

# Como el área de la esfera es $4\pi r^2$ , entonces . . .

Ricardo Quintero

Depto. de Matemática Educativa

Cinvestav, IPN

`rquintero@mail.cinvestav.mx`

Juan José Rivaud

Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia

CINVESTAV, IPN

`jrivaud@mail.cinvestav.mx`

## Resumen

En este trabajo le presentamos al lector dos aspectos de una misma problemática estrechamente relacionados entre sí; el primero es el estudio de recubrimientos de la esfera por polígonos esféricos, en general regulares, que cumplen alguna otra condición, el segundo es el estudio de poliedros convexos cuyas caras están sujetas a distintas restricciones. Algunos resultados bien conocidos pero importantes, se derivan de forma totalmente elemental, tomando como punto de partida la fórmula para calcular el área de la esfera.

## 1 Triángulos y polígonos esféricos.

Para este trabajo son necesarias las fórmulas para calcular el área de triángulos esféricos y, en general, de polígonos esféricos. Para nuestros propósitos basta considerar polígonos en los cuales cada ángulo interior no excede  $\pi$  radianes, lo que implica que cada uno de estos polígonos puede situarse en media esfera. Bajo estas condiciones demostraremos dichas fórmulas, de las cuales, en caso de necesidad, podemos derivar versiones más generales.

Nuestro punto de partida será la fórmula para calcular el área de  $E(r)$ , la esfera de radio  $r$ , cuya demostración puede encontrar el lector en muchos libros de Geometría elemental, por ejemplo [1].

$$\text{Area}(E(r)) = 4\pi r^2.$$

Para obtener la fórmula para calcular el área de un triángulo esférico, necesitamos una definición y un par de observaciones. Por un *huso esférico* completo de magnitud  $\alpha$  entendemos la porción de esfera comprendida entre dos circunferencias de radio máximo que se intersectan formando un ángulo  $\alpha$ . Como se puede ver en la esfera de la figura 1, cada circunferencia de radio máximo esta situada en un plano que pasa por el centro de la esfera, que también es centro de la circunferencia de radio máximo. Los planos asociados a dos de tales circunferencias se intersectan formando un ángulo igual al ángulo que forman las circunferencias. Un huso esférico es la parte de la esfera situada dentro de un de los ángulos formado por los planos, y su magnitud es precisamente la medida de dicho ángulos. Cuando tomamos en cuenta no sólo un ángulo, sino un par de ángulos opuestos, tenemos el huso esférico completo.

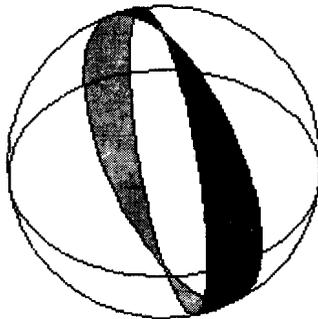


Figura 1: Huso esférico completo.

Observemos, primeramente, que dada una esfera de radio  $r$ , el área de  $H(\alpha)$ , un huso esférico completo de magnitud  $\alpha$ , es:

$$\text{Area}(H(\alpha)) = 4\alpha r^2$$

Para convencernos basta notar que a un huso esférico de magnitud  $\pi$  le corresponde un área de  $4\pi r^2$ , pues abarca la esfera completa, y aplicar una regla de tres.

Observemos, en segundo lugar, que si tenemos un huso completo de magnitud  $\alpha$  en la esfera de radio  $r$ , cualquier circunferencia de radio

máximo divide al huso en cuestión en dos partes de igual área. A cada punto del huso en una de las dos partes, corresponde su antípoda en la otra parte, es decir, cada mitad del huso se obtiene a partir de la otra mediante una simetría radial con respecto al centro de la esfera. Una consecuencia casi inmediata de la observación es el siguiente:

**Teorema 1.** *Consideremos una esfera de radio  $r$  y en ella un triángulo  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  con ángulos interiores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , cada uno de ellos menor o igual  $\pi$  radianes. Entonces:*

$$\text{Area}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

Como ilustra la figura 2, podemos situar el triángulo en media esfera. Consideremos las porciones de los husos esféricos de magnitudes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , correspondientes a los ángulos del triángulo y contenidos en la misma media esfera que éste. Estos husos cubren tres veces al triángulo, pero sólo una vez al resto de la media esfera. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \text{Area}(E(r)) = 2\pi r^2 = 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 2 \text{Area}(T(\alpha, \beta, \gamma))$$

y despejando  $\text{Area}(T(\alpha, \beta, \gamma))$ , obtenemos la fórmula buscada.

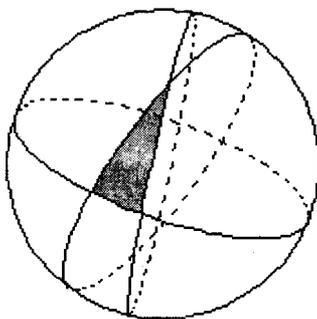


Figura 2: Triángulo esférico.

**Corolario 1.** *Los ángulos de un triángulo esférico siempre suman más de  $\pi$  radianes, o lo que es lo mismo, más de  $180^\circ$ .*

Notemos también que cuando  $\alpha = \beta = \gamma = \pi$  entonces  $\text{Area}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = 2\pi r^2$ , es decir, el triángulo ocupa toda la media esfera y por lo tanto sus lados cubren la circunferencia de radio  $r$  que la limita (figura 3a). A estos triángulos los llamamos degenerados, pues sus lados están *alineados*.

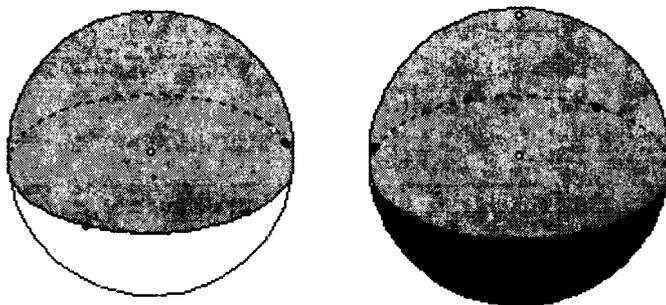


Figura 3: (a) Un triángulo esférico degenerado cubre un hemisferio completo y (b) Cubierta de la esfera formada por dos polígonos regulares degenerados.

**Teorema 2.** *Consideremos la mitad de una esfera de radio  $r$ , y en ella un polígono de  $n$  lados y ángulos interiores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , cada uno de ellos menor o igual a  $\pi$  radianes. Denotemos dicho polígono por  $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Entonces*

$$\text{Area}(P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi)r^2$$

El teorema anterior se demuestra dividiendo el polígono en triángulos esféricos y aplicando la fórmula para calcular el área del triángulo. Los detalles se los dejamos al lector. Cuando todos los ángulos del polígono son iguales a  $\pi$  decimos que éste es degenerado y, al igual que en el caso del triángulo, ocupa toda la media esfera y sus lados cubren la circunferencia que la limita.

Un caso importante para nosotros es el de los polígonos de  $n$  lados con todos los ángulos interiores iguales entre sí. En este caso, si denotamos por  $\alpha$  al valor común de los ángulos interiores y por  $P(n, \alpha)$  a uno de tales polígonos, el área ésta dado por:

$$\text{Area}(P(n, \alpha)) = (n\alpha - (n - 2)\pi)r^2,$$

notemos que, como el área no puede ser negativa, el ángulo interior  $\alpha$  debe cumplir la desigualdad  $n\alpha - (n - 2)\pi > 0$  la cual es equivalente a

$$\alpha > \frac{(n - 2)\pi}{n}.$$

Si un polígono tiene todos sus ángulos interiores iguales y sus lados congruentes entre sí, decimos que es regular. Como nos muestra

la figura 3, el que los ángulos interiores de un polígono degenerado sean iguales no implica que los lados lo sean. En el caso de polígonos no degenerados, la igualdad de los ángulos interiores implica la igualdad de las longitudes de sus lados; es decir la igualdad de los ángulos interiores implica que se trata de polígonos regulares. Asimismo dos polígonos regulares del mismo número de lados con ángulos interiores iguales son congruentes. Al lector le resultará interesante verificar estas aseveraciones, las cuales por cierto no son válidas en el plano.

