

Teoremas Acerca de Triángulos Equiláteros

Waldemar Barrera y Juan Navarrete*

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán

waldemarfr@yahoo.fr

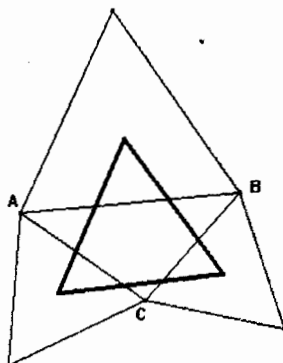
gustacurta@hotmail.com

Resumen

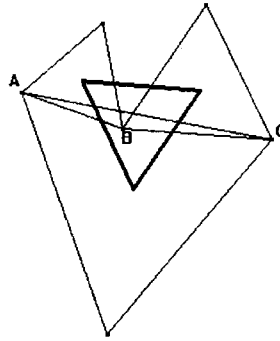
Nuestro objetivo principal es dar una demostración elemental del Teorema de Napoleón y demostrar su equivalencia con el teorema de la hélice asimétrica usando, solamente, conocimientos de geometría plana. Posteriormente, demostraremos una generalización del teorema de la hélice asimétrica, y lo usaremos para descubrir un cierto patrón en una familia de hélices.

1 Introducción.

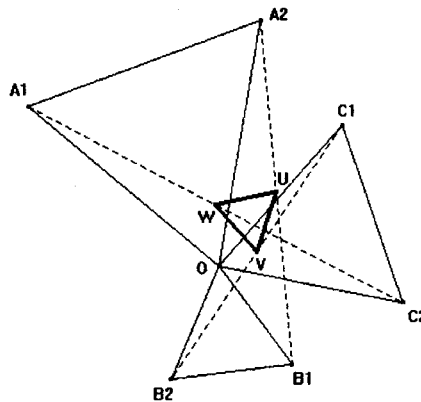
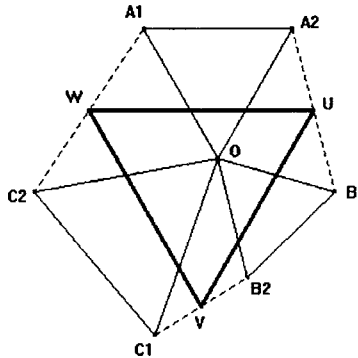
Teorema de Napoleón. *Sea ABC un triángulo cualquiera, sobre cada lado se construyen a su exterior (interior) triángulos equiláteros y se toman los baricentros de éstos, entonces los baricentros forman un triángulo equilátero.*



*Agradecemos a la Universidad Autónoma de Yucatán por todas las facilidades otorgadas durante la elaboración del presente artículo.



Teorema de la Hélice Asimétrica. Sean OA_1A_2 , OB_1B_2 y OC_1C_2 triángulos equiláteros con la misma orientación. Tomemos los puntos medios de los segmentos A_2B_1 , B_2C_1 y C_2A_1 , entonces estos puntos medios forman un triángulo equilátero.



La demostración de este resultado aparece, por ejemplo, en la página www.cut-the-knot.com/ctk/NapoleonPropeller.shtml, donde los autores utilizan técnicas de geometría de los números complejos. También

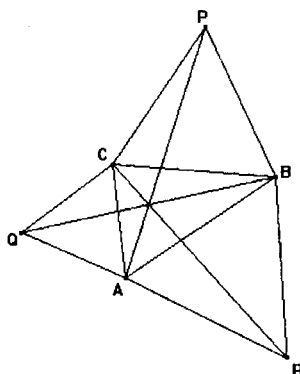
es ahora conocido que el teorema de la hélice y de Napoleón son equivalentes y las técnicas que proponen para su prueba nuevamente utilizan números complejos.

2 Demostraciones de los Teoremas.

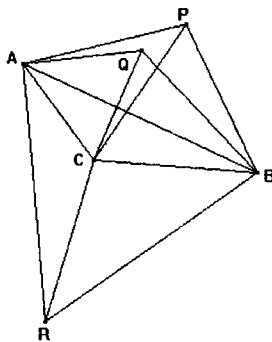
Para la demostración del Teorema de Napoleón utilizaremos lo siguiente:

Lema 2.1. *Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen en su exterior (interior) los triángulos equiláteros ABR , BCP y CAQ , entonces los segmentos AP , BQ y CR tienen la misma longitud.*

La demostración de este lema es inmediata del criterio de congruencia L.A.L.



