

Recordando a John von Neumann

Shirley Bromberg y Patricia Saavedra

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

Von Neumann es uno de los matemáticos que más influyeron en el desarrollo de la ciencia en la segunda mitad del siglo XX. Admirado como pocos, su temprana muerte lo convirtió en leyenda. A poco más de cien años de su nacimiento presentamos una breve reseña de su vasto trabajo y del enorme impacto que tuvo en disciplinas tan diversas como la matemática, la economía, la física y la computación. Sin embargo, ante la amplitud de su obra nos hemos visto obligadas a escoger algunos temas y hemos dejado de lado otros igualmente importantes. En esto han jugado un papel nuestros propios intereses. También cabe señalar, que para apreciar con justicia la originalidad y la capacidad creativa de von Neumann es necesario tomar en cuenta el grado de avance de cada uno de los campos en los que se interesó; desgraciadamente, por falta de espacio, no incluimos todos los antecedentes que hubiéramos deseado.

Su vida

John von Neumann nació en Budapest, Hungría, el 28 de diciembre de 1903, en el seno de una acaudalada familia judía. Su padre, Max Neumann, era un brillante abogado que trabajaba para la banca, culto, amante del arte y de la buena vida. Para su madre, Margaret Kahn, la vida giraba alrededor de su familia. Su apoyo y cariño fueron muy importantes para von Neumann a lo largo de toda su vida.

A mediados del siglo XIX, el imperio austro-húngaro decidió incorporar a la administración pública a jóvenes preparados y con deseos de superación. El poco interés que mostró la aristocracia, formada por pequeños y grandes terratenientes, favoreció el ascenso social de va-

rios miembros de la clase media y de la comunidad judía de Austria, Hungría y Checoslovaquia. Uno de ellos fue Max Neumann quien se convirtió a principios de siglo en consejero del gobierno húngaro sobre asuntos económicos. En 1913 vió retribuido su esfuerzo al recibir un título nobiliario que le permitió, a él y a su descendencia, anteponer la partícula *von* a su apellido.

Von Neumann recibió en su niñez una excelente educación a manos de institutrices inglesas, alemanas y francesas, como se acostumbraba en esa época. Una parte fundamental de su educación la recibió de sus padres. Las veladas familiares, intelectualmente estimulantes y provocativas, se daban en un ambiente distendido. Max von Neumann enseñó a sus hijos que tener, y por supuesto usar, una mente perspicaz podía resultar divertido. A los 10 años de edad ingresó al *Gymnasium*¹ Luterano de Budapest, uno de los mejores liceos de la ciudad. Esta escuela cuenta con un record difícil de igualar. En un lapso de cuatro años se graduaron futuros físicos de la talla de Leo Szilard, Edward Teller y Eugene Wigner, este último premio Nobel en física y, naturalmente von Neumann quien fuera su contemporáneo y, según todos ellos, el más brillante de los cuatro.

Al ingresar al liceo, Laszlo Ratz, su profesor de matemáticas, se dió cuenta de que era una lástima que el chico se limitara a aprender los cursos oficiales de matemáticas. Habló con su padre para que le permitiera darle clases particulares. Sin embargo, su familia no lo separó de los niños de su edad y von Neumann siguió asistiendo a los mismos cursos y haciendo las mismas tareas que sus compañeros. Cuando el alumno rebasó los conocimientos del maestro, Ratz invitó al distinguido matemático húngaro Gabriel Szego a ser su tutor. Posteriormente, John trabajó con dos destacados matemáticos húngaros, M. Fekete y L. Fejer, los cuales acrecentaron su pasión por esta ciencia. Esto preocupó a su padre quien, por razones financieras, no deseaba que su hijo fuera matemático.

Antes de acabar el liceo, von Neumann publica junto con Fekete su primer artículo en la *Revista de la Sociedad Matemática Alemana*; era una nota sobre los ceros de un polinomio mínimo y el problema del diámetro transfinito. Concluye sus estudios ganando el prestigioso premio Eotvos, que se otorgaba a quienes obtuvieran mayor puntaje

¹Gymnasium es el término que se utiliza en Alemania para las Escuelas Preparatorias, es decir, aquellas que preparan a los alumnos para el ingreso a la universidad, así como Gymnasium en la antigua Grecia designaba al edificio donde los jóvenes se preparaban para las competencias olímpicas.

en el examen de bachillerato. En concursos anteriores von Karman y Szilard se habían hecho merecedores del premio.

A los 17 años John tiene que escoger qué estudiar y dónde hacerlo. Su padre, un hombre práctico, insistió en una carrera técnica, pero sus intereses lo inclinaban hacia las matemáticas. Al final llegaron a un acuerdo, von Neumann estudiaría ingeniería química, primero en la Universidad de Berlín y posteriormente en la Escuela Politécnica de Zurich. Simultáneamente prepararía su tesis doctoral en matemáticas en la Universidad de Budapest, trabajando en uno de los problemas centrales del momento: la axiomatización de la teoría de conjuntos.

En 1922 la primera versión de su tesis, *La axiomatización de la teoría de conjuntos*, es enviada a Herbert Fraenkel quien, al ver las dificultades técnicas del trabajo, le aconseja escribir un artículo introductorio *Una axiomatización de la teoría de conjuntos*. Publicado en 1925, refuerza su reputación de joven prodigio. En 1923 publica otro artículo sobre un tema que había trabajado cuando aún era estudiante de liceo: los números ordinales transfinitos.

En 1926 obtiene su título de ingeniero químico, ultima detalles de su tesis doctoral de matemáticas y se gradúa con honores. Posiblemente esta combinación de intereses explique su atracción tanto hacia los fundamentos de la matemática como hacia la aplicación de ella a otras disciplinas.

