

Las formas en la Naturaleza: una cosa es describirlas y otra es explicarlas

Faustino Sánchez Garduño

y

Pedro Miramontes

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),
Ciudad Universitaria,
México, 04510, D.F., México.

faustino@servidor.unam.mx y pmv@ciencias.unam.mx

Resumen

En este artículo se presentan algunos de los mecanismos físicos y químicos subyacentes a la emergencia de patrones en la Naturaleza y se contrasta este esquema con los intentos de explicación de los mismos basada en los procesos de adaptación por medio de la selección natural. Se muestra como ejemplo un sistema en el que, debido a procesos endógenos, exhibe estructuras espaciales ordenadas. También se discute la noción de *propiedad protegida* de la materia como un esfuerzo hacia la unificación de diversas ramas de la Ciencia que permite ubicar a sistemas diferentes dentro de una misma clase atendiendo a las propiedades cualitativas que comparten de manera independiente a su constitución material.

1. Introducción

“Sobre todo las obras americanas (los textos de biología) insisten hasta el fastidio en la vida de la lombriz, de la rana, del perro, etcétera, ocupando con esto la mayor parte de las páginas disponibles y despreciando lo que más importa: las leyes generales de la existencia, la unificación de las ciencias naturales a la luz de los últimos descubrimientos y teorías,

que dan la vida a todo cuanto existe.

Alfonso L. Herrera (1868-1943)

El Mundo, la Naturaleza, el Universo entero, son un hervidero de formas y colores, de patrones y estructuras; hacia donde se dirija la mirada, se encuentran pautas geométricas con patrones discernibles que de ninguna manera se pueden confundir con el azar pero tampoco con los cuerpos geométricos perfectos que se enseñan en la escuela. Esta afirmación es igualmente válida tanto para el mundo vivo, como para el inerte.” La sola observación de tal diversidad de regularidades, nos conduce a hacernos infinidad de preguntas. Entre otras muchas: ¿por qué los vertebrados tienen simetría bilateral? ¿por qué en el pelambre de los felinos sólo existen franjas y motas? ¿por qué en algunos reptiles se dan transiciones en sus patrones de coloración entre las que se incluyen franjas compuestas de motas en la cola, a sólo motas en el resto de su cuerpo? También, en el universo inanimado la diversidad de patrones es pasmosa. Por ejemplo, las regularidades observadas en las dunas del desierto nos hablan de que la sola interacción del viento con la arena que lo forman, es capaz de generar ondas cual si se tratase de un fluido. Igualmente impactantes son los patrones de coloración que aparecen en algunas reacciones químicas en las que, debido sólo a mecanismos internos, se forman frentes que viajan y cuya geometría es perfectamente reconocible: círculos concéntricos, espirales, etcétera.

Este breve recuento de regularidades observables nos conduce a una pregunta de mayor envergadura: ¿Dónde encontrar la explicación de estas maravillas? En algunas épocas poca gente dudaba que todo lo existente en la Naturaleza era obra divina. Pero aún en los tiempos de mayor fervor religioso, siempre ha habido y habrá quienes desconfíen de las verdades oficiales. La curiosidad, el escepticismo y la crítica son algunos de los ingredientes que distinguen a las religiones de la ciencia y uno de los quehaceres más relevantes de ésta es encontrar la explicación del origen de las cosas y de los procesos del Universo.

En estos días, toda proporción guardada, el fervor se inclina hacia la explicación de que forma, estructura y función de los seres vivos han surgido mediante el proceso de evolución por selección natural. El enunciado de Charles Darwin tiene indudable valor pues sacó la discusión de la transformación de las especies del ámbito de las parroquias hacia las aulas universitarias. Sin embargo, hay un aspecto de la evolución que no ha podido explicar y ese es precisamente el origen de las formas vivas.

Existe una visión alternativa encarnada por visionarios que se ade-

lantaron a su época. Este otro camino es buscar dicho origen simplemente en las leyes de la Naturaleza sin necesidad de recurrir a deidades, ya sean de naturaleza divina o laica. Así, el objetivo de este artículo es hacer una presentación conceptual de algunos mecanismos morfo-genéticos. Para ello tomamos partido e, inspirados en la larga tradición intelectual de la morfología racionalista, adoptamos una visión científica que tiene como fundamento el análisis de los modelos matemáticos que son la expresión formal de las leyes fisicoquímicas subyacentes a la emergencia de patrones en la naturaleza, ya sea en sistemas vivos o no vivos.

2. Describir no es explicar

“En la biología del desarrollo, ¿cómo pueden ellos (los biólogos) resolver un problema que aún no pueden formular?”

René Thom (1923-2002)

Desde la aparición de la teoría de la evolución por selección natural, se acepta casi acríticamente que las formas que vemos en los organismos son el resultado de un proceso histórico de diversificación mediante la adaptación de algunos antepasados, los que a su vez se originaron de otros antepasados primitivos y así echando a andar el tiempo hacia atrás, hasta el origen de la vida. Esta teoría, de suyo simple, no es capaz de explicar los orígenes y las particularidades de las formas; *describe* hechos pero no los explica (Goodwin; 1994).

D’Arcy W. Thompson lo pone en los siguientes términos:

“El hecho de que muchas formas biológicas parecen seguir reglas matemáticas o geométricas sencillas, indica que la existencia de fuerzas de constricción en su crecimiento es una explicación más parsimoniosa que la selección natural.”

Alfonso L. Herrera, desde los corredores del Colegio de San Ildefonso en la Ciudad de México y D’Arcy Wentworth Thompson, en los de la Universidad de St. Andrews en Escocia, incomprensidos en su tiempo y desdeñados hoy, nos ilustran con sus opiniones. Dice Thompson:

“Las olas del mar, las pequeñas ondulaciones en las ribe-ras, la curva que se desvanece entre las arenas de una bahía y las dunas, el perfil de las colinas, la forma de las nubes, todo ello son enigmas de la forma, problemas de morfología

y todas ellas son, en mayor o menor grado, estudiadas y resueltas por los físicos... y no es diferente con las formas materiales de los seres vivos. Tejido y célula, concha y hueso, hoja y flor, son asimismo parte de la materia y es obedeciendo a las leyes de la física que sus partes se han formado, ajustado y configurado.”

Se puede alegar que las formas que vemos en los organismos son hereditarias. Efectivamente, lo son y la genética juega su papel, pero el puente entre la acción de los genes y el mundo de las formas es sumamente complicado y lo único que se puede afirmar es que un rasgo fenotípico no tiene una relación uno a uno con un gen. Las formas de los organismos son el resultado de los genes *más* las leyes y principios que se originan por la acción colectiva de éstos.