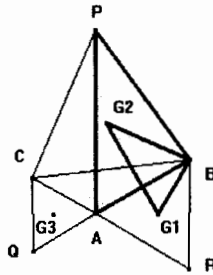
$\triangle ABP \cong \triangle RBC$ y que $\triangle CAR \cong \triangle QAB$. Notemos que esta misma prueba funciona en el caso cuando los triángulos se construyen interiormente.



□

Demostración del Teorema de Napoleón.

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean ARB , BPC y CQA los triángulos equiláteros construidos en el exterior de ABC . Sean G_1 , G_2 y G_3 los baricentros de ARB , BPC y CQA respectivamente.

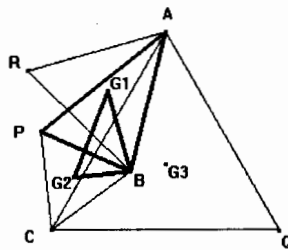


Afirmamos que son semejantes los triángulos G_1BG_2 y ABP ; en efecto,

$$\begin{aligned}\angle ABP &= \angle ABC + 60^\circ, \\ \angle G_1BG_2 &= \angle G_1BA + \angle ABC + \angle CBG_2 = \angle ABC + 60^\circ.\end{aligned}$$

Un cálculo sencillo nos muestra que $G_1B = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ y que $BG_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto por el criterio L.A.L concluimos que $\triangle G_1BG_2 \sim \triangle ABP$ y esto implicará que $G_1G_2 = \frac{AP}{\sqrt{3}}$.

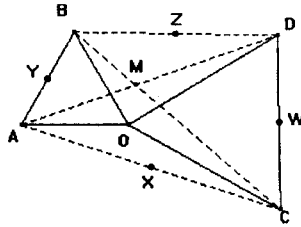
De manera similar demostramos que $G_2G_3 = \frac{BQ}{\sqrt{3}}$ y $G_3G_1 = \frac{CR}{\sqrt{3}}$. Luego del lema anterior concluimos que $G_1G_2 = G_2G_3 = G_3G_1$.



Observemos que la misma prueba funciona cuando los triángulos se construyen interiormente. \square

Lema 2.2. Sean OAB y OCD triángulos equiláteros, entonces los puntos medios X, Y, Z y W de AB, BD, CD y AC respectivamente forman un rombo con ángulos de 60° y 120° .

Demostración:

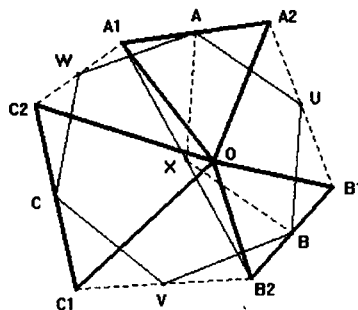


Observemos que $XY \parallel BC \parallel ZW$ y $YZ \parallel AD \parallel XW$, entonces el cuadrilátero $XYZW$ es un paralelogramo, por otra parte del hecho que los triángulos AOD y BOC son congruentes deducimos que $XYZW$ es un rombo. Sean M el punto de intersección de AD y BC y $x = \angle OBC = \angle OAD$, entonces $\angle AMB = 180^\circ - (\angle ABM + \angle BAM) = 180^\circ - (60^\circ + x + 60^\circ - x) = 60^\circ$, deducimos que $\angle XYZ = 60^\circ$ y $\angle YZW = 120^\circ$. \square

Lema 2.3. *Bajo las suposiciones del Teorema de la hélice, consideremos A, U, B, V, C, W los puntos medios de los lados $A_1A_2, A_2B_2, B_2B_1, B_1C_1, C_1C_2$ y C_2A_2 respectivamente. Entonces se tienen las siguientes relaciones:*

$AU = UB$ y $\angle AUB = 120^\circ$, $BV = VC$ y $\angle BVC = 120^\circ$ y finalmente $CW = WA$ y $\angle CWA = 120^\circ$.

