

# Los espacios métricos de Barbilian y el plano hiperbólico

Patricia Souza

Instituto de Matemáticas, UNAM

Circuito Exterior

Ciudad Universitaria

04510 México, D.F.

souza@math.unam.mx

En 1934 el matemático rumano Dan Barbilian (1895-1961) creó un tipo de espacio métrico bidimensional que arroja luz sobre la métrica del plano hiperbólico. El propósito de esta nota es presentar los espacios métricos de Barbilian y demostrar que el modelo de Poincaré del plano hiperbólico es precisamente uno de ellos.

## 1 El disco de Poincaré

Trabajaremos aquí con una de las diversas representaciones del plano hiperbólico: el *disco de Poincaré*. Éste es el disco unitario  $\Delta^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  centrado en el origen, delimitado por la circunferencia unitaria  $S^1$  y provisto de la *distancia hiperbólica* definida como

$$\delta(z_1, z_2) = \ln \frac{(z_0 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_0 - z_1)(z_3 - z_2)} \text{ para } z_1, z_2 \in \Delta^2$$

donde los puntos  $z_0, z_3 \in S^1$  son relativos a  $z_1, z_2$  (véase la Figura 1). Son los puntos de intersección de  $S^1$  con el (único) arco de círculo o recta que pasa por  $z_1, z_2$  y que corta perpendicularmente a  $S^1$ .

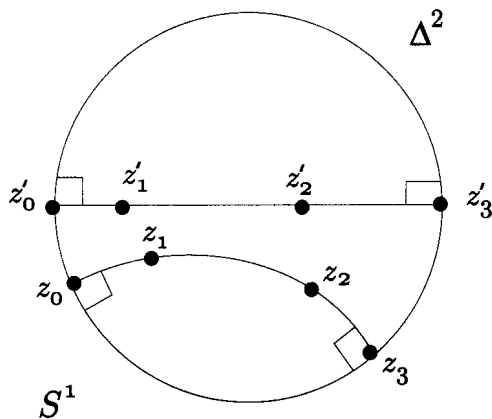


Figura 1.

Este espacio métrico es un objeto de estudio clásico de la geometría riemanniana y el lector puede analizarlo detalladamente con la ayuda de textos como [1] por M. Do Carmo y [8] por A. Verjovsky. Por otro lado, J. Stillwell presenta en [6] artículos originales como el del matemático italiano Eugenio Beltrami que hizo contundente la validez de la geometría hiperbólica ante la comunidad matemática en 1868.

Pero en esta ocasión seguiremos el original camino de D. Barbilian que presentan P. Kelly y G. Matthews en [3] y que no requiere más que un conocimiento elemental del plano euclidiano.

## 2 Los espacios métricos de Barbilian

Considérese cualquier curva de Jordan  $C$  en el plano euclidiano  $E^2$ . D. Barbilian definió una métrica para los puntos del plano que se encuentran al interior de la curva  $C$ .

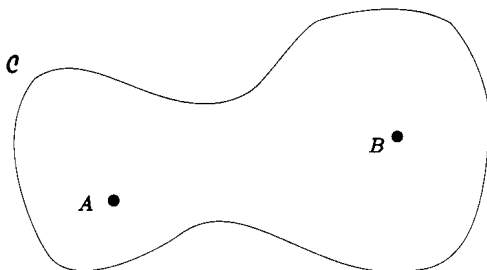


Figura 2.

Para comprender esta nueva métrica, es esencial fijar dos puntos  $A$  y  $B$  al interior de  $\mathcal{C}$  y considerar la razón

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} \text{ para toda } X \in \mathcal{C}$$

donde  $d(\cdot, \cdot)$  denota a la métrica euclidiana en  $E^2$ .

Si  $A = B$  entonces esta razón vale 1 en todo punto de la curva  $\mathcal{C}$ .