3. Morfogénesis y simetrías

El mundo que nos rodea está gobernado por leyes naturales. Uno de los aspectos más notables de éstas, es su capacidad para permitir la emergencia de formas discernibles y coherentes en donde antes se tenía uniformidad a escala macroscópica. Cuando un medio homogéneo e isotrópico pierde estas condiciones para adquirir una dirección preferente o un estado heterogéneo con una geometría bien definida, se dice que hubo una *ruptura de simetría*. Existe una gran cantidad de ejemplos de rupturas de simetría en la Naturaleza, vamos a mostrar un par de ellos.

Un material ferromagnético, un imán, que se encuentre por encima de una temperatura crítica (el punto de Curie) tendrá desordenados los momentos orbitales de sus electrones y el resultado es que se cancelarán entre ellos y el material no tiene propiedades magnéticas macroscópicas. Sus componentes apuntan en todas las direcciones en cada momento y el resultado es un material homogéneo y uniforme. Si se hace descender la temperatura por debajo del punto de Curie, los momentos angulares orbitales de los electrones se alinean todos en la misma dirección y surge como propiedad emergente la magnetización del cuerpo. Aparece también una dirección privilegiada que es la del eje de los polos del imán.

El segundo ejemplo proviene de la biología y nos acerca más al propósito de este trabajo. En la la Figura 1 se representa un óvulo fecundado (no es importante la especie particular). Como se sabe, la célula se divide en dos, después en cuatro y luego en ocho, dieciséis,

treinta y dos y así sucesivamente hasta que en un momento dado tenemos un conglomerado esférico hueco de células que recibe el nombre de blástula. En seguida ocurre un proceso de cambio geométrico espectacular del embrión: en un polo de la blástula ocurre una invaginación; es decir, la superficie de la esfera se mete al hueco interno y forma una segunda capa en el interior de la misma. Imaginemos que la blástula es una esfera platónica perfecta. Dicho cuerpo tiene tres grados de simetría: es simétrica con respecto a un punto, su centro, con respecto a cualquier línea que pase por su centro y con respecto a cualquier plano que pase por su centro. Tiene pues, tres grados de simetría. No existe un experimento físico que nos permita dilucidar si la esfera está en reposo o si se encuentra girando. Para determinarlo, tendríamos que ponerle una marca a la esfera y, por lo tanto, sacrificar al menos un grado de simetría. Este ejemplo es muy esclarecedor: se gana información a cambio de una pérdida de simetría. En el embrión la cascada de pérdidas de simetría a partir de la blástula culmina con un organismo que únicamente preserva una de las tres simetrías originales, la simetría bilateral (si el organismo es un cordado). Este ejemplo es interesante pues muestra dos tipos diferentes de rupturas de simetría: la ruptura geométrica ya descrita y una ruptura funcional pues después de la blástula ocurre la gastrulación y las células comienzan a diferenciarse funcionalmente para terminar eventualmente siendo parte de alguno de los diferentes tejidos específicos del organismo.

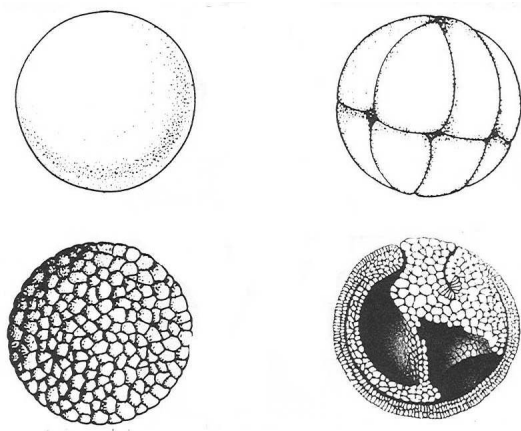


Figura 1: Desarrollo de un embrión. Ver el texto.

La pregunta pertinente en este momento, y de hecho el punto medular de la morfogénesis, sería: ¿Qué mecanismos desencadenan la ruptura de simetría y por lo tanto la diferenciación espacio-funcional en un em-

brión? Está de moda, en algunos círculos académicos, atribuir todo lo que sucede en el mundo vivo a la acción de los genes. Este reduccionismo extremo no soporta un análisis simple pues hay multitud de ejemplos de rasgos fenotípicos que no están cifrados en los genes. Para dar un ejemplo: el número y tipo de conexiones sinápticas entre las neuronas de la corteza cerebral es muchas órdenes de magnitud superior a la información que un genoma entero puede contener. Se argumenta que la ausencia o defecto de tal o cual gen provoca un cierto desorden o enfermedad y esto es cierto, al igual que es verdad que un automóvil sin una pieza determinada se descompone sin que ello implique que esa pieza explique el funcionamiento del auto en su totalidad.

En la década de los años cincuenta del siglo pasado, el matemático inglés Alan M. Turing (1912-1954) propuso un mecanismo interesante:

“Se sugiere que un sistema de sustancias químicas, llamadas *morfógenos*, reaccionando y difundándose a través de un tejido, es el adecuado para describir el principal fenómeno de la morfogénesis. Tal sistema, aunque puede estar originalmente bastante homogéneo puede, más tarde, desarrollar un patrón o estructura debido a una inestabilidad del equilibrio homogéneo la cual es disparada por una perturbación al azar.”

En pocas palabras, un embrión perdería la simetría esférica y comenzaría a seguir los pasos que lo llevarían a su forma final con simetría bilateral debido a que diferentes células estarían en contacto con morfógenos a distintas concentraciones.

Todo esto suena muy bien, salvo porque nadie había visto que un conjunto de compuestos químicos en solución pudieran tener una distribución espacial heterogénea.

4. Un poco de historia o la onda desdeñada

Aquí entra en escena una personalidad que no fue reconocida en su época pero cuyo nombre se encuentra ahora asociado a un mecanismo químico que da respuesta al cuestionamiento con que finaliza la sección anterior. Nos referimos a Boris Pavlovich Belousov ¹.

¹Boris P. Belousov fue uno de los cinco hijos de una familia rusa ordinaria. Su padre, un cuidador de libros en una empresa privada. La adolescencia y la juventud de Boris transcurrieron en medio de dos grandes acontecimientos: la primera guerra



Figura 2: Boris Pavlovich Belousov (1893-1970).

A finales de los años cuarenta del siglo pasado, la Unión Soviética se encontraba devastada después de la Gran Guerra Patria. Podemos imaginar que las condiciones materiales en las que trabajaba un bioquímico como Belousov distaban de tener un buen apoyo económico. Posiblemente sea esta la razón que estimuló el ingenio de Belousov y lo llevó a una idea genial.