Una manera de construir polígonos regulares con  $n$  lados es tomar un punto en la esfera, el polo norte por ejemplo, y dividir el ecuador en  $n$  partes iguales. A continuación se trazan los meridianos — esto es, los segmentos de círculo máximo que tienen por extremos los polos— que pasan por los puntos que dividen el ecuador, sobre estos meridianos se toman puntos de tal forma que todos ellos disten lo mismo del polo norte, o dicho de otra manera, que todos ellos se encuentran sobre el mismo paralelo. Dichos puntos serán los vértices de un polígono regular de  $n$  lados.

Notemos que  $\alpha$ , el ángulo interior de cada uno de estos polígonos, toma el valor  $\pi$ , cuando los vértices distan  $\pi/2$  del polo norte, es decir, cuando están sobre el ecuador, y su valor disminuye, tendiendo a  $(n - 2)\pi/n$ , cuando la distancia al polo norte, el centro común de esta familia de polígonos, tiende a cero.

## 2 Recubrimientos de la esfera por polígonos regulares.

Un hecho que no escapa a la atención de niños y jóvenes es que el plano lo podemos cubrir con piezas iguales a un polígono regular, sólo si dicho polígono es un triángulo, un cuadrado o un hexágono. En el caso del triángulo se encuentran seis piezas en cada vértice, en el del cuadrado cuatro y en el del hexágono, tres. Además de cubrir totalmente el plano, le hemos impuesto a tales recubrimientos las condiciones de que sus piezas pueden ser ajenas o bien tener vértices o lados en común, pero no puede un vértice de una pieza estar sobre un lado de otra ni dos piezas pueden traslaparse.

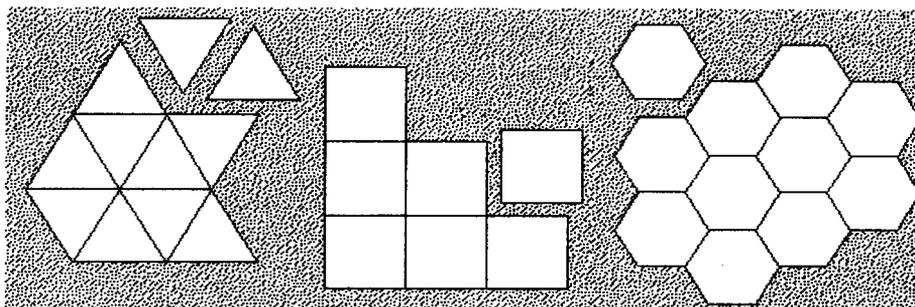


Figura 4: Pavimentando el plano con polígonos regulares.

La propiedad arriba mencionada de los recubrimientos del plano, el lector puede verificarla analizando lo que pasa en un vértice del recubrimiento en cuestión. Deberá tener en cuenta que los ángulos de las piezas incidentes en dicho vértice suman  $2\pi$  radianes, y que en el plano los ángulos interiores de un polígono regular de  $n$  lados miden  $(n - 2)\pi/n$  radianes.

En esta sección estamos interesados en el mismo problema, pero sobre una esfera. Por simplicidad supondremos que la esfera tiene radio 1, lo cual no implica pérdida de generalidad. Empecemos viendo que sucede si en un vértice de nuestro recubrimiento se encuentran únicamente dos polígonos regulares esféricos de  $n$  lados; en este caso los ángulos internos de los polígonos en cuestión son iguales a  $\pi$  radianes y se trata de polígonos degenerados que como sabemos cubren exactamente media esfera. Acorde con ello, nuestro recubrimiento consta de dos de tales polígonos, como se ilustra en la figura 3b. Observemos que esta posibilidad no se da en el plano.