Comienza entonces su vida profesional propiamente dicha y la búsqueda de un trabajo permanente. En 1926 es profesor visitante de la Universidad de Göttingen, centro de la matemática alemana, presidido por David Hilbert. Es la época en la que, año con año, se suceden los descubrimientos y las nuevas teorías de la física atómica. Werner Heisenberg era una de las figuras más conspicuas al ponerse, a los 26 años, al tú por tú con figuras como Niels Bohr y Erwin Schrödinger. Hilbert solicita a Heisenberg una conferencia, dentro del seminario de matemáticas, sobre la teoría cuántica que había desarrollado. Von Neumann estaba presente y su entusiasmo lo obliga a participar en la discusión y, con Hilbert y Lothar Nordheim, su asistente, busca la fundamentación matemática de dicha teoría, formalización que obtienen mediante operadores en espacios de Hilbert.

En 1927 John obtiene un puesto de *Privatdozent*² en la Universidad de Berlín, cargo que ocupa hasta 1929, año en el que su padre muere. Durante esos años se dio a conocer por sus publicaciones en teoría de conjuntos, álgebra y teoría cuántica. Stanislaw Ulam menciona en su

²Privatdozent es un profesor cuyo estipendio es pagado por sus alumnos.

artículo [U] que cuando él asistió en 1927 a un congreso de matemáticas en Lwów, Polonia, ya era famoso el trabajo de von Neumann en fundamentos de la matemática y teoría de conjuntos.

Comienza entonces von Neumann una carrera frenética, publicando casi a razón de un artículo por mes, de manera que para finales de 1930 había publicado 33 artículos de investigación, entre ellos los artículos, en coautoría con Wigner, sobre la explicación de las líneas que aparecen en el espectro de los átomos; su primer artículo sobre teoría de juegos –artículo seminal– y la continuación de su trabajo en la física cuántica. Esto estableció su reputación de ser uno de los matemáticos más brillantes de su época.

Ante la dificultad de encontrar un trabajo permanente en Berlín, von Neumann acepta ser, durante un breve período de 1929 a 1930, privatdozent en la Universidad de Hamburgo. En 1929 Oscar Veblen de la Universidad de Princeton, quien estaba a cargo de contratar investigadores de primerísimo nivel para el futuro Instituto de Estudios Avanzados (IAS), lo invita a Princeton. Viaja al nuevo continente por primera vez en 1930, después de resolver un “asunto familiar”: pide y contrae matrimonio con Marietta Kosevi. Después de esta estancia y como según su análisis el ya enrarecido clima político en Europa sólo podría degradarse, John comienza a considerar seriamente la posibilidad de aceptar un trabajo permanente en Estados Unidos. En 1931 acepta un puesto en la Universidad de Princeton con la posibilidad de regresar a Europa durante el verano.

En 1933, a los 30 años, von Neumann recibe la oferta para pertenecer a la planta de investigadores del IAS, sin obligaciones docentes, por un salario anual de 10,000 dólares, una cifra astronómica en plena depresión económica. El Instituto en los años treinta estaba en camino de convertirse en la nueva meca de la matemática. De 1933 a 1936 fueron investigadores Alexander, Einstein, Eisenhart, Lefschetz, Tucker, von Neumann, Weyl y Wigner, entre otros, y figuraron como profesores visitantes Brauer, Dirac, Gödel, Pauli y Ulam. Entre 1933 y 1940 von Neumann publicó 28 artículos de investigación, sólo o en co-autoría con científicos tan prestigiosos como Kuratowsky, Murray, Stone y Wigner, principalmente en teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, en teoría ergódica y en álgebras de operadores. Se cumplían así todas las expectativas que había generado. Y es que el éxito estaba garantizado por la combinación de una inteligencia brillante con rapidez de pensamiento y trabajo arduo. En reconocimiento a su labor, la American Mathematical Society (AMS) le otorgó en 1937 el premio

Böcher.³

De acuerdo con su contrato, y antes del estallido de la segunda guerra mundial, sigue realizando durante el verano cortas estancias en Europa. Visita la Universidad de Cambridge en 1935, el Instituto Henri Poincaré de París en 1936 y la Universidad de Copenhagen en 1938, pero a medida que se incrementa la tensión encuentra cada vez más difícil trabajar en Europa.

Von Neumann es uno de los primeros en ver el gran peligro que representaba Hitler para el resto de Europa, en especial para los pequeños países de Europa Central. Poco después de adquirir la nacionalidad americana en 1937, presenta su solicitud y los exámenes correspondientes, para formar parte, con nombramiento de teniente, de la reserva del ejército norteamericano. Convencido de que la guerra era inevitable, quería participar en la defensa de Europa contra los nazis. Veblen, quien había colaborado estrechamente con el ejército durante la primera guerra mundial, lo recomendó al Laboratorio de Aberdeen, Maryland, como consultor en asuntos de balística y explosivos.

En 1937 John se divorcia de Marietta Kosevi, con quien tuvo su única hija, Marina, en 1935. Von Neumann vuelve a casarse en 1938 con otra húngara, Klara Dan, quien posteriormente participó en el desarrollo de los primeros códigos de programación. En 1939, previendo que la guerra era inminente, convence a su madre, a sus suegros y a sus hermanos para que emigren a Estados Unidos.

A principios de la segunda guerra mundial la experiencia y conocimientos que von Neumann había adquirido en hidrodinámica y teoría de choques lo dieron a conocer dentro de las fuerzas armadas. En 1942 inicia su colaboración con la marina; el problema que lo ocupa es el de detectar las minas alemanas en el Atlántico, en particular en la ruta a Inglaterra. De enero a julio de 1943, von Neumann trabaja en Londres en el estudio de las ondas oblicuas que se forman al estallar misiles a distintas alturas y los mecanismos que rigen el tamaño y el efecto de una explosión. A su regreso de Inglaterra trabaja para las fuerzas aéreas en asuntos de aerodinámica; en ese momento es considerado uno de los líderes mundiales en este tipo de problemas. En consecuencia, en 1943, es llamado a colaborar en el proyecto Manhattan. Von Neumann sólo se incorpora al proyecto en su etapa final pues la armada de Estados Unidos no quería que se distrajera de sus otras comisiones. Se le in-

³El premio Böcher se instituyó en recuerdo del Profesor Maxime Böcher. Se da cada cinco años a un artículo notable en el área de análisis, publicado en una revista de renombre norteamericana.

vitó cuando se requería la presencia de un matemático de primera línea que explicara algunos puntos finos en el manejo matemático de este tipo de problemas. Hans Bethe, quien estaba al frente de la división teórica comentó al respecto “Johnny era muy inteligente para resolver problemas de tipo general; me enseñó muchas matemáticas. Había varias ecuaciones diferenciales que no podíamos resolver; él siempre podía, y no era embarazoso preguntarle; simplemente se sentaba y las hacía”.