Belousov estudiaba el ciclo de Krebs. Es una cascada de reacciones químicas muy importante por, al menos, dos razones: por una parte, es el conjunto de reacciones que llevan a la producción de energía de casi todos los seres vivos y, segundo y más importante para nuestros propósitos, se trata de una reacción química periódica. Belousov quería diseñar una reacción que reprodujera *in vitro* los aspectos periódicos del ciclo de Krebs pero empleando reactivos más fáciles y baratos de obtener pero que tuviesen características semejantes a los del ciclo de Krebs.

mundial y la revolución soviética. Un ambiente en el que se discutía sobre las profundas transformaciones sociales en su país, seguro influyó en el pensamiento del joven Belousov. Se dice que posiblemente el primer interés que tuvo en la química, fue la construcción, junto con su hermano mayor, de una bomba con la intención de matar al zar Nicolás III. A raíz de la ola represiva que siguió al primer intento fallido de la revolución rusa en 1905, la familia Belousov fue arrestada. Tras ser liberados, fueron obligados a salir de Rusia y se marcharon a Suiza. Boris hizo sus estudios en química en Zurich. Una vez empezada la primera guerra mundial, los Belousov regresaron a Rusia y Boris empezó a trabajar como químico para el ejército con un grado equivalente a coronel. Después de que se jubiló, empezó a trabajar como jefe del laboratorio de biofísica adjunto al Ministerio Soviético de Salud. Fue en este lugar en el que realizó los experimentos que le llevaron a descubrir las oscilaciones químicas motivo de esta sección.

4.1. El metabolismo en un tubo

Los resultados sorprendieron al bioquímico soviético. La solución efectivamente hacía ciclos rítmicos a medida que el tiempo avanzaba. En aproximadamente un minuto, el color amarillo inicial de la solución se diluye y ésta se vuelve incolora para después regresar al amarillo y exhibir así oscilaciones temporales en su coloración. La Figura 3 ilustra las oscilaciones temporales en la concentración de los iones de bromo.

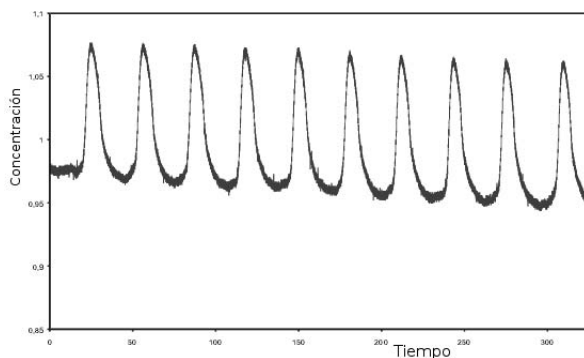


Figura 3: Las oscilaciones temporales de la reacción de Belousov.

4.2. La triste historia²

En 1951, Belousov escribió y envió para su publicación el trabajo *Una reacción periódica y sus mecanismos*, a una revista rusa especializada. Los árbitros lo rechazaron diciendo que las oscilaciones “eran imposibles” y calificaron el trabajo de “un fraude obvio o el producto de una gran incompetencia”. La razón técnica esgrimida para rechazarlo fue: “las reacciones químicas deben evolucionar hacia su equilibrio termodinámico”. El rechazo no desanimó a Belousov quien dedicó otros seis años para afinar la técnica de sus experimentos. En 1957 volvió a escribir un nuevo reporte y lo envió a otra revista. La suerte que corrió fue la misma: tampoco fue aceptado para su publicación. En esta ocasión, los árbitros agregaron a la evaluación del reporte la recomendación: “antes de que sus experimentos sean considerados para su publicación, Belousov debe demostrar a satisfacción de los teóricos el error de sus conceptos”. Esta vez el rechazo provocó amargura en Belousov quien decidió ya no dedicarse más a la ciencia y menos aún compartir sus resultados.

²Las siguientes secciones están basadas en [11].

4.3. Para fortuna de lo no lineal

Si nadie más se hubiera enterado de la reacción de Belousov, seguramente el desarrollo de la dinámica no lineal en química, se habría retrasado algunos años. Por suerte esto no fue así pues a mediados de la década de los 50 el bioquímico, también soviético, S. E. Shnoll, interesado en los procesos periódicos en bioquímica, se reunió con Belousov y quiso persuadirlo, sin éxito, para que continuara su trabajo. Lo que sí logró, fue que Belousov le diera la receta de la reacción y que aceptara publicar el reporte en el anuario de 1958 sobre radiobiología... esta vez sin tener que pasar por arbitraje alguno.

Tiempo después, ocurrió un hecho afortunado para la historia de esta reacción. En 1961, Shnoll empezó a asesorar a un estudiante de posgrado cuyo apellido, añadido al de Belousov, posteriormente le daría nombre a esta celebrada reacción: Anatoly Zhabotinsky. Schnoll le encargó que investigara en detalle los mecanismos de la reacción. Para esto, Zhabotinsky reemplazó algunos de los reactivos a fin de obtener colores que fueran más contrastantes. En vez de las oscilaciones de Belousov (amarillo-incoloro-amarillo), él obtuvo oscilaciones rojo-azul-rojo. El rojo y el azul conmutan con un periodo aproximado de un minuto, las oscilaciones duran aproximadamente hasta dos horas, al cabo de las cuales el sistema se va monótonamente a su estado de equilibrio químico. Zhabotinsky no sólo cumplió con la tarea asignada, sino que fue más allá al ser el primero en averiguar el efecto que producía la dimensión del espacio en el que la reacción se efectuaba en la formación de los patrones químicos. Así, además de variar otros factores, la reacción se reprodujo en dos y tres dimensiones. Lo observado fue impresionante, pero sobre todo, permitió establecer importantes analogías con otros sistemas sobre los cuales no se puede experimentar con la facilidad que ofrece éste.

Los trabajos de Belousov y Zhabotinsky fueron difundidos en occidente por Arthur Winfree (1972) quien, en 1968, estando en Praga en un simposio sobre osciladores biológicos y bioquímicos supo, a través de Zhabotinsky, de la existencia de la ahora afamada reacción.

Con seguridad que Belousov jamás pensó que la reacción ideada por él se convirtiera con el tiempo en el paradigma de muchos fenómenos no lineales en química, física y biología teórica. Es un claro ejemplo de que es perfectamente posible obtener patrones geométricos a partir “de la nada”. En otros términos; que bajo condiciones dadas, ocurren rupturas de simetría que, a su vez, dan lugar a estructuras espaciales discernibles. Todo esto vino a romper la idea, tan natural e intuitiva como equívoca, de que una reacción química dejada a su libre evolu-

ción tendría que derivar monótonamente al equilibrio. La reacción de Belousov y Zhabotinsky (“B-Z”, de aquí en adelante), oscilatoria y generadora de patrones, existe y por lo tanto tiene por necesidad que ser obediente de las leyes de la Naturaleza. La reacción B-Z ilustra la posibilidad de generar orden a partir del desorden. Muchos académicos estudiosos de la evolución biológica argumentan que el único mecanismo que tiene esa capacidad es la selección natural, ya veremos que no es así.