Llamemos  $m$  al número de piezas del recubrimiento que se encuentran en un vértice. Teniendo resuelto el caso degenerado, podemos suponer que  $m > 2$ . Si las piezas son iguales a  $P(n, \alpha)$ , el polígono regular de  $n$  lados con ángulos interiores iguales a  $\alpha$ , entonces  $2\pi = m\alpha$  ó  $\alpha = 2\pi/m$ , y el área está dada por

$$\text{Area}(P(n, \alpha)) = n\alpha - (n - 2)\pi = \left(\frac{2n}{m} - (n - 2)\right)\pi.$$

Entonces  $2n/m - (n - 2)\pi > 0$ , de donde  $2n + 2m - nm > 0$ , condición que es equivalente a:

$$(n - 2)(m - 2) < 4$$

y por lo que hemos visto, podemos suponer que  $n > 2$  y  $m > 2$ . Las únicas parejas  $\{n, m\}$  de números naturales que cumplen las condiciones

anteriores son:

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\} \text{ y } \{5, 3\}.$$

Dichas parejas dan los valores siguientes para los ángulos interiores de las posibles piezas:

$m$	$\alpha$
3	$\frac{2\pi}{3}$
4	$\frac{\pi}{2}$
5	$\frac{2\pi}{5}$

De acuerdo con lo visto, si queremos tapizar la esfera de radio 1 con polígonos esféricos regulares no degenerados, estos no pueden ser distintos de:

$$P(3, \frac{2\pi}{3}), P(3, \frac{\pi}{2}), P(3, \frac{2\pi}{5}), P(4, \frac{2\pi}{3}), P(5, \frac{2\pi}{3}).$$

Veamos ahora si podemos construir una cubierta de la esfera con piezas iguales a estos polígonos. Para ello primero calculemos, como se muestra en la siguiente tabla, cuántos de cada uno de ellos se requerirán para cubrir un área igual a  $4\pi$ .

Polígono	Area	Piezas
$P(3, \frac{2\pi}{3})$	$\pi$	4
$P(3, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	8
$P(3, \frac{2\pi}{5})$	$\frac{\pi}{5}$	20
$P(4, \frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	6
$P(5, \frac{2\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	12

Por último podemos convenceremos de que en cada caso efectivamente se puede cubrir la esfera de radio 1 con las piezas en cuestión.

Empecemos con el caso en el que las piezas son iguales a  $P(3, \frac{2\pi}{3})$ . Dado que el ángulo interior de este polígono es  $\frac{2\pi}{3}$ , en un punto de la esfera, digamos en el polo norte, podemos colocar 3 de dichas piezas. No es difícil verificar que el espacio vacante sobre la superficie de la esfera después de colocar los tres triángulos, necesariamente es congruente con  $P(3, \frac{2\pi}{3})$ . En efecto, los arcos que limitan dicho espacio son lados iguales de las 3 copias de  $P(3, \frac{2\pi}{3})$  previamente colocadas, y los ángulos entre dichos arcos son de  $2\pi - (\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$ . Un fenómeno similar puede observarse en los otros casos, comenzamos colocando copias de

$P(n, \alpha)$  alrededor de un punto. A medida que colocamos más copias de  $P(n, \alpha)$ , el área no ocupada de la esfera disminuye, pero en tanto haya un espacio libre, sus rincones permiten acomodar copias de  $P(n, \alpha)$ , hasta que finalmente el espacio vacante se reduce a una región congruente con  $P(n, \alpha)$ . En la figura se muestran los cubrimientos de la esfera correspondientes a la tabla. Un buen ejercicio para el lector es dibujar y analizar cuidadosamente la construcción arriba descrita en cada caso individual.