La necesidad de realizar un gran número de cálculos hace indispensable la construcción a gran escala de “máquinas de calcular”. En 1944 von Neumann se incorpora al proyecto que diseñará el ENIAC, luego el EDVAC y, posteriormente, se involucra en el diseño lógico de las computadoras. En 1946 escribe, junto con Goldstine, un reporte para el ejército donde aparece, por primera vez, la idea de que una computadora debe tener una memoria central en la que se almacenen programas que especifiquen las acciones que debe llevar a cabo la máquina para realizar distintas tareas. Para la computación fueron tan importantes sus contribuciones como el hecho de que su interés por las computadoras atrajo a una gran cantidad de científicos a este campo.

Durante la guerra von Neumann publica diecisiete artículos de investigación, entre ellos resuelve, en un caso particular, el quinto problema de Hilbert; publica junto con Oscar Morgenstern el libro *Teoría de Juegos y Comportamiento Económico*, obra que contribuyó a la fundamentación matemática de la economía. Asimismo publica varios artículos sobre la Teoría de Operadores y otros con Chandrasekhar sobre la estadística del campo gravitatorio generado por una distribución aleatoria de estrellas.

Su colaboración con las fuerzas armadas de Estados Unidos fue casi constante hasta su muerte. Coordinó múltiples comités, colaboró en el desarrollo de la bomba de hidrógeno y participó en la creación del laboratorio de Los Alamos. Todas estas actividades las realiza al mismo tiempo que continua participando en la vida académica del IAS.

Su influencia en la política científica de Estados Unidos fue impresionante. Se decía que después de que se le planteaba a von Neumann un asunto, la claridad de su análisis marcaba el rumbo a seguir. Este aspecto de su carrera ha sido muy controvertido e hizo de él un personaje polémico, podría decirse que, en esos años, pertenecía al grupo de los “halcones” de la guerra fría. Sin embargo, es importante señalar que von Neumann no participó en la histeria anticomunista desatada por el Comité Mc Carthy del senado de Estados Unidos. De hecho se presentó ante este Comité para apoyar en forma elocuente y decidi-

da a Robert Oppenheimer, con quien había trabajado en el proyecto Manhattan y en el IAS, cuando éste último tomó su dirección. Esta enorme influencia era resentida por varios de sus contemporáneos quienes comenzaron a atacar su gran versatilidad y el amplio espectro de sus intereses. Se decía que brincaba de un tema a otro después de haber obtenido los resultados fáciles y glamorosos, dejando a otros el arduo trabajo de profundizar. De hecho dio lugar al siguiente dicho: Fulanito trabaja en esto, trabaja en aquello y en algo más; de seguir así acabará como von Neumann, ver [L].

A comienzos de 1955 von Neumann fue invitado a dar las Conferencias Silliman en la primavera de 1956. Von Neumann consideró esta invitación un gran honor, pero como sus ocupaciones como miembro de la Comisión de Energía Atómica eran de tiempo completo, solicitó dedicar sólo una semana a las conferencias en lugar de las dos acostumbradas. El tema escogido fue “The computer and the brain”. Sin embargo, poco después, a raíz de un dolor en los hombros, se le diagnosticó un cáncer en los huesos, posiblemente originado en el hígado que había hecho metástasis. Como antes Fermi, von Neumann se había expuesto a las radiaciones. Un año después, von Neumann se vio confinado a una silla de ruedas y sus fuerzas decaían a ojos vistos, pero seguía pensando que podría impartir no ya una serie de conferencias sino dos. En abril fue internado en el hospital, del cual ya no salió; todavía pensaba poder concluir el manuscrito de las conferencias. Sin embargo esto tampoco le fue posible y fue Klari, su viuda, quien lo editó póstumamente. Muere a los 54 años, el 8 de febrero de 1957. Peter Lax, ver [L], se refiere en estos términos a su muerte: “La muerte prematura de von Neumann es una tragedia. Debido a ella las matemáticas, y la ciencia en general, perdieron a un líder natural y a un portavoz elocuente y privaron a toda una generación de jóvenes de interactuar con el intelecto más fulgurante del siglo XX”.

Von Neumann fue una persona carismática, cálida, con amplia cultura y *savoir-faire*. Su personalidad le abrió las puertas de la sociedad norteamericana. Sus fiestas en Princeton eran memorables por la compañía, la bebida y la plática. Era un gran conversador con mucho sentido del humor, pero su gran pasión siempre fueron las matemáticas. Frecuentemente durante las fiestas que organizaba se retiraba a trabajar, pero disfrutaba el ruido de fondo que le proporcionaban las voces y risas de sus invitados. De estatura media, fue delgado de joven y robusto en su madurez, disfrutaba la buena cocina y era capaz de viajar 200 km para comer en su restaurante mexicano favorito. Su figura era inconfundible, siempre de traje, aún en el desierto de Nevada. Manejaba el

griego y el latín con soltura, además del inglés, hablaba con fluidez el francés y el alemán.