La molestia que la emergencia espontánea de patrones generó en algún tiempo entre la comunidad biológica, por ir aparentemente en contra de la segunda ley de la termodinámica, se ha esfumado, quizá no del todo como sería deseable, gracias a la teoría de los sistemas disipativos que le valió el Premio Nobel al químico belga de origen ruso Ilya Prigogine (Kondepudi and Prigogine; 1998). Ahora sabemos que los sistemas termodinámicamente abiertos pueden generar orden (ir en contra de la segunda ley) localmente a expensas de aumentar la entropía de su entorno.

5. Patrones bidimensionales

Muchos estudios experimentales para observar el comportamiento ondulatorio en los sistemas de B-Z han sido realizados en delgadas películas confinadas en cajas de Petri. En esos casos el sistema es bidimensional. Dependiendo de las condiciones en las que la reacción se lleve a cabo, aparecen diferentes patrones espaciales.

Por ejemplo, si en un punto se inicia la onda, se genera una onda circular que se expande. Si se estimula de forma periódica, aparece una serie de anillos concéntricos, también propagándose. Estos patrones son los llamados tipo *blanco* u *objetivo*.

Un patrón tipo “blanco” puede romperse con sólo inclinar levemente la caja de Petri en la que se lleva a cabo la reacción. Una vez que uno de los círculos expandiéndose se rompe, cada uno de sus dos extremos se enrolla en sentido opuesto originando otro patrón: dos *espirales rotando* en sentido encontrado. En la Figura 4 se muestra uno de estos patrones.

6. Patrones en tres dimensiones

Si la condición de que sean películas muy delgadas en la sección anterior (de hecho, basta que el grosor de la capa sea mayor que la longitud de onda de las ondas de concentración) no se cumple, estaremos ante un

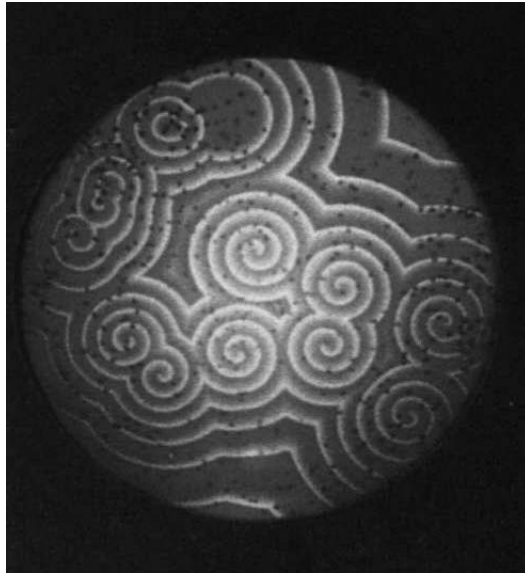


Figura 4: Reacción B-Z en un plato de Petri.

sistema tridimensional.

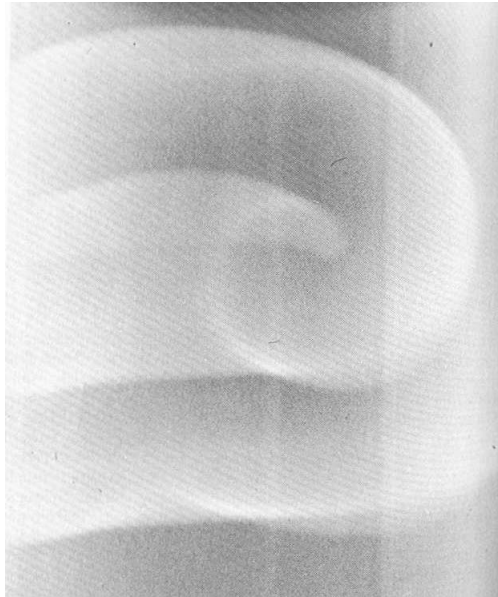


Figura 5: Reacción B-Z en tres dimensiones.

El lector puede hacerse una idea del patrón espacial que se forma, si considera la onda enrollada mencionada líneas atrás y uno de sus extremos de forma similar a como se construye un toro o una dona, con la peculiaridad de que, en este caso, la superficie no es cerrada. De esta manera, se

origina una *onda enrollada toroidal*. En la Figura 5 se ve una onda química como la descrita.

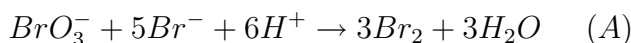
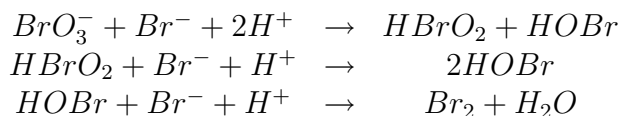
7. Los mecanismos de la reacción de B-Z

Hasta aquí hemos ofrecido una descripción, tanto de los orígenes de la reacción B-Z, como de los distintos patrones espaciales que en ella aparecen. Hemos abundado en las evidencias experimentales. Ahora queremos llamar la atención hacia los aspectos un tanto más técnicos de la afamada reacción. Nos referimos a sus mecanismos, así como a algunos modelos matemáticos que se han construido para su estudio.

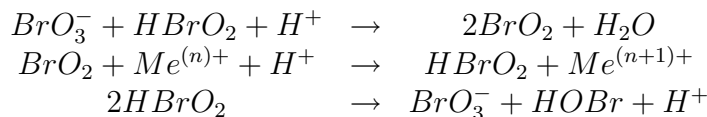
7.1. La química

En 1972, Field, Körös y Noyes, publicaron un trabajo (Field *et al*; 1972) en el que proponen un mecanismo de la reacción de Belousov-Zhabotinsky. El efecto total de esta reacción, es una oxidación catalítica de ácido malónico en una solución acidificada de bromato. El catalizador en esta reacción es un ión metálico, normalmente Fe^{2+} o cerio Ce^{3+} .