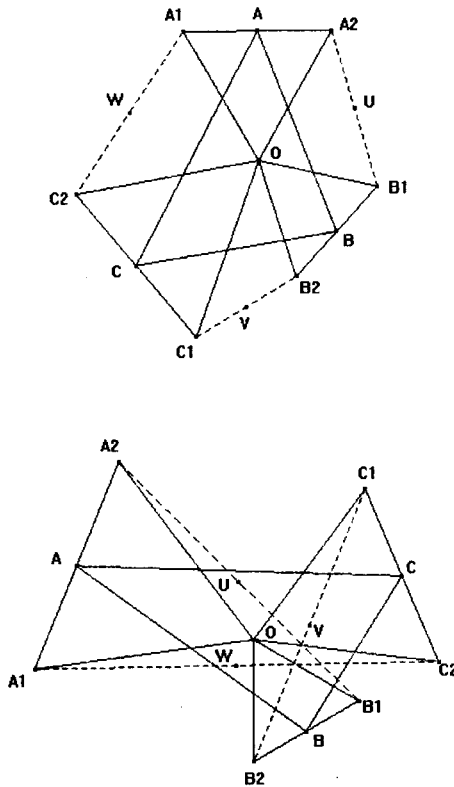
Demostración: Tracemos el segmento A_1B_2 y sea X su punto medio, entonces por el lema 2.2 tenemos que $AUBX$ es un rombo de ángulos de 60° y 120° , no es difícil constatar que $\angle AUB$ es de 120° y además $AU = UB$.



De manera totalmente análoga demostramos que $BV = VC$ y $\angle BVC = 120^\circ$ y finalmente $CW = WA$ y $\angle CWA = 120^\circ$. \square

Teorema 2.4. *Los teoremas de Napoleón y el de la Hélice Asimétrica son equivalentes.*

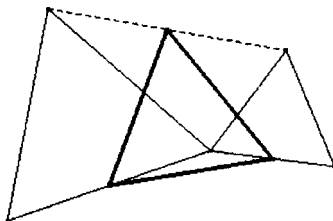
Demostración: Bajo la notación del lema anterior los puntos W , U y V son los baricentros de los triángulos equiláteros construidos exteriormente al triángulo ABC y por el teorema de Napoleón concluimos que es cierto el de la hélice asimétrica.



Nos falta mostrar que el teorema de la hélice asimétrica implica el de Napoleón. Lo cual será una consecuencia del Lema 2.3.

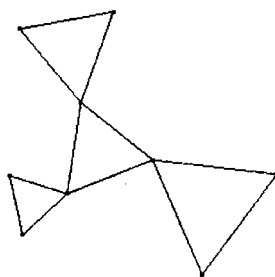
Sea ABC un triángulo cualquiera, sea O un punto en el plano (cualquiera!!). Construyamos una hélice de tal manera que OA , OB y OC sean alturas de los triángulos equiláteros que forman la hélice, como en las dos últimas figuras; entonces el Lema 2.3 muestra que los baricentros de los triángulos equiláteros construidos en el exterior (interior) del triángulo ABC coinciden con los puntos U , V y W de arriba, por lo cual concluimos que el teorema de la hélice implica el de Napoleón. \square

Observación. Un caso degenerado del teorema de la hélice asimétrica, es cuando uno de los triángulos equiláteros degenera en un punto, como se ilustra en la figura siguiente. No obstante, el resultado se sigue cumpliendo y la prueba es similar a la del teorema anterior.



3 Generalización del Teorema de La Hélice Asimétrica.

En esta sección trabajaremos con una hélice formada por cuatro triángulos equiláteros (como ilustra la siguiente figura) a la cual llamamos hélice generalizada.