Muchos matemáticos recuerdan anécdotas sobre su capacidad de análisis, su rápida comprensión de los problemas, sus fulminantes respuestas y su impresionante manejo de la teoría, siempre abierto a nuevas posibilidades. Refieren, al respecto, que en una ocasión, al exponer algunos resultados, se enredó con el razonamiento matemático y comentó: “conozco tres demostraciones de este hecho; desafortunadamente me decidí por una cuarta vía”. Su memoria y rapidez de pensamiento eran legendarias, así como su gusto por los chistes de doble sentido (Teller comentaba que era uno de los pocos que podía contar chistes de doble sentido en tres idiomas) y su facilidad para chocar coches (se decía que destruía a razón de un coche por año). Una de las historias que corrían en Princeton decía que von Neumann era realmente un semi-dios que había estudiado detalladamente el comportamiento de los humanos y que podía imitarlo a la perfección. Peter Lax comenta, ver [L], que era usual escuchar que “la mayoría de los matemáticos prueban lo que pueden, mientras que von Neumann prueba lo que quiere”.

Von Neumann siempre se sintió atraído por la formalización, por la posibilidad de deducir todo a partir de un número reducido de axiomas. Es la posibilidad de axiomatizar la que nos permite “establecer ciertos estándares de objetividad, de verdad. Es decir nos garantiza la posibilidad de ciertos criterios de verdad” [vN2]. Esta búsqueda es una constante en su trabajo, como puede verse en su formalización de la mecánica cuántica, de la economía y de la matemática misma. Sin embargo, su preocupación por el tratamiento matemático riguroso y abstracto no coartó su interés por los problemas reales y ambas partes -la formal y la aplicada- se beneficiaron de la tensión que se producía: la búsqueda de explicaciones matemáticas para los fenómenos físicos enriqueció su trabajo matemático a la vez que su trabajo matemático enriqueció las aplicaciones. Su experiencia en la lógica formal, que podría verse como fallida, le permitió más tarde contribuir en el diseño de las computadoras.

Por supuesto que para von Neumann esta no es la única fuente posible de inspiración. Sin llegar a la posición de Hardy, le parece completamente legítimo dar rienda suelta a la curiosidad que despierta la propia matemática. Decía que muchas veces el éxito se debía a que los matemáticos olvidaban que querían conseguir algo, para dejarse llevar por los razonamientos, guiados solamente por criterios de elegancia intelectual. Cita el ejemplo de las matrices que se fueron desarrollando por pura curiosidad y por la elegancia de sus resultados y que al fi-

nal dieron el marco teórico dentro del cual se desarrolló la mecánica cuántica.

Siempre abogó por un *laissez-faire* en la ciencia, lo cual era significativo si pensamos que lo hacía en plena *Guerra Fría* cuando la sociedad en general y los científicos en particular proponían una regulación estricta de ella⁴. Cabe señalar que este tema sigue vigente. Basta mencionar la discusión en la ONU sobre la investigación con las células-madre. Pensaba von Neumann que entre más personas estuvieran trabajando en un mismo problema, más rápidos serían los progresos. Por esto le preocupaba la regulación de la ciencia y pensaba que era necesario preservar y proteger el *modus operandi* de la investigación básica específicamente en dos de sus piedras de toque: la libertad para escoger el tema y la libertad de publicar sus resultados. Estoy convencido, decía, de que pequeños errores al regular la ciencia pueden afectar de manera catastrófica la reproducción de los científicos.

A su muerte la AMS publicó un número especial en su honor. Varios matemáticos de la talla de Stanislav Ulam, Garrett Birkhoff, Paul Halmos, W. Kuhn y W. Tucker contribuyeron presentando las aportaciones de von Neumann a la teoría de latices, de operadores, a la teoría ergódica y cuántica, a la teoría de juegos, a la economía matemática y por último a la teoría de autómatas.

En 1990 el volumen 50 de los *Proceedings* de Symposia en Matemáticas puras de la AMS se dedicó por completo a revisar el trabajo de John von Neumann y su impacto en la matemática de la segunda mitad del siglo XX. En el prefacio, James Glimm, John Impagliazzo e Isadore Singer se refieren de esta manera a von Neumann, “John von Neumann es uno de los gigantes de la matemática moderna. Su carrera fue marcada por la fundamentación y la creación de nuevos campos de la matemática y por sus contribuciones a muchas otras. Sus intereses abarcaban matemáticas puras, la ciencia básica y aplicada, la fundamentación de la mecánica cuántica y de la computación científica. Von Neumann creía en el poder del razonamiento matemático y su importancia en la sociedad moderna. Esta creencia, expresada a lo largo de toda su carrera, es su legado”.

⁴Recordemos que Rene Thom decía que aquél que en ciencia sabe a donde va, no llega muy lejos.

Formalismo y Teoría de conjuntos

Al inicio de la carrera de von Neumann, Hilbert era una de las figuras más prominentes de la matemática. Recordemos que el segundo de los problemas que propuso a comienzos del siglo XX pedía una demostración de la consistencia interna de la aritmética. La preocupación por la consistencia es posiblemente originada por la aparición de la geometría no euclidiana y la demostración de que en la geometría de Lobatchevski (en la cual se acepta un axioma contrario al axioma euclidiano sobre las paralelas) podemos construir un modelo de la geometría euclidiana y viceversa. El hecho de que ambas sean igualmente válidas nos expulsa del paraíso de las verdades inmutables y del argumento, inconsciente, de que no vale la pena preguntarse por la consistencia de la geometría pues ésta es un modelo de la realidad, la cual claramente es consistente. Para abordar este problema, primero debemos tener un sistema de axiomas, tan simple como sea posible, del cual pueda deducirse toda proposición en la teoría. Esta manera de proceder, que llamamos el método axiomático-deductivo, es el que está en la base de la matemática. Provee entre otras cosas de un marco para averiguar la extensión, la validez, los límites de nuestros supuestos. Hilbert es el más grande de los exponentes de la corriente formalista de la matemática de los siglos XIX y XX. Es fácil darse cuenta de la extensión de la influencia de Hilbert sobre von Neumann. Dentro del marco de la corriente formalista desarrolla von Neumann algunos de sus primeros trabajos. El primero, elaborado cuando todavía está en la licenciatura, establece una axiomatización de los ordinales. Posteriormente, en su tesis de doctorado, propone una axiomatización de la teoría de conjuntos y progresa tanto como le es posible en la demostración de su consistencia (si la matemática puede reducirse a la lógica y ésta a la teoría de conjuntos, tendremos la consistencia no sólo de la aritmética sino de la propia matemática). El trabajo de Gödel muestra que tal pretensión no es posible. En cuanto von Neumann lo lee, se da cuenta de que los esfuerzos para probar la consistencia interna de la matemática son inútiles [vN1] y apoya a Gödel decididamente.