El mecanismo FKN, como es llamado comúnmente, consiste de tres procesos. En el paso *A*, compuestos que contienen bromo intercambian átomos en una serie de reacciones de oxidación-reducción. El proceso es iniciado por la reacción de iones de bromato con iones de bromuro:

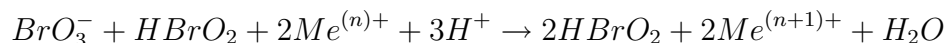


En el proceso *B*, el bromato reacciona inicialmente con $HBrO_2$ en lugar de hacerlo con Br^- :

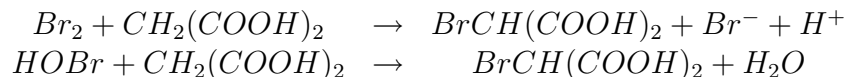




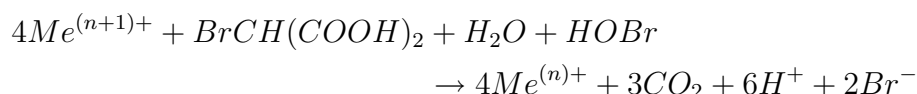
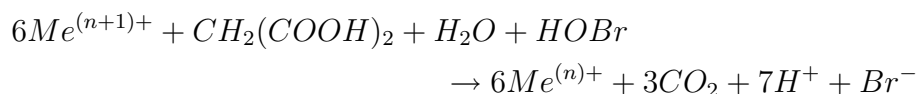
El proceso *B* libera el ion de metal en el estado reducido, $Me^{(n)+}$ para oxidar el dióxido de bromo a ácido bromoso, $HBrO_2$. Note que la producción de ácido bromoso en el proceso *B* es autocatalítico:



Los procesos (*A*) y (*B*) representan rutas alternativas para convertir los iones de bromato en Br_2 o $HOBr$, los cuales pueden convertir el ácido malónico (*MA*) en ácido bromomalónico (*BrMA*):



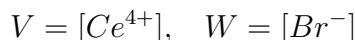
Similarmente, el *BrMA* puede ser bromizado a Br_2MA . En el proceso *C*, la forma oxidada del ion metal, $Me^{(n+1)+}$, oxida los ácidos orgánicos:



Así ambos, *MA* y *BrMA*, sirven como sumidero para los átomos de bromo y como fuentes de los iones de bromuro.

De acuerdo con Field y sus colaboradores, las oscilaciones de la reacción B-Z ocurren debido a la competencia entre los procesos *A* y *B*. Las sustancias intermedias Br^- y $HBrO_2$ compiten con el BrO_3^- . El Br^- y el $HBrO_2$ no pueden estar presentes simultáneamente a una concentración apreciable por que reaccionan rápidamente uno con otro. Luego, si el Br^- está en exceso, entonces $HBrO_2$ será llevado a una baja concentración (esto por la segunda reacción del primer bloque) y los iones de bromato serán reducidos por el proceso *A*; mientras si $HBrO_2$ está en exceso, entonces Br^- será eliminado, también por la segunda reacción del primer bloque y los iones de bromato serán reducidos por el proceso *B*. Más detalles sobre el mecanismo FKN, pueden ser consultados en el trabajo de Keener y Tyson (1986) o bien en la revisión

de Tyson (1994). Para los fines de esta presentación, basta decir que un análisis de la cinética, puede hacerse a través de un modelo deducido por Field y Noyes (1974) que, no obstante su relativa sencillez, captura mucho de las cualidades de la reacción de B-Z. Se trata de una versión simplificada del mecanismo FKN. A fin de presentarla, introduzcamos la siguiente notación

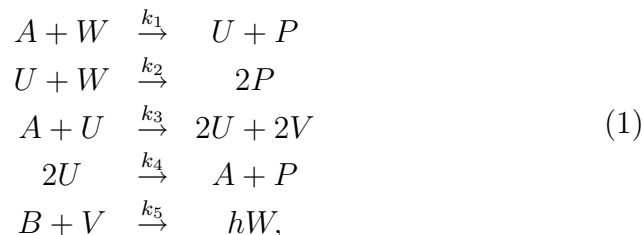


$k_i \equiv$ constante de velocidad con $i = 1, \dots, 5$

$h \equiv$ parámetro estequiométrico

$B \equiv$ ácido bromomalónico + ácido malónico.

Field y Noyes (1974) identificaron las reacciones importantes. Éstas tienen la siguiente representación:



donde se supone que A y B se mantienen constantes.

7.2. El modelo matemático para la reacción homogénea

Al usar la ley de acción de masas en el conjunto de reacciones (1), se deduce que la dinámica de la concentración de los reactivos está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales³:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= qw - uw + u(1 - u) \\ \dot{v} &= u - v \\ \varepsilon' \dot{w} &= -qw - uw + fv, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $u = (2k_4)/(k_3A)U$, $v = [k_4k_5B/(k_3A)^2]V$, $w = [k_2/k_3A]W$, $t = k_5B \cdot \text{tiempo}$, $\varepsilon = k_5B/k_3A$, $\varepsilon' = 2k_4k_5/k_2k_3A$, $q = 2k_1k_4/k_2k_3$ y $f = 2h$.

³En la literatura a este sistema es llamado el *Oregonator*, quizás corresponde a la contracción de la frase en inglés *Oregon oscillator*, por ser un grupo de trabajo de la Universidad de Oregon quien lo propuso.

A mitad de la década de los ochentas, hubo un debate sobre el valor que deberían tomar las constantes de velocidad y los demás parámetros que aparecen en el esquema propuesto. Actualmente, uno encuentra tales valores en la literatura.

John Tyson hizo notar que el parámetro ε' era muy pequeño. De hecho, que las siguientes relaciones de orden se satisfacen $\varepsilon' \ll \varepsilon \ll 1$ y $\varepsilon' < q \ll 1$. En ese caso, es razonable suponer que el reactivo w se encuentre en equilibrio por lo que $\varepsilon' \dot{w} = 0$ de donde

$$w = \frac{fv}{(u + q)}.$$

La observación anterior hace que la matemática se simplifique. Así, la tercera ecuación del sistema (2) se transforma en una algebraica y por tanto, éste se convierte en uno con sólo dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= u(1 - u) - fv \frac{u - q}{u + q} \\ \dot{v} &= u - v. \end{aligned} \tag{3}$$

7.3. Un resumen de los resultados

Las ceroclinas del sistema (3) son la gráfica de la función

$$v = \frac{u(1 - u)(u + q)}{(u - q)f}$$

y la recta de pendiente uno $v = u$. La Figura 6 las ilustra.

El origen de coordenadas es un punto de equilibrio del sistema (3); el otro, situado en la región de interés químico, corresponde al punto del primer cuadrante en el que las ceroclinas se intersectan. Luego, obteniendo la solución del par de ecuaciones que definen a las ceroclinas, uno puede convencerse de que el punto $P = (u^*, u^*)$, donde

$$u^* = \frac{1}{2} \left\{ (1 - q - f) + \sqrt{(1 - q - f)^2 + 4(1 + f)q} \right\},$$

es un punto de equilibrio de (3).

Dado q , el comportamiento cuantitativo de la segunda ceroclina sólo depende del parámetro f el cual, a su vez, determina la forma en la que ambas ceroclinas se intersectan. Puede probarse (véase Tyson; 1994) que sólo hay tres formas cualitativamente diferentes de intersección. Éstas se muestran en la Figura 7. A continuación ofrecemos una versión resumida de la dinámica asociada a cada una de ellas. Más detalles pueden encontrarse también en (Tyson; 1994).