Si  $A \neq B$  entonces esta razón vale 1 en los puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  con la mediatriz de  $A$  y  $B$ , misma que separa así a los puntos de  $\mathcal{C}$  para los cuales

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} < 1 \text{ (del lado de } A) \quad \text{y} \quad \frac{d(X, A)}{d(X, B)} > 1 \text{ (del lado de } B)$$

Así, la función

$$f : \mathcal{C} \rightarrow (0, \infty) \quad X \mapsto \frac{d(X, A)}{d(X, B)}$$

permite discriminar a los puntos de la curva según éstos se encuentren relativamente más cerca de  $A$  o de  $B$ . En el espacio euclidiano, ésta es una función positiva continua de dominio compacto, luego  $f$  alcanza en  $\mathcal{C}$  un valor positivo mínimo y uno máximo. Se define así

$$r(A, B) = \max \left\{ \frac{d(X, A)}{d(X, B)} : X \in \mathcal{C} \right\}$$

sabiendo que existe un punto  $P^* \in \mathcal{C}$ , no necesariamente único, que es el más cercano relativamente a  $B$  que a  $A$ :

$$r(A, B) = \frac{d(P^*, A)}{d(P^*, B)}$$

mientras que existe  $Q^* \in \mathcal{C}$ , el punto más cercano relativamente a  $A$  que a  $B$ , tal que

$$r(B, A) = \frac{d(Q^*, B)}{d(Q^*, A)}$$

La Figura 3 muestra un caso muy sencillo en el cual los puntos  $P^*$  y  $Q^*$  son evidentes.

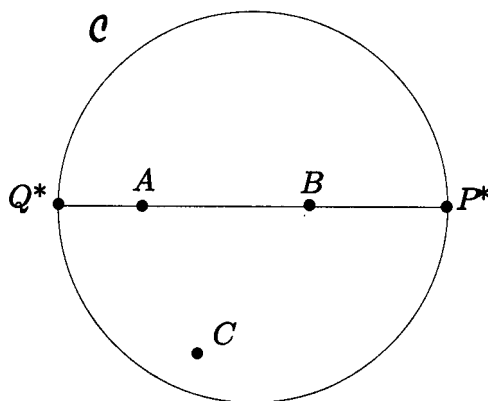


Figura 3.

Obsérvese que  $r(A, B) = 1$  si  $A = B$ ,  $r(A, B) > 1$  si  $A \neq B$  y que en general  $r(A, B) \neq r(B, A)$ . Así que  $r$  no puede ser la métrica que se busca. Pero es muy fácil arreglarla: su *logaritmo* vale cero si  $A = B$ , y es positivo en cualquier otro caso. Y para obtener simetría sin perder la propiedad anterior, basta tomar *el promedio* de dichos logaritmos

$$\frac{1}{2} [\ln r(A, B) + \ln r(B, A)] = \frac{1}{2} \ln [r(A, B)r(B, A)]$$

donde el factor constante  $\frac{1}{2}$  no es relevante.

**Definición 1.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva de Jordan dada en el plano euclidiano. Entonces la *métrica de Barbilian* se define como

$$\delta(A, B) = \ln [r(A, B)r(B, A)]$$

para  $A, B$  dos puntos cualesquiera al interior de  $\mathcal{C}$ .

Si  $P^*, Q^*$  son los puntos relativamente más cercanos a  $B$  y a  $A$ , respectivamente, entonces

$$\delta(A, B) = \ln \left[ \frac{d(P^*, A) d(Q^*, B)}{d(P^*, B) d(Q^*, A)} \right]$$

El lector podrá comprobar fácilmente que  $\delta$  es en efecto una métrica para el espacio de Barbilian delimitado por la curva  $\mathcal{C}$ .