Mecánica Cuántica

Al final de un período de desarrollo, donde deben mencionarse los nombres de Einstein, Planck y Bohr, era claro que todas las mediciones asociadas a átomos o moléculas obedecían las leyes, discontinuas, de los quanta. Se había observado en espectroscopía, que los colores

de la luz que los átomos emiten y absorben no se daban en forma continua, sino por “saltos”, contradiciendo el principio newtoniano de la continuidad. Posteriormente, la opinión generalizada en el medio de la física teórica era que el principio de continuidad era simulado por un proceso de promediación [vN3].

En 1925 había un conjunto de resultados experimentales heterogéneos, independientes y aparentemente contradictorios en la física atómica. Para explicarlos se produjeron no una sino dos teorías. Por una parte, Erwin Schrödinger, razonando por analogía, pensó en el electrón como una cuerda vibrante que emite un tono definido y sus semitonos pero ningún otro. A partir de esto estableció la ecuación de onda para el electrón cuyas soluciones, en el caso del electrón de hidrógeno, son precisamente las longitudes de onda que emite y absorbe el electrón. Esta teoría se denomina *mecánica ondulatoria*. Por otra parte, Werner Heisenberg, basado en sus propias ideas y las de Jordan, de Dirac y de Born, desarrolla una *mecánica matricial*. En este acercamiento, el sistema cuántico está descrito, para un sistema con k grados de libertad, por $2k$ matrices (necesariamente infinitas) que deben satisfacer las relaciones de conmutación y las cuales deben diagonalizar el “Hamiltoniano” del sistema. Posteriormente Schrödinger demuestra que los dos sistemas son equivalentes, usando el teorema de Riesz que establece que el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables y el de sucesiones cuadrado sumables son isomorfos.

Von Neumann publica sus primeros artículos con Hilbert y Nordheim y posteriormente publica el libro “Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica” [vN3], primero en alemán y luego una traducción al inglés. Von Neumann fundamenta la *mecánica matricial*, en la cual el momentum y la posición de una partícula no son números sino matrices infinitas. Para hacerlo define, de manera intrínseca, es decir, independiente de coordenadas, por primera vez el concepto abstracto de *Espacio de Hilbert*, desvinculado de los dos ejemplos conocidos ya citados. A pesar de lo pequeño que esto pudiera parecer, esta definición marcó un hito en el Análisis Funcional. En su libro, von Neumann muestra cómo, a partir de un análisis de las cuestiones fundamentales, y con algunos supuestos básicos, se pueden derivar las fórmulas estadísticas de la mecánica cuántica. En este sistema, la posición y el momento pasan de ser matrices infinitas a ser operadores en el espacio de Hilbert, desafortunadamente, no acotados y por lo tanto a los cuales no puede aplicarse la teoría espectral de Hilbert. Von Neumann desarrolla entonces su teoría espectral para operadores autoadjuntos, estableciendo una relación entre la posibilidad de extender un operador cerrado y

el dominio de definición del operador adjunto. Relaciona el problema de extender operadores densamente definidos, con la topología de su gráfica y con el dominio de los operadores adjuntos (ver, por ejemplo, [R-N]). La exposición de muchos de estos resultados es prácticamente la misma que la que encontramos en los textos modernos. Notemos que después de haber hecho este trabajo, von Neumann se toma la molestia de analizar con todo cuidado las matrices infinitas, muy apreciadas por los físicos, y muestra de manera contundente que eran una herramienta completamente inadecuada para la teoría espectral dado que la falta de unicidad de la correspondencia entre matrices y operadores lleva a patologías.

Análisis funcional. Teoría de operadores

El interés de von Neumann en la teoría de operadores, que había nacido a partir de su trabajo en mecánica cuántica, lo acompañó a lo largo de su carrera. Para comenzar, su estudio de la geometría de los espacios de Hilbert los convierte en objetos tan usuales, tan cotidianos para los matemáticos como los espacios euclidianos. Su tratamiento sobre los operadores auto-adjuntos tanto en su libro *Mecánica Cuántica*, como en sus artículos de 1929-1931, son prácticamente definitivos ([D]). En este inicio de la teoría responde algunas de las preguntas básicas, como la de saber bajo qué condiciones un espacio normado es un espacio de Hilbert. Publica la solución de este problema: La norma debe satisfacer la ley del paralelogramo, junto con P. Jordan, en [J-vN]. Un ejemplo de la manera como von Neumann relaciona esta teoría con diversas ramas es su elegante demostración del Teorema de Radon-Nikodym. Observa que el problema puede transformarse en un problema de operadores en L^2 y lo resuelve mediante el teorema de representación de Riesz (ver, por ejemplo, [R] o [R-N]).