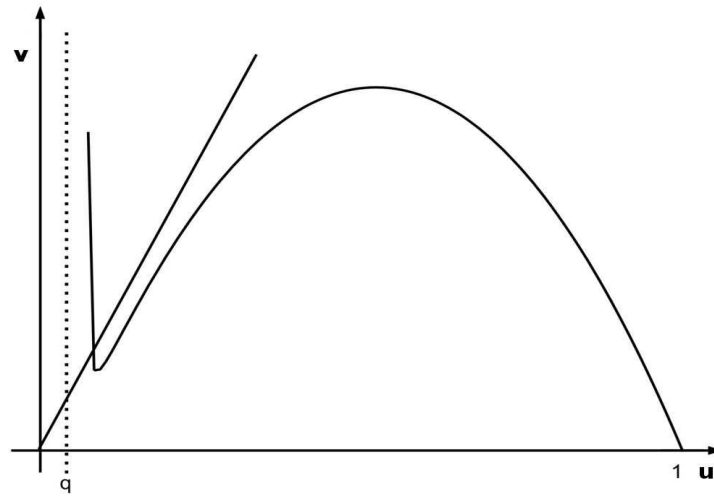


Figura 6: Las ceroclinas del sistema (3).

1. Si $0 < f < 0.5$, el punto de equilibrio P es un *atractor* en la región de interés por lo que, cualquiera que sea el valor inicial de las concentraciones, las sustancias se estabilizan a un valor constante e igual a $u = u^*$ y $v = u^*$ cuando el tiempo crece más allá de toda cota. Véase la Figura 7(a).
2. Si $0.5 < f < 2.414$, tiene lugar un comportamiento oscilatorio periódico en las concentraciones cuya amplitud y periodo son aproximadamente

$$\text{Amplitud} = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})4q}$$

y

Periodo =

$$k \left\{ \ln \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2} - f)4q} + \frac{2f - 1}{1 - f} \ln \frac{2f - 1}{2f} + \frac{1}{1 - f} \ln 2 \right\}$$

Otra forma equivalente de decir que las concentraciones son funciones periódicas y del mismo periodo, es la siguiente: el sistema (3) tiene una trayectoria cerrada aislada, es decir, un *ciclo límite*. Véase la Figura 7(b).

3. Si $2.414 < f < \infty$, la dinámica del sistema (3) exhibe el fenómeno de *excitabilidad*⁴. Dicho sucintamente, éste se caracteriza como sigue. Si se hace una perturbación pequeña al equilibrio es decir, si se consideran concentraciones iniciales cercanas al valor del equilibrio, el sistema regresa a él. Esto ocurre con la trayectoria que en la Figura 7(c) empieza en el punto A. Otra es la situación si la perturbación es “suficientemente grande”. En este caso, las concentraciones cambian al transcurrir el tiempo pero lo hacen de tal manera que, después de realizar un “viaje largo”, finalmente regresan al equilibrio. Véase la trayectoria que empieza en el punto B en la Figura 7(c). Lo anterior nos habla de la existencia de un *umbral* para las perturbaciones por debajo del cual las trayectorias del sistema regresan inmediatamente al equilibrio; mientras que por arriba, la perturbación no solo no se extingue, sino que se amplifica pero eventualmente el sistema vuelve al equilibrio. Otra característica de los sistemas excitables es que son *refractarios* es decir, mientras está excitado no responde a otra perturbación; sólo puede volverse a excitar cuando regrese a su estado de equilibrio. La dinámica asociada a la excitabilidad se ilustra en la Figura 7(c).

En Tyson (1985) el lector encontrará una presentación elemental de estos temas.

7.4. La componente espacial en los modelos

La dispersión de las ondas de concentración a través del espacio, es una de las características dinámicas de la reacción B-Z. Esto obliga a incorporar el factor difusivo en los modelos y, de esta manera, estar en condiciones de hacer una descripción más apegada a lo que ocurre.

La difusión de sustancias queda descrita por la *ley de Fick*, según la cual una sustancia que se difunde libremente, lo hace desde sitios donde su concentración es alta, hacia lugares donde está poco concentrada. En otras palabras, el flujo es en dirección opuesta al gradiente de la concentración. La incorporación del factor difusivo en el sistema (3) conduce a un par de ecuaciones diferenciales parciales no lineales conocidas en la literatura matemática con el sugestivo nombre de *ecuaciones de reacción-difusión*. Helas aquí:

⁴Los sistemas excitables tienen la propiedad de permitir la transmisión de ondas pero una vez que una de ellas ha pasado, es necesario que transcurra un lapso refractario antes de que la siguiente onda pueda transmitirse.

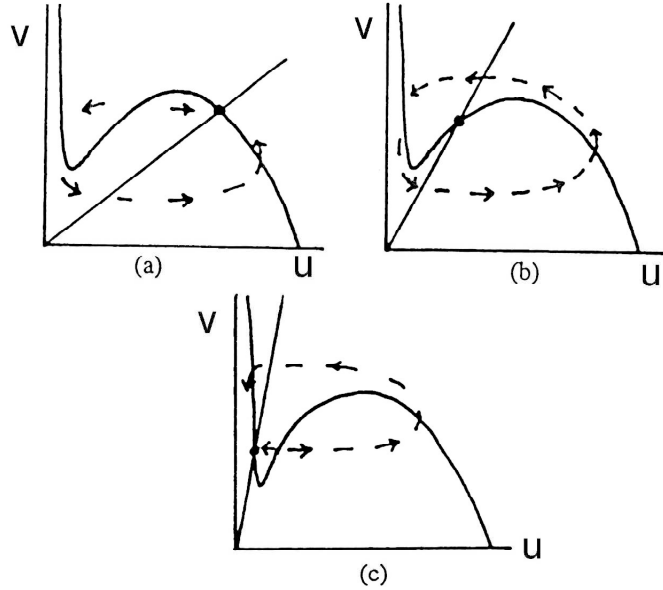


Figura 7: Posibles dinámicas en el sistema 3: a) Un atractor para $0 < f < 0.5$. b) Un ciclo límite para $0.5 < f < 2.414$. c) Excitabilidad para $2.144a < f < \infty$.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon^2 \nabla^2 u + u(1-u) + f v \frac{u-q}{u+q} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon \nabla^2 v + u - v, \end{aligned} \quad (4)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano, cuya forma en coordenadas rectangulares para un espacio de dos dimensiones, es:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

En el sistema (4) se considera que ambas sustancias se difunden con la misma razón⁵ e igual a ε .

La evidencia experimental descrita en las secciones anteriores, además de mostrarnos la riqueza de patrones que aparecen, también guía de forma inequívoca la búsqueda de soluciones para el sistema (4).

Estructuras ordenadas que emergen sin la participación de factores externos, es decir, que son el resultado de mecanismos intrínsecos de los propios sistemas (*patrones autoorganizados*), como las recordadas ahora, pueden ser representados matemáticamente⁶. La búsqueda de

⁵Formalmente, esto se logra reescalando convenientemente la variable espacial.