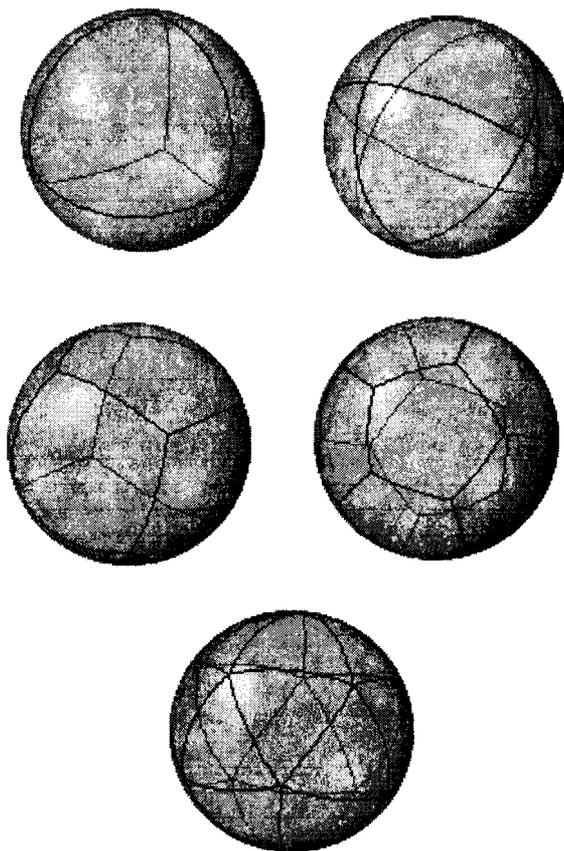


Figura 5: Recubrimientos de la esfera con polígonos regulares iguales.

### 3 Recubrimientos de la esfera y poliedros.

Con toda seguridad el lector estará pensando que le estamos haciendo perder el tiempo, pues los resultados que acabamos de ver son equivalentes a lo que él ya conocía acerca de los sólidos platónicos o poliedros

regulares. En efecto si consideramos los vértices de nuestros recubrimientos y en vez de unirlos con segmentos de círculos máximos los unimos por las cuerdas correspondientes, obtenemos poliedros regulares y viceversa, si tenemos un poliedro regular y lo inscribimos en una esfera y ahora sustituimos las aristas por segmentos de círculos máximos obtenemos un recubrimiento regular.

Pero nuestra intención es distinta y consiste en mostrar que restringiéndonos a la esfera y su geometría también podemos obtener dichos resultados con argumentos de gran sencillez y, como veremos en la sección siguiente, el tipo de razonamiento utilizado puede aprovecharse para demostrar algunos resultados de naturaleza más general.