Comentamos anteriormente que von Neumann considera igualmente válido tanto estudiar un tema por su relación con las aplicaciones, como por la curiosidad propia de un matemático. Es con esta última visión que emprende el estudio del anillo de operadores acotados definidos sobre un espacio de Hilbert separable, \mathcal{L} . Define la noción de convergencia débil y observa, en 1929, que el espacio de Hilbert con la topología débil no es metrizable. Posteriormente se interesa en las subálgebras involutivas de \mathcal{L} , es decir, aquellas subálgebras que contienen el adjunto de cada uno de sus elementos. En 1931 demuestra el Teorema del doble conmutante: Si \mathcal{M} es una subálgebra involutiva que contiene a la identidad,

entonces \mathcal{M}'' es la cerradura en la topología débil de \mathcal{M} , donde \mathcal{M}' es la subálgebra de \mathcal{L} que consiste de todos los operadores que conmutan con los elementos de \mathcal{M} . Demuestra también que toda subálgebra débilmente cerrada de \mathcal{L} está generada por un único operador A y sus elementos pueden identificarse con $f(A)$, con f una función real medible y acotada, vinculando nuevamente problemas de operadores con problemas de Teoría de la Medida.

Posteriormente, en 1935, retoma esta problemática cuando F. Murray un joven graduado llega a trabajar con él. Von Neumann le propone tratar el problema de la clasificación de los *factores*, es decir, álgebras involutiva con centro trivial. Los resultados que se obtienen sobre factores de tipos I, II y III son extraordinarios. Además, pronto se hace evidente que los resultados podrían aplicarse a la teoría ergódica y a la teoría de representación de grupos localmente compactos.

Sobre el trabajo desarrollado por von Neumann en este tema, Dieudonné opinó [D]: “Por la riqueza y novedad de las técnicas y resultados, estos artículos son sin duda los más profundos y difíciles que von Neumann haya escrito” y propuso que las subálgebras involutivas de \mathcal{L} se llamen *álgebras de von Neumann*. Sólo para darse una idea de la actualidad de este tema, en el MathSciNet hay 1048 entradas al respecto.

Matemáticas aplicadas y computación científica

Von Neumann es el padre de la computación científica. Su influencia en los campos principales de esta rama de la ciencia: el análisis numérico, los algoritmos numéricos y la modelación matemática se mantienen vitales y vigentes.

Von Neumann se familiarizó con las dificultades que surgen al tratar algunos problemas que forman parte de lo que se conoce en física como mecánica del medio continuo, al estudiar algunos problemas de hidrodinámica y de balística. El fundamento teórico de este campo son las leyes de conservación que, junto con las leyes constitutivas, dan lugar a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, por lo general, no lineales, como es el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes en mecánica de fluidos o las ecuaciones de Von Karman en mecánica de sólidos.

El estudio de este tipo de problemas ilustra la relación tan estrecha que puede haber entre la obtención de resultados cualitativos, numéricos y experimentales. Es tan importante el estudio de la existencia,

unicidad y regularidad de las soluciones, como el determinar métodos eficientes que permitan aproximar, tanto como sea necesario, la solución de la ecuación. Esta deberá comportarse como prevén los resultados cualitativos y experimentales.

Von Neumann es posiblemente uno de los primeros en ver la importancia de acercar el trabajo teórico, el experimental y el numérico. Se refiere a este punto en una conferencia que dió en 1946 sobre la necesidad de aumentar la capacidad de las máquinas calculadoras a gran escala. Von Neumann opinaba, ver [G-vN], que los métodos analíticos existentes, eran inadecuados para el tratamiento de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, y que, debido a que la investigación en esa dirección se había estancado, se requería mejorar los resultados experimentales con el fin de retroalimentar la intuición de los teóricos y lograr con ello, un avance substancial en la solución de estos problemas. Una forma de complementar los resultados así obtenidos es mediante la simulación numérica, aunque Von Neumann no se refiere a ésta en estos términos, la cuál permite realizar experimentos de una forma más precisa, flexible y barata.

El interés de von Neumann en la computación siempre estuvo ligado a su interés por incrementar el conocimiento científico. Por ello, una de sus preocupaciones principales era asegurar que la computadora pudiera realizar cálculos no sólo de una manera más eficiente sino también precisa, lo cual no era obvio en esos años. Por lo tanto se ocupó de temas como la propagación de errores en los cálculos computacionales y el desarrollo de algoritmos numéricos estables, poco sensibles a errores de redondeo. Su trabajo en análisis numérico incluye, además de los antes citados, el concepto de estabilidad numérica, en particular en el problema de la inversión numérica de matrices; la obtención de algoritmos para la aproximación de soluciones con saltos, como en el caso de las ondas de choque que aparecen en la solución de algunos problemas hiperbólicos. Von Neumann junto con Richtmayer fueron los primeros en introducir soluciones de viscosidad artificial. Asimismo, su interés por el método de Monte-Carlo, lo llevó a ocuparse del problema de la generación computacional de números aleatorios.

Según James Glimm [G], la visión de von Neumann respecto al impacto que tendría la computación en el desarrollo futuro de la ciencia se resume en esta frase: “La ciencia fue transformada por la invención del cálculo. El impacto de las computadoras en la ciencia será al menos tan grande como la del cálculo”.

La computación científica se considera, hoy en día, una herramienta tan importante como los estudios teóricos y experimentales en la generación del conocimiento científico. Podemos esperar un progreso aún más rápido en la ciencia y en la tecnología a medida que haya mejor teoría, mejores algoritmos numéricos y hardware más poderoso. Y esto es resultado de algunos visionarios como von Neumann.

Computación y teoría de autómatas

Uno de los antecedentes de la participación de von Neumann en el desarrollo de las computadoras se remonta a antes de la guerra, cuando tuvo contacto con Alan Turing, un joven matemático inglés quien realizó una estancia postdoctoral en Princeton. El trabajo doctoral de Turing, publicado en 1936, consistió en una extensión del trabajo de Gödel. Turing fue uno de los primeros que intentó definir de manera lógica y completa lo que significa calcular. Además, con objeto de caracterizar lo que es calculable de lo que no es, creó un instrumento virtual, llamado computadora universal, que puede ser programada para llevar a cabo cualquier cálculo. De esta forma demostró que existen algunos problemas matemáticos que no pueden ser resueltos a través de una computadora universal, o sea por medio de un algoritmo. El trabajo de Turing se considera como uno de los antecedentes de la teoría de autómatas. A von Neumann le hubiera gustado que Turing permaneciera en Princeton como su asistente, pero Turing prefirió regresar a casa en vísperas de la guerra y convertirse así, en uno de los creadores del aparato que decodificó los mensajes encriptados por los nazis con la máquina *enigma*.