### 3 Solución geométrica

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos dados al interior de una curva de Jordan  $\mathcal{C}$ . En la Figura 3 fue trivial determinar los puntos  $P^*$  y  $Q^*$  que permiten

obtener  $\delta(A, B)$ . Pero basta hacer lo mismo para los puntos  $A$  y  $C$  para convencerse de que en general esto no es tan sencillo. Concretamente, si  $R^* \in C$  es el punto relativamente más cercano a  $C$  que a  $A$ , se intuye que es único y que se encuentra muy cerca de  $C$ , pero no se sabe exactamente dónde. El objetivo de esta sección es determinar geoméricamente cualquier punto como  $R^*$  y obtener así  $\delta(A, B)$  en general.

Como siempre se cumple que  $r(A, B) \geq 1$ , tiene sentido examinar las curvas de nivel  $k \geq 1$  en el plano  $E^2$  de la función dada por  $X \mapsto \frac{d(X, A)}{d(X, B)}$ . Éste es un tema clásico de la geometría euclidiana y fue resuelto hacia el año 225 a.C. por el geómetra griego Apolonio de Perga.

**Definición 2.** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos entonces el lugar geométrico en  $E^2$  dado por  $\mathcal{A}_k : \frac{d(X, A)}{d(X, B)} = k$  para  $k > 0$  es llamado *círculo de Apolonio*.

Así, cada par de puntos en el plano euclidiano tiene asignada toda una familia de círculos de Apolonio. Es evidente que el círculo de Apolonio  $\mathcal{A}_1$  es la mediatriz de  $A$  y  $B$ . Para  $k > 1$ , considérese la Figura 4. En ella, desde  $A$  se traza un segmento de longitud  $k$  secante a la recta  $AB$ : con  $k - 1 > 0$  unidades de  $A$  a  $S$  y una más de  $S$  a  $T$ .

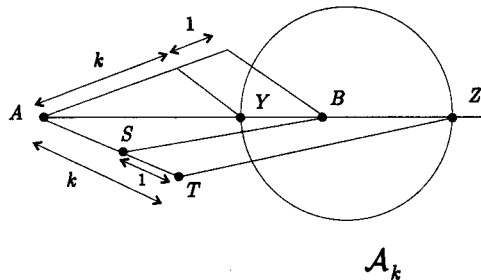


Figura 4.

Por tratarse del plano euclidiano, sabemos que por  $T$  pasa una única recta paralela a  $BS$  que se intersecta en  $Z$  con la recta  $AB$ . Entonces, por un teorema de Tales, las paralelas  $SB$  y  $TZ$  preservan la proporcionalidad entre los lados de los triángulos  $ASB$  y  $ATZ$ . Por consiguiente,

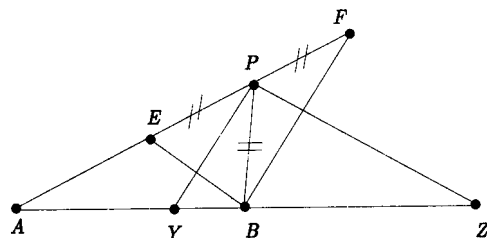
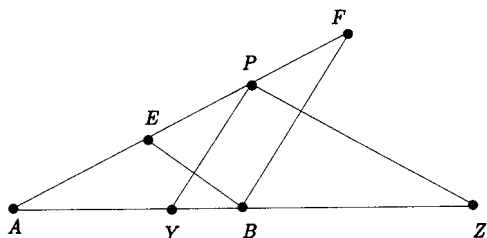
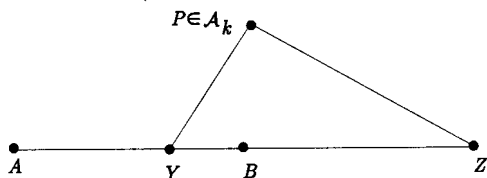
$$\frac{d(Z, A)}{d(Z, B)} = \frac{d(T, A)}{d(T, S)} = \frac{k}{1} = k$$

de modo que  $Z$  es un punto sobre la recta  $AB$  que pertenece al lugar geométrico  $\mathcal{A}_k$ .