⁶Por ejemplo, si uno está interesado en averiguar las condiciones bajo las cuales

condiciones bajo las cuales sistemas de reacción-difusión como (4) admiten tal tipo de soluciones, así como determinar la velocidad con la que éstas se propagan y la frecuencia con la que rotan ha sido, entre muchos otros, un problema al que han dedicado su trabajo algunos científicos. En los últimos años, se ha encontrado fuerte evidencia de la existencia de un *atractor extraño* subyacente a los *regímenes caóticos* de la reacción B-Z (véase Roux *et al*; 1983). La discusión de los aspectos técnicos que hay alrededor de estas cuestiones, rebasa las intenciones de este escrito. Baste decir que el tratar de responder las preguntas recién planteadas, ha conducido a diversidad de problemas: desde cuestiones matemáticas muy abstractas, hasta otros de tipo numérico que surgen cuando se pretenden obtener soluciones numéricas (soluciones aproximadas) para dichas ecuaciones. Los análisis realizados arrojan resultados muy alentadores y dan la certeza de que tales modelos capturan aspectos esenciales de las reacciones B-Z. Algunos de los resultados pueden consultarse en (Keener y Tyson; 1986, Murray; 1989, Tyson; 1985 y Tyson; 1994).

8. La relevancia

Una vez analizados tanto la reacción como el modelo B-Z cabe preguntar qué tienen que ver con el proceso evolutivo. Ya en secciones anteriores habíamos comentado que en la línea tradicional del neodarwinismo no encuentra solución el problema del origen de las formas vivas. Lo que hemos hecho hasta aquí ha sido mostrar un caso concreto en el que se ilustra que es posible que una colección de compuestos químicos que se difunden y reaccionan entre sí pueden dar lugar a una configuración espacial heterogénea de sus concentraciones. Esto le da sustento a la propuesta de Turing de que la distribución heterogénea de morfógenos sea la responsable de la diferenciación celular. Sin embargo, para que esta propuesta adquiera una transcendencia real y tangible necesitamos comprender una idea sugerida por Pines y Laughlin en el año 2000 (Pines y Laughlin; 2000). Se trata del concepto de *propiedad protegida* de la materia.

La turbulencia en algunos fluidos es independiente de la naturaleza

las curvas de nivel $u(x, y, t) = C$, es decir, las curvas con igual concentración, son espirales que rotan rígidamente, entonces la pareja (x, y) no es arbitraria, sino que satisface

$$x = r \cos \theta(r) \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta(r),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la función desconocida $\theta(r)$ da la forma de la espiral.

material, microscópica, de los mismos. No obstante, su manifestación macroscópica es la misma. Las ondas, vórtices y remolinos que caracterizan a la turbulencia son independientes de que el fluido en cuestión sea agua, alcohol o gasolina. En este caso, decimos que la turbulencia es una propiedad protegida de la materia y al conjunto de sistemas que la muestran se le llama *protectorado* o bien *clase de universalidad dinámica* (Miramontes y Cocho; 2000). Gracias a estos conceptos el modelo matemático de algún fenómeno adquiere legitimidad puesto que si las manifestaciones observables del mismo no dependen de los detalles, entonces todos los sistemas que tengan el mismo comportamiento independientemente de la base material de la que estén hechos, podrán ser descritos mediante el mismo modelo matemático. Gracias a esto, por ejemplo, los modelos matemáticos de una epidemia son los mismos que los de la propagación de un rumor aunque la naturaleza de los virus y bacterias sea evidentemente distinta a la de los chismes.

Los patrones que surgen de la reacción BZ también son una propiedad protegida de la materia. En las Figuras 8, 9 y 11 podemos ver que fenómenos de naturaleza completamente distinta como los son un cultivo de protozoarios, un fenómeno óptico y una enfermedad de la piel, tienen como manifestación macroscópica un patrón BZ. La Figura 8 muestra un cultivo del protozoario *Dictyostellium discoideum*.

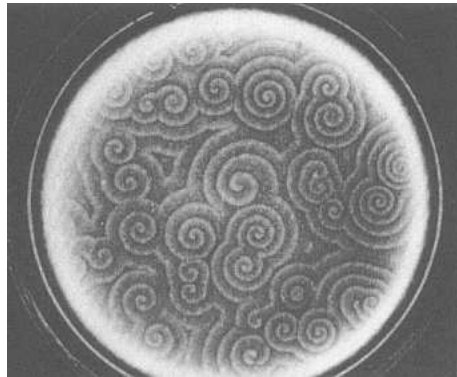


Figura 8: Cultivo de *Dictyostellium discoideum* en un plato de Petri. Compárese con la Figura 4.

Se trata de una amiba que lleva una vida individual alimentándose de bacterias. Cuando ocurre una situación de estrés debido a escasez de alimento, las amibas se agrupan y comienzan a emitir pulsos de una sustancia quimioatrayente llamada monofosfato cíclico de adenosina (cAMP). Entonces, la dinámica que se crea como resultado de la atracción de cada amiba y su consecuente movimiento hacia una fuente

de cAMP y su propia emisión de la misma sustancia, culmina en la formación de ondas espirales como las de la Figura 8. Es evidente, que este patrón espacial es indistinguible de las ondas de la reacción B-Z (Figura 4) pese a que el sustrato microscópico que da lugar a la una y a la otra son de naturaleza radicalmente distinta. Ambos sistemas forman parte de un protectorado. Como mencionamos en el párrafo previo, un buen modelo matemático de un fenómeno pertenece a la misma clase de universalidad y entonces no es de extrañar que la simulación computacional de la reacción B-Z que se muestra en la Figura 10 sea idéntica a la foto de la reacción misma. Se puede afirmar, en general, que todos los sistemas excitables forman una clase de universalidad dinámica. La reacción B-Z, el cultivo de la *Dictyostellium* y, notablemente, el tejido cardíaco (Winfree; 1987) son ejemplos de miembros de un protectorado.

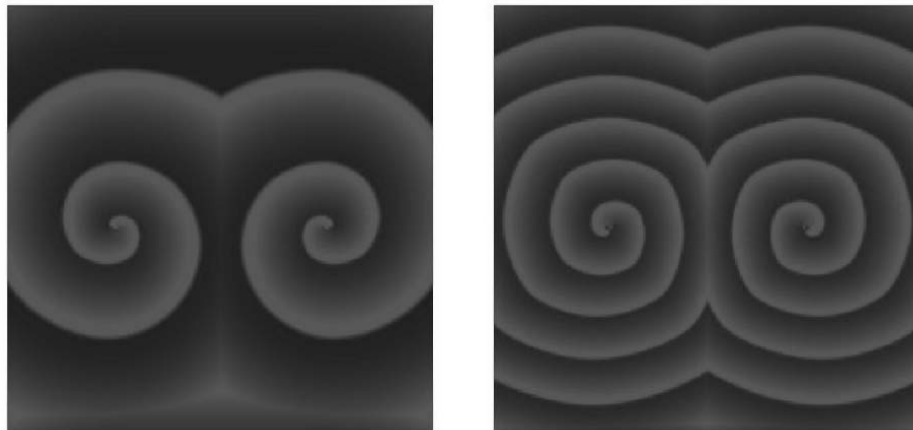


Figura 9: Patrón en un interferómetro Fabri-Pérot de cristal líquido.