Uno de los aspectos que más atrajo el interés de von Neumann hacia el trabajo de Turing es que éste al tratar de precisar lo que es calcular, descompone en una serie de operaciones lógicas el proceso que se lleva a cabo al calcular. Esta idea se reforzó con los trabajos de los neurólogos McCulloch y Pitts, quienes propusieron un modelo matemático de la forma en la que trabajan las redes neuronales.

Durante la guerra, para von Neumann se hizo evidente la urgencia de contar con un instrumento de cálculo mucho más eficiente que las máquinas calculadoras de mesa y, en su carácter de asesor de los laboratorios de Aberdeen, fue uno de los que apoyó la construcción de la computadora ENIAC, la primera computadora electrónica. Este instrumento fue diseñado por John Mauchly y Prosper Eckert, brillantes ingenieros de la Universidad de Pennsylvania. Aunque esta computadora funcionaba por medio de electrones, cada vez que se usaba en un

problema nuevo, había que reprogramarla, lo que implicaba reconectar distintos circuitos. Esto llevaba mucho tiempo y esfuerzo.

En el verano de 1944, von Neumann visitó la construcción de la ENIAC, y durante las explicaciones, comenzó a pensar en cómo proporcionar a la computadora las instrucciones a seguir, sin necesidad de hacer intervenir al hardware. Los trabajos de Turing, McCulloch y Pitts prepararon a von Neumann para llegar a la idea de que era necesario que la computadora tuviera una memoria central, donde almacenara las instrucciones necesarias para resolver un problema específico. Estas instrucciones deberían reproducir en forma lógica los pasos que se llevan a cabo al resolver dicho problema. Había nacido el concepto de software. Al mismo tiempo, comenzó a pensar en cómo alimentar a esa memoria central por lo que se le ocurrió dotar a la computadora de partes distintas a la unidad de cálculo por las que entraran datos y programas y otros por las que salieran los resultados. Es a través de su correspondencia con Goldstine como podemos trazar con toda precisión la evolución de estas ideas.

En la primavera de 1945 se le pidió a von Neumann que escribiera un reporte sobre el diseño lógico de una nueva computadora, llamada EDVAC. En este reporte von Neumann plasma las ideas que habían surgido durante sus discusiones con Eckhert, Mauchly y Burks, entre otros, y presenta un diagrama de lo que debe ser la estructura de una computadora: una unidad de cálculo, una unidad central que organice las tareas que lleva a cabo la computadora y una memoria en la que se almacenen los programas. Según palabras de von Neumann, “Estas tres partes corresponden a las neuronas asociativas de nuestro sistema nervioso. Falta por definir lo que jugaría el papel del sistema de neuronas sensoriales o aferentes, es decir, los órganos de entrada y salida del aparato...” [vN-B-G]. Este reporte tendría una influencia decisiva en el desarrollo futuro de las computadoras, no sólo en los Estados Unidos sino también en Inglaterra. Su concepción permaneció vigente hasta la aparición de las computadoras en paralelo.

Después de la guerra, von Neumann ocupó buena parte de su tiempo en el desarrollo de una computadora, que estaría en el IAS, dedicada exclusivamente al estudio de problemas meteorológicos. Su diseño lógico concretaba las ideas antes citadas; desgraciadamente las dificultades técnicas retrasaron tanto su construcción que cuando estuvo lista, ya era obsoleta.

En sus últimos años se dedicó a estudiar la confiabilidad de los resultados que obtiene una computadora, desde el punto de vista de la

teoría de autómatas. Asimismo se interesó en entender la forma en la que trabaja el cerebro, a partir de su experiencia con las computadoras. Los trabajos de Norbert Wiener y Arturo Rosenblueth influyeron y estimularon su interés en este campo. Sus ideas quedaron plasmadas en las llamadas “Silliman Memorial Lectures”, ver [vN4], y de las que vale la pena reproducir el siguiente párrafo: “Si pensamos en el cerebro como un tipo de máquina de cálculo, es muy probable que el lenguaje que usamos para comunicarnos con otro ser humano sea muy distinto al lenguaje interno que usamos para procesar en forma lógica tanto lo que percibimos como lo que calculamos. Muy probablemente, cuando nos expresamos con el lenguaje matemático, estamos haciéndolo en un lenguaje secundario, construido sobre uno primario, que es el que realmente usa el sistema nervioso. Sin embargo, la confiabilidad y la profundidad aritmética y lógica que alcanzamos al pensar prueban que este lenguaje primario no puede estar muy lejos de lo que conciente y explícitamente consideramos como matemáticas”.

Teoría de juegos y economía

La teoría de juegos puede definirse como el estudio, por medio de modelos matemáticos, de situaciones de conflicto y de cooperación entre individuos inteligentes que toman decisiones racionales. Esta metodología es una poderosa herramienta para el estudio de las ciencias sociales y de las ciencias económico-administrativas. La teoría de juegos moderna se inició con Zermelo en 1913, y con Borel, en su artículo de 1921, en el que por primera vez se planteaban matemáticamente las estrategias que pueden seguir un par de jugadores en un juego de suma cero. Sin embargo, no es sino hasta el artículo de 1928 de von Neumann, donde prueba su famoso teorema de minimax, cuando este tema adquiere importancia. Mucho del trabajo inicial en este campo se hizo durante la segunda guerra mundial en Princeton y fruto de ello es el libro *Teoría de juegos y comportamiento económico* que publicó von Neumann junto con Oscar Morgenstern en 1944.