En la misma Figura 4 se emplea un segmento de longitud  $k+1$  para determinar un nuevo punto  $Y \in \mathcal{A}_k$  sobre la recta  $AB$ . Así  $A, Y, B, Z$  son colineales y es fácil comprobar que  $B$  se encuentra ligeramente más cerca de  $Y$  que de  $Z$ .

**Teorema 1.** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos del plano euclidiano y si  $k > 1$  entonces la Figura 4 es válida y el círculo de Apolonio  $\mathcal{A}_k$  es el círculo de diámetro  $YZ$ .

*Demostración:* Sea  $k > 1$ . Ya sabemos que los puntos  $Y, Z$  pertenecen tanto al círculo de Apolonio  $\mathcal{A}_k$  como al de diámetro  $YZ$ . Sea  $P \in \mathcal{A}_k$  un punto distinto de  $Y, Z$ . (Ver Figura 5a).



Figuras 5a, 5b y 5c.

Entonces por hipótesis

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = k$$

y se desea probar que  $P$  pertenece al círculo de diámetro  $YZ$ . Nuevamente por un teorema de Tales sabemos que esto equivale a pedir que el triángulo trazado en la Figura 5a sea rectángulo en  $P$ .

Ahora, por  $B$ , trácense las paralelas a  $PZ$  y  $PY$  que cortan a  $AP$  en los puntos  $E$  y  $F$ , respectivamente (Figura 5b). Se crea así un

Para comprender esta nueva métrica, es esencial fijar dos puntos  $A$  y  $B$  al interior de  $\mathcal{C}$  y considerar la razón

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} \text{ para toda } X \in \mathcal{C}$$

donde  $d(\cdot, \cdot)$  denota a la métrica euclidiana en  $E^2$ .

Si  $A = B$  entonces esta razón vale 1 en todo punto de la curva  $\mathcal{C}$ .

Si  $A \neq B$  entonces esta razón vale 1 en los puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  con la mediatriz de  $A$  y  $B$ , misma que separa así a los puntos de  $\mathcal{C}$  para los cuales

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} < 1 \text{ (del lado de } A) \quad \text{y} \quad \frac{d(X, A)}{d(X, B)} > 1 \text{ (del lado de } B)$$

Así, la función

$$f : \mathcal{C} \rightarrow (0, \infty) \quad X \mapsto \frac{d(X, A)}{d(X, B)}$$

permite discriminar a los puntos de la curva según éstos se encuentren relativamente más cerca de  $A$  o de  $B$ . En el espacio euclidiano, ésta es una función positiva continua de dominio compacto, luego  $f$  alcanza en  $\mathcal{C}$  un valor positivo mínimo y uno máximo. Se define así

$$r(A, B) = \max \left\{ \frac{d(X, A)}{d(X, B)} : X \in \mathcal{C} \right\}$$

sabiendo que existe un punto  $P^* \in \mathcal{C}$ , no necesariamente único, que es el más cercano relativamente a  $B$  que a  $A$ :

$$r(A, B) = \frac{d(P^*, A)}{d(P^*, B)}$$

mientras que existe  $Q^* \in \mathcal{C}$ , el punto más cercano relativamente a  $A$  que a  $B$ , tal que