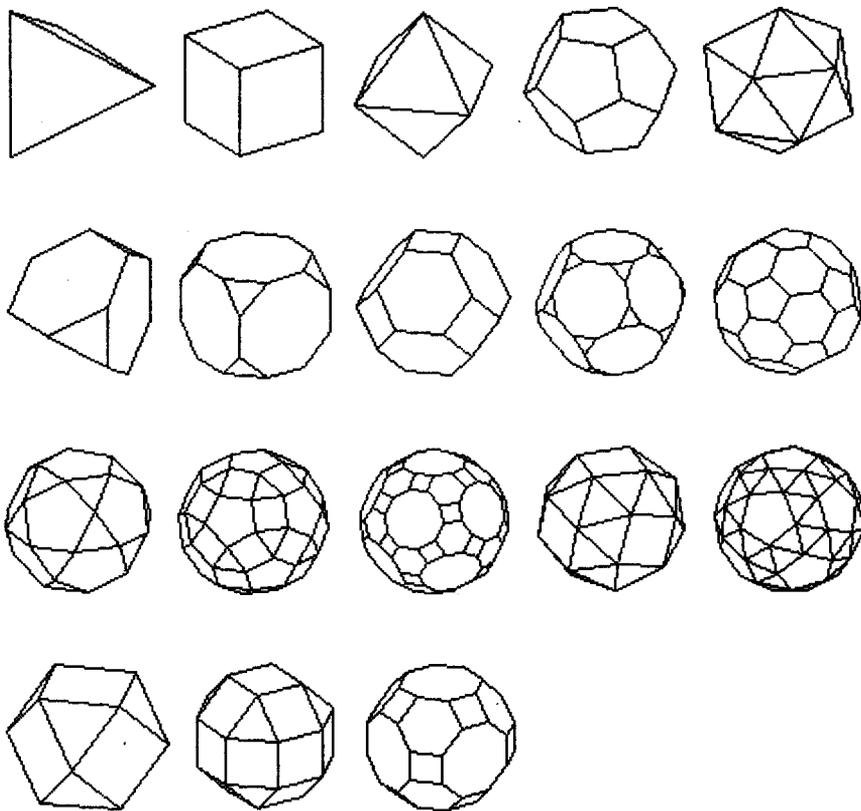


Figura 6: Poliedros arquimedianos

Por otra parte, lo que hasta aquí hemos visto no termina con el estudio de los recubrimientos de la esfera sino, por el contrario, es solo el principio: ¿Cómo están relacionados entre si los recubrimientos vistos hasta ahora?, ¿Qué pasa si aceptamos usar piezas con forma de

polígonos regulares pero de distinta especie (octágonos y triángulos por ejemplo)?, ¿Qué pasa cuando no pedimos regularidad de las piezas?. Estas son preguntas naturales con las cuales puede uno continuar, si bien el responder algunas de ellas requiere de métodos menos elementales que los utilizados en este artículo. Por ejemplo, cada uno de los poliedros de la familia que se muestra en la figura 6, tiene planos de simetría que descomponen la esfera en familias de triángulos que permiten generar poliedros por la acción de grupos de simetrías. El lector interesado en enterarse de estos temas, puede consultar las referencias que se encuentran al final de este artículo.

## 4 Los teoremas de Descartes y de Euler.

Cuando dibujamos el desarrollo de un poliedro convexo en una superficie plana, por ejemplo en una hoja de cartón, para poder doblar la figura en un modelo tridimensional tenemos que recortar el cartón sobrante alrededor del dibujo. La medida angular total del cartón recortado alrededor de un vértice dado, indica qué tan puntiagudo es el modelo tridimensional en dicho vértice: si es poco lo que se recorta, el modelo resulta casi plano en la vecindad del vértice en cuestión, y entre más recortamos, se tienen que hacer dobleces más pronunciados para armar el modelo. Más formalmente, se llama déficit angular  $\delta(v)$  del vértice  $v$  de un poliedro convexo, a la diferencia entre  $2\pi$  y la suma de los ángulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  que inciden en  $v$ :

$$\delta(v) = 2\pi - \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

**Teorema de Descartes.** *En cualquier poliedro convexo, la suma de los déficit angulares de todos sus vértices es igual a  $4\pi$ .*

Simbólicamente, si un poliedro convexo tiene vértices  $v_1, \dots, v_V$ , entonces

$$\sum_{i=1}^V \delta(v_i) = 4\pi.$$

Para probar esta identidad, utilizaremos una forma de asignar a cada poliedro convexo  $P$ , una cubierta de la esfera formada por polígonos esféricos que no se traslapan, distinta de la proyección central usada en secciones anteriores. Consideremos entonces un poliedro convexo  $P$ ,