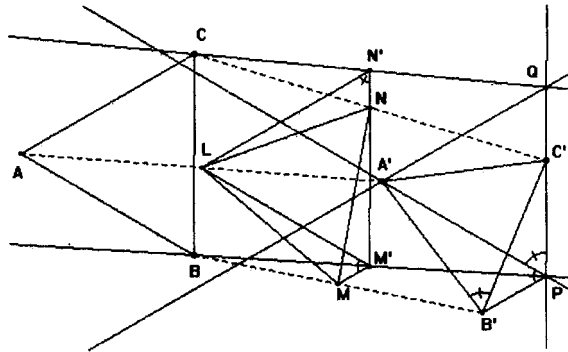


Lema 3.1. Si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son dos triángulos equiláteros con la misma orientación entonces los puntos medios de los segmentos AA' , BB' y CC' forman un triángulo equilátero.

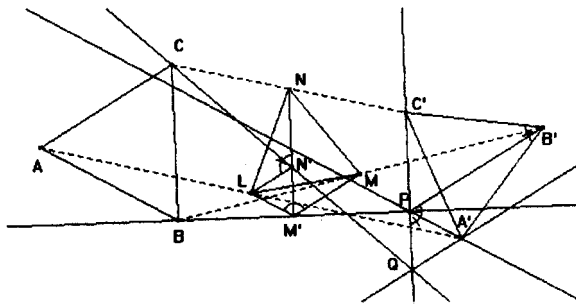
Demostración: Cuando los lados correspondientes de los triángulos son paralelos, el lema se sigue del hecho de que en un trapecio convexo la línea media tiene por longitud la semisuma de las bases. Cuando el trapecio no es convexo la línea media mide la semidiferencia de la base mayor y menor.

En el caso general hay dos posibilidades ilustradas por las figuras siguientes. Tracemos por A' rectas paralelas a AC y AB , y por

el punto C' tracemos una recta paralela a CB . Estas rectas determinan al $\triangle A'PQ$ el cual es equilátero y tiene la misma orientación que los originales. Sean L, M', N' los puntos medios de los segmentos AA', BP, CQ , respectivamente. El triángulo $LM'N'$ es equilátero (por el caso anterior). Sean L, M, N los puntos medios de AA', BB', CC' , respectivamente.



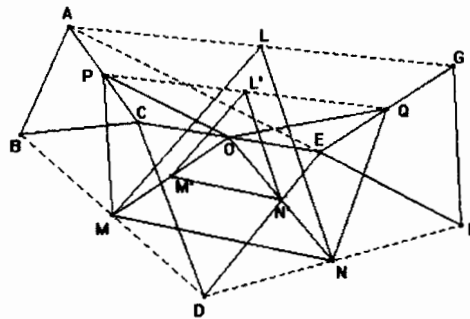
Es suficiente demostrar que $\triangle LMM' \cong \triangle LNN'$. Observemos que M', N y N' pertenecen a la línea media del trapecio $CBPQ$. Notemos también que $\triangle A'C'Q \cong \triangle A'B'P$. Por lo tanto $C'Q = B'P$ y esto implica que $NN' = MM'$.



Solo falta probar que $\angle LM'M = \angle LN'N$. Tenemos que $\angle LM'M = \angle A'PB'$, pues sus lados son paralelos. El cuadrilátero $A'B'PC'$ es cíclico porque si C' está entre P y Q , entonces $\angle A'B'C' = \angle A'PQ = 60^\circ$, y si C' no está entre P y Q entonces $\angle A'B'C' + \angle A'PC' = 180^\circ$. Así que $\angle A'PB' = 60^\circ = \angle LN'N$, o bien, $\angle A'PB' = 120^\circ = \angle LN'N$. \square

Lema 3.2. Sean ABC, CDE, EFG triángulos equiláteros orientados. Si L, M, N son los puntos medios de AG, BD, DF , respectivamente, entonces el triángulo LMN es equilátero.

Demostración: El teorema de la hélice implica que el triángulo PMO es equilátero, donde P, M, O son los puntos medios de los segmentos AC, BD, CE , respectivamente. Por la misma razón el triángulo ONQ es equilátero, donde N y Q son los puntos medios de DF y EG , respectivamente. Entonces, si L' es el punto medio de PQ , M' el punto medio de MO , y N' el punto medio de DE , el teorema de la hélice implica que el triángulo $L'M'N'$ es equilátero.