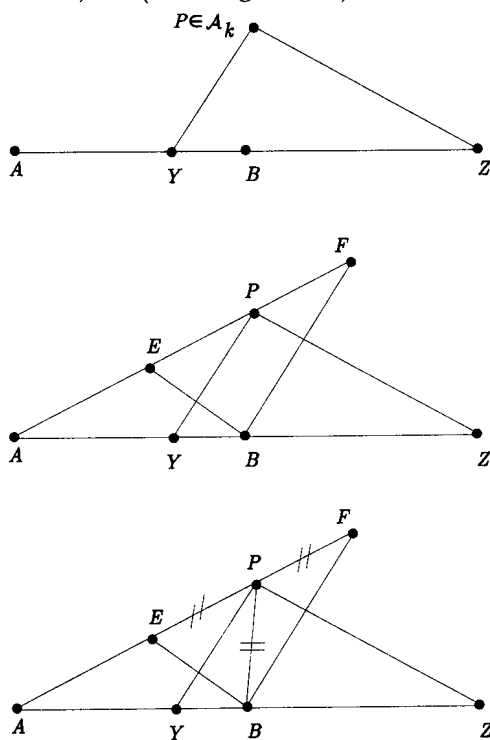
$$r(B, A) = \frac{d(Q^*, B)}{d(Q^*, A)}$$

La Figura 3 muestra un caso muy sencillo en el cual los puntos  $P^*$  y  $Q^*$  son evidentes.

En la misma Figura 4 se emplea un segmento de longitud  $k + 1$  para determinar un nuevo punto  $Y \in \mathcal{A}_k$  sobre la recta  $AB$ . Así  $A, Y, B, Z$  son colineales y es fácil comprobar que  $B$  se encuentra ligeramente más cerca de  $Y$  que de  $Z$ .

**Teorema 1.** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos del plano euclidiano y si  $k > 1$  entonces la Figura 4 es válida y el círculo de Apolonio  $\mathcal{A}_k$  es el círculo de diámetro  $YZ$ .

*Demostración:* Sea  $k > 1$ . Ya sabemos que los puntos  $Y, Z$  pertenecen tanto al círculo de Apolonio  $\mathcal{A}_k$  como al de diámetro  $YZ$ . Sea  $P \in \mathcal{A}_k$  un punto distinto de  $Y, Z$ . (Ver Figura 5a).



Figuras 5a, 5b y 5c.

Entonces por hipótesis

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = k$$

y se desea probar que  $P$  pertenece al círculo de diámetro  $YZ$ . Nuevamente por un teorema de Tales sabemos que esto equivale a pedir que el triángulo trazado en la Figura 5a sea rectángulo en  $P$ .

Ahora, por  $B$ , trácense las paralelas a  $PZ$  y  $PY$  que cortan a  $AP$  en los puntos  $E$  y  $F$ , respectivamente (Figura 5b). Se crea así un



paralelogramo y resulta entonces que el ángulo en  $P$  es recto si y sólo si el ángulo en  $B$  es recto. Por el mismo teorema de Tales que se empleó en la Figura 4, las rectas paralelas trazadas en la Figura 5b hacen que

$$\frac{d(P, A)}{d(P, E)} = \frac{d(Z, A)}{d(Z, B)} = k, \quad \frac{d(P, A)}{d(P, F)} = \frac{d(Y, A)}{d(Y, B)} = k$$

mientras que, por hipótesis,  $\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = k$ . Así  $0 < \frac{d(P, A)}{d(P, E)} = \frac{d(P, A)}{d(P, F)} = \frac{d(P, A)}{d(P, B)}$  y por lo tanto los puntos colineales  $E, P, F$  (Figura 5c) satisfacen:  $d(P, E) = d(P, F) = d(P, B)$ . Entonces  $B$  pertenece al círculo de diámetro  $EF$  y centro  $P$ . Por consiguiente, los ángulos en  $B$  y en  $P$  son rectos y así  $P$  pertenece al círculo de diámetro  $YZ$ .

La converso se demuestra análogamente. □

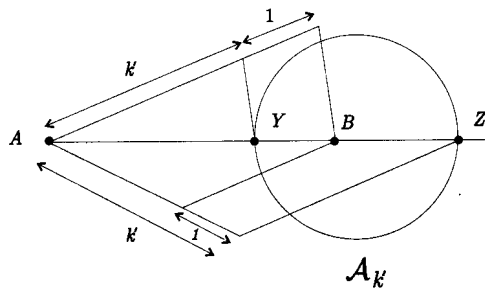


Figura 6.