9. Colofón

Nos resulta claro que queda en pie la pregunta del origen morfogénos, el primero de ellos descubierto por Christiane Nüsslein-Volhard en los ochentas, y desde luego que tienen su origen en la expresión de alguna red o redes de genes. Sin embargo, queremos insistir que en nuestro escenario, los genes no son los directores del proceso morfogénico sino los tabiques que le brindan el soporte material al proceso de autoorganización del cual surgen las formas vivas y que no está sujeto a presiones adaptativas dada su naturaleza fisicoquímica mayormente determinista. Nuestra visión del proceso evolutivo consta de una parte

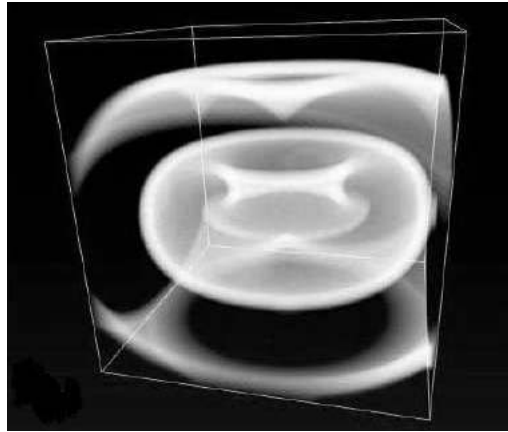


Figura 10: Simulación matemática de la reacción B-Z en tres dimensiones.



Figura 11: Ondas espirales en la piel. Se trata de una enfermedad conocida como *eritema anular*.

de exploración en el espacio fenotípico a cargo de la selección natural⁷ y de la definición misma de tal espacio que es un proceso meramente físico. Qué peso del proceso evolutivo carga cada una de las partes es una pregunta difícil de responder y cuya respuesta puede variar entre extremos radicales dependiendo si se le pregunta a Richard Dawkins (1986) o a Brian Goodwin (1994), pero de lo que no cabe duda es que el mecanismo neodarwiniano se encontrará incompleto mientras no se tome en cuenta la física y, por lo tanto, la matemática subyacentes.

Cerramos este trabajo, recurriendo de nuevo a nuestro admirado D'Arcy Thompson:

⁷Dicha exploración no puede ser azarosa, como lo postula el neodarwinismo, pues la evolución transita solamente por los fenotipos *viables* a la luz de las leyes de la física y la química, lo que restringe enormemente el espacio fenotípico

“La morfología no es sólo el estudio de las cosas materiales y de sus formas, sino que tiene un aspecto dinámico bajo el cual se toma en cuenta, en términos de fuerzas, las acciones de la energía. Y aquí bien vale la pena mencionar que, enfrentados con los hechos de la embriología o los fenómenos de la herencia, el lenguaje comúnmente usado por los libros parece darle demasiada importancia a los elementos materiales presentes como si ellos fueran las causas del desarrollo o de la transmisión hereditaria. La materia por sí sola no produce nada, no cambia nada, no hace nada”.

Por supuesto que la materia es importante, sin ella no existe el Universo, pero su papel es el ser el sustrato de lo verdaderamente trascendente que son los *procesos*. Partículas, genes o individuos no bastan para explicar la maravillosa urdimbre de las acciones colectivas. Es como si nos contasen la tragedia de Mayerling como una noticia de nota roja, sin relatarnos la intrincada trama, el proceso, y el conjunto de pasiones humanas que llevó a Rodolfo y María a perder la vida por amor.

Referencias

- [1] Arias AM (2008) : *Drosophila melanogaster* and the development of biology in the 20th century. *Methods Mol. Biol.* **420**. pp. 1-25.
- [2] Dawkins, R. (1986) : *The Blind Watchmaker*. New York: W. W. Norton & Company.
- [3] Field, R. J., E. Körös and R. M. Noyes (1972) : Oscillations in Chemical Systems, Part 2. Through of temporal oscillations in the bromatecerium-malonic acid systems. *J. Am. Chem. Soc.*, **94**. pp. 8649-8664.
- [4] Field, R. J. and R.M. Noyes (1974) : Oscillations in chemical systems IV. Limit cycle behaviour in a model of a real chemical reaction. *J. Chem. Phys.*, **60**. pp. 1877-1884.
- [5] Goodwin, B. (1994) : *How the Leopard Changed its Spots: The Evolution of Complexity*, Scribner.
- [6] Keener, J.P. and J.J. Tyson (1986) : Spiral waves in the Belousov-Zhabotinskii reaction. *Physica D*, **21**, 307-324.

- [7] Kondepudi, D. and I. Prigogine (1998) : *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures*. Nueva York. John Wiley and Sons.
- [8] Laughlin R. B. and D. Pines (2000) : The Theory of Everything. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. **97**, 28-31.
- [9] Miramontes P. y G. Cocho (2000) : Patrones y procesos en la Naturaleza. *Ciencias* **59**. pp. 14-22.
- [10] Murray J.D. (1989) : *Mathematical Biology*. Heidelberg, Springer-Verlag.
- [11] Sánchez Garduño F. (2004): Matemáticas y química: Una mirada a la cinética química desde la matemática. Sociedad Matemática Mexicana–CIMAT.
- [12] Roux J., Simoyi R. and H. Swinney (1983) : Observation of a strange attractor. *Physica D*, **8**, pp. 257-266.
- [13] Tyson J.J. (1985) : A quantitative account of oscillation, bistability and travelling waves in the Belousov - Zhabotinskii reaction. En *Oscillations and Travelling Waves in Chemical Systems*, R.J. Field and M. Burger (Eds.). Nueva York, John Wiley, pp. 93-144.
- [14] Tyson J.J. (1994) : What everyone should know about the Belousov-Zhabotinskii reaction. In: *Fronteries in Mathematical Biology*. S.A. Levin (Editor) Vol 100, Lecture Notes in Biomathematics. Heidelberg. Springer-Verlag, 569-587.
- [15] Winfree A.T. (1972) : Spiral waves of chemical activity. *Science* **181**, 937-939.
- [16] Winfree A.T. (1987) : *When Time Breaks Down, the three dimensional dynamics of electrochemical waves and cardiac arrhythmias*. Princeton University Press.