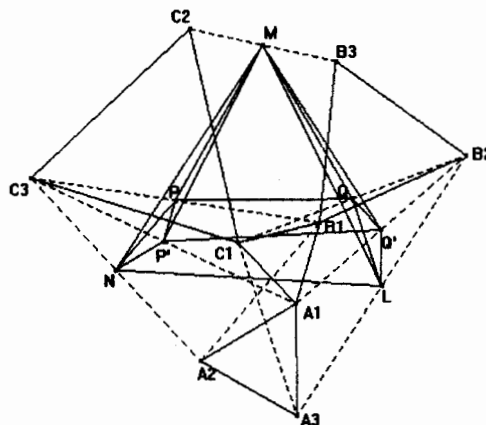


Observemos que LO es una diagonal del paralelogramo $POQL$ y además L' es su punto medio. Por tanto, $\triangle LMN \sim \triangle L'M'N'$. \square

Teorema de la Hélice Asimétrica Generalizado.

Sean $A_1B_1C_1, A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, C_1C_2C_3$ triángulos equiláteros orientados. Si L, M, N son los puntos medios de los segmentos A_3B_2, B_3C_2, C_3A_2 , respectivamente, entonces el triángulo LMN es equilátero.

Demostración:



Por el lema 3.1 el triángulo MPQ es equilátero, donde P y Q son los puntos medios de C_3B_1 y C_1B_2 , respectivamente.

Por el lema 3.2 $\triangle MP'Q'$ es equilátero, donde P' y Q' son los puntos medios de los segmentos C_3A_1 y A_1B_2 respectivamente.

Observemos que $PP' = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = QQ'$. Luego, $\triangle MQ'Q \cong \triangle MP'P$. Notemos que $NP' = \frac{1}{2}A_2A_1 = \frac{1}{2}A_3A_1 = LQ'$.

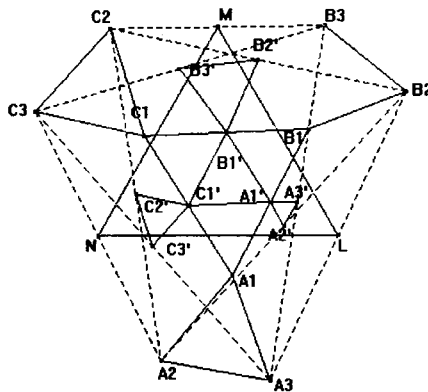
Se tiene también que $A_2B_1 = A_3C_1$ y por tanto, $NP = LQ$. Así que $\triangle NP'P \cong \triangle LQ'Q$.

Todo lo anterior implica que $\triangle NPM \cong \triangle LQM$ y esto, a su vez, implica que el triángulo LMN es equilátero. \square

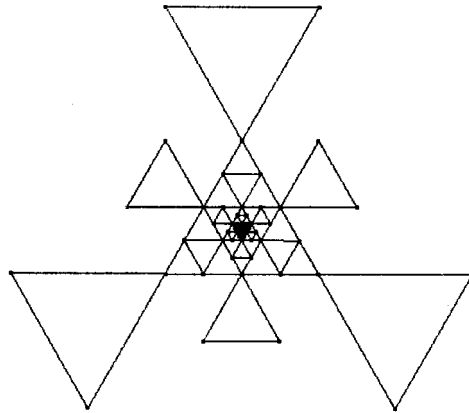
Para finalizar, basándonos en la última figura (no es inútil recordar que los triángulos son orientados), consideremos la siguiente construcción:

Sean $A'_1, A'_2, A'_3, B'_1, B'_2, B'_3, C'_1, C'_2, C'_3$, los puntos medios de los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3$, respectivamente.