*Nota.* Al comparar la Figura 6 para  $k' > k > 1$  con la Figura 4 se aprecia cómo los círculos de Apolonio  $\mathcal{A}_k$  se hacen más pequeños conforme aumenta el valor de  $k > 1$ . Esto es importante porque la definición de  $r(A, B)$  exige precisamente que este valor se maximice.

Para diversos valores de  $k \geq 1$ , y a partir de la mediatriz  $\mathcal{A}_1$  de  $A$  y  $B$ , la Figura 7 muestra a los círculos  $\mathcal{A}_k$  del lado de  $B$  así como a los círculos

$$\mathcal{A}'_k : \frac{d(X, B)}{d(X, A)} = k \quad \text{para } k \geq 1$$

del lado de  $A$ , formando un esquema de *ojeras* que, sin ser concéntricas, se envuelven más y más alrededor de  $B$  y  $A$  conforme aumenta el valor de  $k$ .

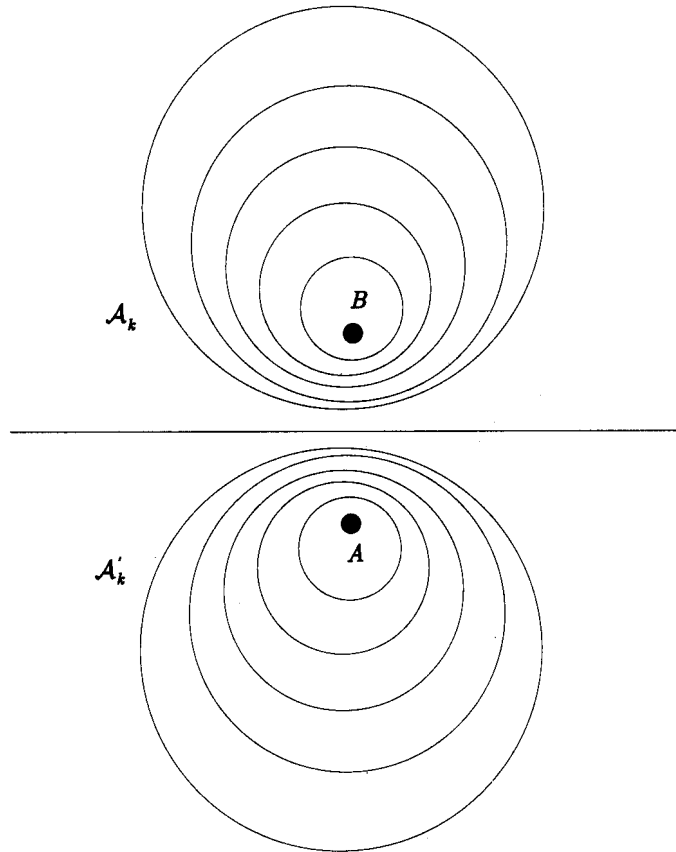


Figura 7.

Al sobreponer este patrón a cualquier curva  $\mathcal{C}$  y puntos  $A$  y  $B$ , es posible determinar geoméricamente todos los puntos  $P^* \in \mathcal{C}$  que realizan

$$r(A, B) = \max \left\{ \frac{d(X, A)}{d(X, B)} : X \in \mathcal{C} \right\} = \frac{d(P^*, A)}{d(P^*, B)}$$

Para ello, basta encontrar del lado de  $B$  al punto de la curva que esté sobre el círculo de Apolonio más pequeño posible - o sea, el de valor  $k$  máximo. De manera análoga, del lado de  $A$  se obtienen todos los puntos  $Q^*$ . Con cualquier par  $P^*, Q^*$  se deduce  $\delta(A, B)$ .

En la Figura 8 se ilustra un ejemplo de este procedimiento.

