otros trabajos relacionados con continuos y p.p.f. hechos por mexicanos. En [10], [15] y [44] se pueden encontrar algunos resultados en esta dirección. Además, en [13] se pueden encontrar más resultados concernientes a la p.p.f. en conos e hiperespacios de continuos.

Referencias

- [1] V. N. Akis, *On the plane fixed point problem*, Topology Proc. 24 (1999), 15-31.
- [2] W. L. Ayres, *Some generalizations of the Scherrer fixed point theorem*, Fund. Math. 16 (1930), 332-336.
- [3] D. P. Bellamy, *A tree-like continuum without the fixed point property*, Houston J. Math. 6 (1980), 1-13.
- [4] R. H. Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 119-132.
- [5] P. Bohl, *Über die Bewegung eines mechanische Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage*, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 179-276.
- [6] K. Borsuk, *Über eine Klasse von local zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. 19 (1932), 220-242.
- [7] K. Borsuk, *Problem 54*, Colloq. Math. 1 (1948), p. 332.
- [8] K. Borsuk y S. M. Ulam, *Symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875-882.
- [9] L. E. J. Brouwer, *On continuous vector distributions on surfaces*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Ser. A 11 (1909), 850-858; 12 (1910), 716-734; 13 (1910), 171-186.
- [10] J. Bustamante, R. Escobedo, F. Macías-Romero, *A fixed point theorem for Whitney blocks*, Topology Appl. 125 (2002), 315-321.
- [11] H. Cook, *Continua which admit only the identity mapping onto nondegenerate subcontinua*, Fund. Math. 60 (1967), 241-249.
- [12] H. Cook, W. T. Ingram, K. T. Kuperberg, A. Lelek and P. Minc, editors, *Continua with the Houston Problem Book*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. vol. 170, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1995.
- [13] F. Corona Vázquez, *La propiedad del punto fijo en hiperespacios suspensión, conos y suspensiones de continuos*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Director de tesis, Raúl Escobedo, 2007.

- [14] E. Dyer, *A fixed point theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 662-672.
- [15] R. Escobedo, M. de J. López y S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl. 138 (2004), 109-124.
- [16] H. Fast y S. Swierczkowski, *The new Scottish book*, Wrocław, 1946-1958.
- [17] S. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, II, 2. éd., Jules Tannery, Hermann, Paris 1910 (Appendix).
- [18] C. L. Hagopian, *Fixed-point problems in continuum theory*, Contemporary Math. 117 (1991), 79-86.
- [19] C. L. Hagopian, *Irreducible continua without the fixed-point property*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 51 (2003), 121-127.
- [20] C. L. Hagopian, *An update on the elusive fixed point property*, Open Problems in Topology II, Elliott Pearl (Ed.), 263-277, Elsevier B. V., Amsterdam, 2007.
- [21] C. L. Hagopian y R. Mańka, *Rational irreducible plane continua without the fixed-point property*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 617-625.
- [22] G. Higuera y A. Illanes, *Fixed point property on symmetric products*, manuscrito.
- [23] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel medio, 28, 2004.
- [24] A. Illanes, *Modelos de Hiperespacios*, Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios, R. Escobedo, S. Macías y H. Méndez, eds., Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel medio, 31, 2006, 153-194.
- [25] A. Illanes, *A tree-like continuum whose cone admits a fixed-point-free map*, Houston J. Math. 33 (2007), 499-518.
- [26] A. Illanes, *Hyperspaces of continua*, Open Problems in Topology II, Elliott Pearl (Ed.), 279-288, Elsevier B. V., Amsterdam, 2007.
- [27] A. Illanes, *A tree-like continuum whose hyperspace of subcontinua admits a fixed-point-free map*, Topology Proc. 32 (2008), 55-74.

- [28] A. Illanes, *Fixed point property on symmetric products of chainable continua*, Comment. Math. Univ. Carolin.
- [29] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1999.
- [30] S. Kinoshita, *On some contractible continua without the fixed point property*, Fund. Math. 40 (1953), 96-98.
- [31] B. Knaster, K. Kuratowski y S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), 132-137.
- [32] R. J. Knill, *Cones, products and fixed points*, Fund. Math. 60 (1967), 35-46.
- [33] W. Lewis, *Continuum theory problems*, Topology Proc. 8 (1983), 361-394.
- [34] V. Martínez de la Vega, *New irreducible plane continua without the fixed point property*, Topology Proc. 36 (2010).
- [35] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets, A text with research questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.
- [36] S. B. Nadler, Jr., *The fixed point property for continua*. Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts] 30. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2005.
- [37] S. B. Nadler, Jr. y J. T. Rogers, Jr., *A note on hyperspaces and the fixed point property*, Colloq. Math. 25 (1972), 255-257.
- [38] J. Oledzki, *On symmetric products*, Fund. Math. 131 (1988), 185-190.
- [39] N. Ordóñez Ramírez, *Encajes, productos simétricos y modelos de hiperespacios*, Tesis de Maestría, Posgrado en Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Directora de tesis: Verónica Martínez de la Vega y Mansilla, 2009.
- [40] J. T. Rogers, Jr., *The cone = hyperspace property*, Canad. J. Math. 24 (1972), 279-285.

- [41] J. T. Rogers, Jr., *Hyperspaces of arc-like and circle-like continua*, Topology Conference (V. P. I and S. U., 1973), Lecture Notes in Math. vol. 375, Springer-Verlag, New York, 1974, R. F. Dickman and P. Fletcher, Editors, 231-235.
- [42] J. T. Rogers, Jr., *Tree-like curves and three classical problems*, Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed, editors, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokio, (1990), 303-310.
- [43] M. Sobolewski, *A curve with the fixed point property whose cylinder admits a fixed point free map*, Houston J. Math. 31 (2005), 239-253.
- [44] J. F. Tenorio Arvide, *Productos tipo disco y funciones inducidas a suspensiones de productos de continuos*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Director de tesis, Raúl Escobedo, 2007.
- [45] P. I. Vidal Escobar, *Los hiperespacios de continuos desde el punto de vista de sus modelos geométricos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Director de tesis, Enrique Castañeda Alvarado, 2009.