En el lenguaje de teoría de juegos, un juego es cualquier situación social que involucre a dos o más participantes, llamados jugadores. Se supone que los jugadores son inteligentes y racionales. Es decir cada jugador tomará las decisiones más adecuadas para maximizar su ganancia esperada, la cual se mide según una función de utilidad. Estas funciones de utilidad deben reflejar tanto las preferencias personales de cada jugador como su aversión al riesgo. Morgenstern y von Neumann propusieron un conjunto de axiomas que deben cumplirse para poder

describir, sin ambigüedad, y por medio de una relación de equivalencia, las preferencias de un consumidor. Ellos no fueron los primeros en interesarse en este tema, Bernoulli ya lo había hecho varios siglos antes, al igual que Ramsey en los años treinta.

En su artículo de 1928, von Neumann demuestra que en cualquier juego de suma cero entre dos personas, la estrategia óptima para uno de los jugadores se obtiene al determinar, para cada estrategia i , la máxima pérdida esperada p_i y escoger aquella estrategia que minimice el valor de p_i ; para el jugador contrario la estrategia óptima es exactamente la opuesta, ya que el juego es de suma cero. A partir de este resultado, von Neumann estudia los juegos cooperativos llamados así porque los jugadores pueden formar coaliciones para obtener un mejor resultado. Su libro está dedicado principalmente al estudio de dichos juegos.

Segun Kuhn y Tucker, ver [K-T], es difícil de apreciar, en retrospectiva, el nivel de abstracción que von Neumann debió aplicar para formular matemáticamente los elementos esenciales que componen un juego general de estrategia. Sobre todo porque en este campo no había ningún trabajo matemático previo. Asimismo, es importante señalar que otro de los aciertos, del sistema matemático que Von Neumann creó, es que refleja la importancia que tiene el manejo de la información en los juegos de estrategia. Su habilidad para describir rigurosamente la información disponible en cada jugada y la forma en que, a partir de esta información, se construyen las estrategias, fue decisiva para el desarrollo futuro de esta teoría. El manejo de la información se ejemplifica fácilmente con los juegos de ajedrez y dominó. El ajedrez es un juego con información perfecta. Todas las posibles movidas están a la vista de los jugadores y de hecho puede suponerse que la solución depende únicamente de la estrategia que se seleccione. El dominó tiene información imperfecta que puede ser totalmente reconstruida por cada jugador, siempre y cuando recuerde todas las jugadas anteriores que se han hecho.

Aunque los juegos cooperativos no son los más útiles para estudiar algunos fenómenos económicos, son el antecedente del trabajo de Nash, premio Nobel de economía por su trabajo sobre juegos no cooperativos.

Von Neumann abrió un canal de comunicación entre las ciencias sociales y la matemática. Demostró que a pesar de las dificultades, las ciencias sociales pueden beneficiarse del rigor y la precisión del lenguaje matemático, tanto para resolver cuestiones fundamentales como para obtener nuevos métodos cuantitativos. A su vez, la matemática se enriquece en este proceso, a tal nivel que da lugar a nuevos campos. La

reciente creación de finanzas matemáticas no hace más que corroborar esta idea.

Cerremos este artículo citando a Samuelson, Premio Nobel de Economía: “El incomparable von Neumann, se interesó brevemente en nuestro campo; después de su intervención, la economía nunca ha sido la misma”.

Bibliografía y Referencias

- [A] Aspray, W. *The origins of John Von Neumann 's theory of automata*. Proceedings of the Summer Research Institute on the Legacy of John Von Neumann Vol 50 , AMS, 1990.
- [C] Cowan, J. *Von Neumann and Neural Networks*. Proceedings of the Summer Research Institute on the Legacy of John Von Neumann Vol 50 , AMS. 1990.
- [D] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [G] Glimm, J. *Scientific computing: Von Neumann's vision, Today's reality, and the promise of the future*. Proceedings of the Summer Research Institute on the Legacy of John Von Neumann, Vol 50, AMS, 1990.
- [G-vN] Goldstine, H y Von Neumann, J. *On the principles of large scale computing machines*. Proceedings of the Summer Research Institute on the Legacy of John Von Neumann, Vol 50, AMS, 1990.
- [H] Halmos P. R. *The Legend of John von Neumann*. American Mathematical Monthly, Vol. 80, No, 4, pp 382-394,1973.
- [J-vN] Jordan, P. y von Neumann, J. *On Inner Products in Linear, Metric Spaces*. Annals of Mathematics, 2da. Serie, Vol. 36, No. 3, 719-723.
- [K-T] Kuhn H.W. y Tucker A. W. *John von Neumann Work in the Theory of Games and Mathematical Economics*. Bulletin of the AMS, 64, 1958.
- [L] Lax, P. *Remembering John Von Neumann*. Proceedings of the Summer Research Institute on the Legacy of John Von Neumann, Vol 50, AMS, 1990.

- [M] MacRae, N. *John Von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*. Pantheon Books, New York, 1992.
- [R-N] Riesz, F. y Sz.-Nagy, B. *Functional Analysis*. Dover, New York, 1990.
- [R] Rudin, W. *Análisis Real y Complejo*. Tercera edición. Mc. Graw Hill, 1988.
- [U] Ulam, S. *John Von Neumann 1903-1957*. Bulletin of the AMS, 64, 1958.
- [vN-B-G] Von Neumann J., Burks A.W. y Golstine H.H. *Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument*. Part I, Vol I. Report prepared for U.S. Army Ord. Dept. 1946.
- [vN1] Von Neumann, J. *The Mathematician*, en *The Works of the Mind*. Robert B. Heywood, Ed. The University of Chicago Press, 1947.
- [vN2] Von Neumann J. *The role of Mathematics in the Science and in Society*. Conferencia en la 4ta. Reunión de la Sociedad de ex-alumnos de Princeton, 1954. Collected Works VI.
- [vN3] Von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [vN4] Von Neumann J. *The Silliman Memorial Lectures*. Yale University Press. 1958.