y tomemos una copia de la esfera unitaria. A cada cara del poliedro  $P$ , asociemos un radio de la esfera cuya dirección sea perpendicular al plano de la cara y fijémonos en los puntos determinados por dichos radios sobre la superficie de la esfera. A continuación, unamos con un arco de círculo máximo aquellos pares de puntos tales que las dos caras correspondientes tienen una arista en común. Nótese que cada polígono esférico en la cubierta recién construida, está asociado a un vértice del poliedro  $P$ . Ahora bien, el ángulo sólido que determina a un polígono esférico de la cubierta, y el ángulo sólido formado en el vértice correspondiente del polígono original, son lo que en geometría sólida se denominan ángulos sólidos polares: si se tiene un ángulo sólido determinado por una familia de planos que pasan por un punto y desde otro punto se trazan las semirectas normales a los planos, se forma un nuevo ángulo sólido que se dice polar del primero. La relación de polaridad es simétrica, es decir, si un ángulo es polar de otro, este otro ángulo es también polar del primero, y no es difícil darse cuenta que los ángulos diedros de un ángulo sólido, son suplementarios de los ángulos planos del correspondiente ángulo sólido polar. Entonces, si en un vértice  $v_i$  del poliedro  $P$  inciden los ángulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i}$ , necesariamente los ángulos entre los lados del polígono esférico asociado son  $\pi - \alpha_1, \dots, \pi - \alpha_{k_i}$ , y el área del polígono esférico es entonces:

$$\sum_{j=1}^{k_i} (\pi - \alpha_j) - (k_i - 2)\pi = 2\pi - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j = \delta(v_i)$$

En otras palabras, en la cubierta que construimos de la esfera, el área de cada uno de los polígonos esféricos que la constituyen, es igual al déficit del vértice correspondiente del poliedro  $P$ . Sumando las áreas de todos los polígonos que forman la cubierta de la esfera, obtenemos  $\sum_{i=1}^V \delta(v_i) = 4\pi$ , que es lo que queríamos demostrar.

A partir del teorema de Descartes, podemos demostrar el famoso

**Teorema de Euler.** *Si  $P$  es un poliedro convexo con  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras, entonces*

$$V - A + C = 2.$$

Para demostrar el teorema de Euler, consideraremos la proyección central del poliedro  $P$  en una esfera, que sin pérdida de generalidad

podemos suponer de radio 1. Por el teorema de Descartes, sabemos que

$$4\pi = \sum_{i=1}^V \delta(v_i) = \sum_{i=1}^V \left( 2\pi - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j \right) = 2\pi V - \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j$$

La última doble suma en la anterior cadena de identidades, es la suma de todos los ángulos en los vértices de  $P$ , que es igual a la suma de los ángulos interiores de todas las caras del poliedro. Si denotamos por  $\beta_1, \dots, \beta_{l_i}$  a los ángulos interiores de la  $i$ -ésima cara de  $P$ , entonces

$$\sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{l_i} \beta_j$$

Ahora bien, si la  $i$ -ésima cara de  $P$  tiene  $e_i$  lados, se tiene

$$\sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{l_i} \beta_j = \sum_{i=1}^C (e_i - 2)\pi = 2\pi A - 2\pi C$$

Donde la última identidad se desprende del hecho de que al sumar el número de aristas de todas las caras del poliedro, como cada arista es común a dos caras, cada arista del poliedro se cuenta dos veces en dicha suma. Poniendo todo junto se tiene

$$4\pi = 2\pi V - (2\pi A - 2\pi C)$$

y cancelando  $2\pi$  se tiene  $2 = V - A + C$ , lo que se quería demostrar.

Es interesante observar que del teorema de Euler se desprende el teorema de Descartes. En efecto, si no suponemos de entrada que la suma de los defectos angulares en los vértices de un poliedro es  $4\pi$ , de cualquier manera el razonamiento de los párrafos anteriores muestra que

$$\sum_{i=1}^V \delta(v_i) = 2\pi(V - A + C)$$

y si se sabe que  $V - A + C = 2$ , entonces entonces la suma de los defectos angulares necesariamente es  $4\pi$ .