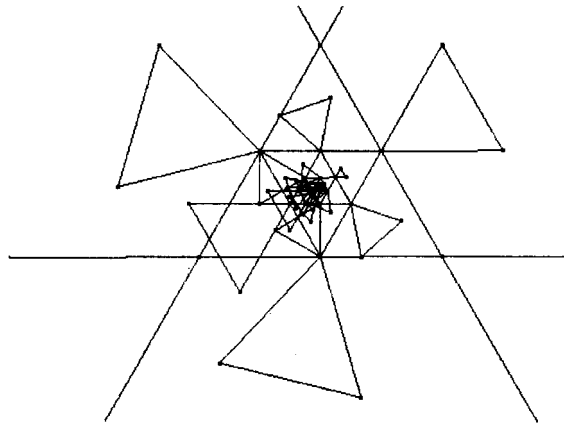
Los triángulos orientados $\triangle A'_1A'_2A'_3, \triangle B'_1B'_2B'_3, \triangle C'_1C'_2C'_3$, son equiláteros, por el lema 3.1. También el triángulo orientado $\triangle A'_1B'_1C'_1$ es equilátero, porque está formado por los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero. Entonces formamos otra hélice, de manera natural, a partir de la original.



Podemos repetir este proceso una infinidad de veces, obteniendo figuras como la siguiente:



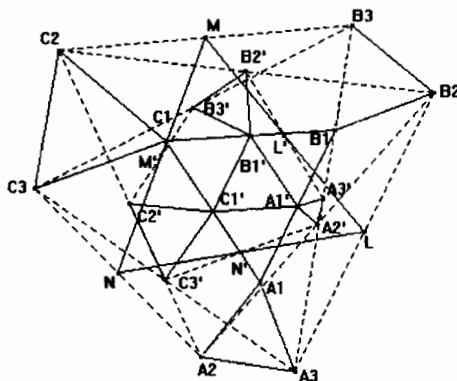
Haciendo experimentos computacionales, observamos que al comenzar con una hélice ligeramente asimétrica, las siguientes hélices no parecen seguir un patrón, de hecho, después de un número relativamente grande de iteraciones, las hélices se traslapan.



Sin embargo, los triángulos equiláteros que se obtienen de aplicar el teorema de la hélice generalizada satisfacen lo siguiente:

Proposición 3.3. *Basándonos en la figura siguiente, si L, M, N, L', M', N' son los puntos medios de $A_3B_2, B_3C_2, C_3A_2, A'_3B'_2, B'_3C'_2, C'_3A'_2$, respectivamente, entonces el triángulo equilátero $L'M'N'$ es el triángulo formado por los puntos medios del triángulo equilátero LMN .*

Demostración: Tenemos que $A'_2L \parallel A_2A_3$, $A'_2L = \frac{1}{2}A_2A_3$ y que $C'_3N \parallel A_2A_3$, $C'_3N = \frac{1}{2}A_2A_3$. Luego, $A'_2L \parallel C'_3N$. Por tanto, $\triangle A_2LN' \cong \triangle C'_3NN'$. Así que N' es el punto medio de LN . De manera similar, se demuestra que L' es el



punto medio de LM y M' es el punto medio de MN . \square

Comentarios finales.

(1) El Teorema de la hélice asimétrica es cierto para el caso en que los triángulos son semejantes entre sí, dando por resultado un triángulo semejante a los primeros (para una prueba ver la página www.cut-the-knot.com/ctk/NapoleonPropeller.shtml).

(2) Experimentos computacionales muestran que deberá existir una relación entre el Teorema de Morley y el de la hélice. Conjeturamos que el de la hélice deberá implicar el Teorema de Morley.

(3) Para finalizar proponemos los siguientes problemas:

- Dado un triángulo equilátero ABC encontrar todas sus hélices generalizadas asociadas, es decir, las hélices generalizadas que tienen por triángulo equilátero a ABC .
- A partir del Teorema de la hélice generalizada, formular una generalización del Teorema de Napoleón.

Referencias

- [1] L. Bankoff, P. Erdős and M. Klamkin, *The asymmetric propeller*, *Mathematics Magazine* **46** (5) (1973), 270–272.
- [2] *The Asymmetric Propeller*, *The College Mathematics Journal* **30** (1), 1999.
- [3] www.cut-the-knot.com/ctk/NapoleonPropeller.shtml

- [4] J. Wentworth, D. Smith, Geometría Plana y del Espacio, Porrúa 1990.