Del teorema de Euler se conocen multitud de pruebas distintas. Una demostración que no hace uso del teorema de Descartes es la siguiente: Consideremos un poliedro convexo  $P$ , y consideremos una esfera con centro en el interior de  $P$ , y de radio suficientemente grande para que  $P$

quede totalmente contenido en su interior. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el radio de la esfera es 1. Proyectemos ahora los vértices y aristas de  $P$  desde el centro hacia la superficie de la esfera. Esto origina una cubierta de la esfera por polígonos esféricos, de tal manera que a cada vértice de  $P$  corresponde un único punto de la esfera, a cada arista de  $P$  un arco de círculo máximo, y cada cara de  $P$  corresponde un polígono esférico, de tal forma que el número  $V$  de vértices, el número  $A$  de aristas y el número  $C$  de caras son idénticos para  $P$  y su imagen esférica. Consideraremos ahora, para la imagen esférica de  $P$ , la expresión

$$\sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^{k_i} \omega_j = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{l_i} \theta_j$$

donde  $\omega_1, \dots, \omega_{k_i}$  son los ángulos que inciden, en la superficie de la esfera, en la imagen del vértice  $v_i$ , y  $\theta_1, \dots, \theta_{l_i}$  son los ángulos interiores de la imagen de la  $i$ -ésima cara de  $P$ , la cual es un polígono esférico que denotaremos  $F_i$ . Como la proyección de  $P$  cubre la esfera, los ángulos alrededor de cada vértice forman una vuelta completa, por lo cual

$$\sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^{k_i} \omega_j = 2\pi V.$$

Por otra parte sabemos como se relaciona la suma de los ángulos interiores de un polígono esférico con el área del mismo, y podemos escribir

$$\sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^{l_i} \theta_j = \sum_{i=1}^C [(e_i - 2)\pi + \text{Area}(F_i)]$$

donde  $e_i$  es el número de aristas del polígono esférico  $F_i$ . Esta última suma vale  $2\pi A - 2\pi C + 4\pi$ , y por lo tanto

$$2\pi V = 2\pi A - 2\pi C + 4\pi.$$

Al cancelar  $2\pi$ , se tiene lo que se quería demostrar.

Entre otras aplicaciones, la fórmula de Euler permite establecer, en forma combinatoria, condiciones necesarias para la existencia de poliedros convexos con ciertas características. Por ejemplo, es fácil determinar todos los poliedros cuyas caras tienen todas  $p$  lados, y que tienen el mismo número  $q$  de aristas en cada vértice. En efecto, en dicho caso

$$2A = pC = qV$$

como según el teorema de Euler  $V - A + C = 2$ , entonces

$$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2$$

de donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

esta identidad junto con las restricciones  $p \geq 3$ ,  $q \geq 3$  y  $A \geq 6$  (el lector puede reflexionar porqué no existe un poliedro con menos elementos que el tetraedro), implican que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{3}.$$

La tabla siguiente muestra los posibles valores de  $p$  y  $q$ , junto los correspondientes valores de  $V$ ,  $A$  y  $C$  que se derivan de las igualdades  $2A = pC = qV$ .

$p$	$q$	$V$	$A$	$C$
3	3	4	6	4
4	3	8	12	6
3	4	6	12	8
5	3	20	30	12
3	5	12	30	20

Nótese que la fórmula de Euler nos permite afirmar que existen no más de 5 poliedros con caras con el mismo número  $p$  de lados, y el mismo número  $q$  de aristas en cada vértice. Dichos poliedros tendrían que tener las características que indica la tabla anterior. Sin embargo, no sabemos de antemano si tales figuras pueden efectivamente realizarse en el espacio tridimensional. En el caso de este ejemplo, los Sólidos Platónicos, que construimos en la primera parte mediante recubrimientos de la esfera, realizan las características que indica la tabla, y tienen la propiedad adicional de que las caras son todas polígonos regulares, y no sólo caras con el mismo número de aristas.

## Referencias

- [1] L. Lines, *Solid Geometry*, Dover, New York, 1965.

- [2] Z. Har'El, *Uniform Solution for Uniform Polyhedra*, *Geometriae Dedicata* **47**: 57–100, 1993.
- [3] M. J. Wenninger, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.