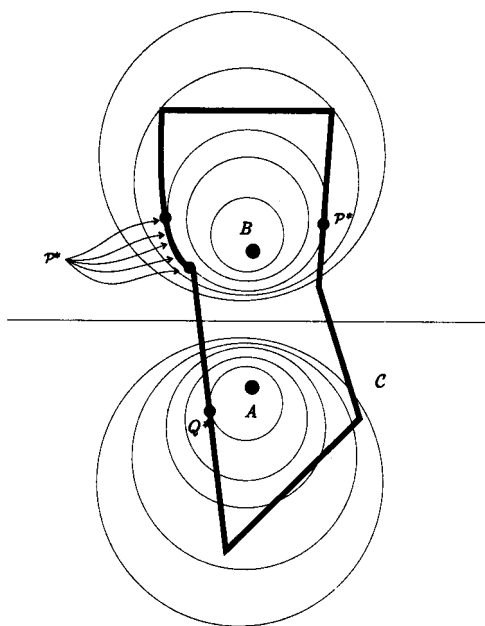


Figura 8.

## 4 Inversiones

Los círculos de Apolonio poseen una característica que es relevante en el espacio hiperbólico. Para demostrarla, es necesario definir el concepto de *inversión* en el plano con respecto a un círculo dado, digamos  $C$ , de centro  $O$  y radio  $r > 0$ . Se trata de una biyección de  $E^2 \setminus \{O\}$  en sí mismo que se realiza como indica la Figura 9. Sobre cualquier rayo que parte de  $O$  y para cualquier valor de  $\alpha > 0$ , al único punto  $F$  tal que  $d(O, F) = \alpha r$  se le asocia el único punto  $F^*$  sobre el mismo rayo tal que  $d(O, F^*) = \frac{1}{\alpha}r$ . Así un punto cuya distancia a  $O$  mide la tercera parte del radio  $r$  se intercambia con el punto del mismo rayo que está a una distancia de  $O$  igual al triple del radio. Nótese que en general  $F^{**} = F$  y que  $d(O, F)d(O, F^*) = \alpha r \frac{1}{\alpha}r = r^2$ .

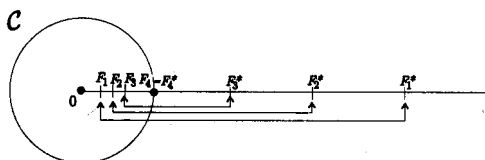


Figura 9.

Esta transformación deja fijo a cada punto del círculo  $\mathcal{C}$  e intercambia a los puntos que están adentro de él con los que están afuera - enviando más lejos a los puntos más cercanos al centro  $O$  y viceversa. Conviene pensar que su efecto es similar al que tendría un espejo convexo colocado exactamente sobre el disco delimitado por  $\mathcal{C}$ : Y que esta transformación viene a generalizar la reflexión ortogonal con respecto a una recta en  $E^2$ .

**Definición 3.** La *inversión* en el plano euclidiano con respecto al círculo  $\mathcal{C}(O, r)$  es la transformación  $\tau : E^2 \setminus \{O\} \rightarrow E^2 \setminus \{O\}$  dada por  $F \mapsto F^*$  y caracterizada por  $d(O, F)d(O, F^*) = r^2$ . Se dice que  $F, F^*$  son puntos *inversos* entre sí con respecto a  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 2.** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos del plano euclidiano entonces  $A$  y  $B$  son inversos entre sí con respecto a cualquiera de sus círculos de Apolonio.

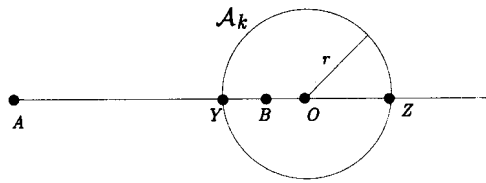


Figura 10.

*Demostración:* Basta probar el resultado para  $k \geq 1$ . Si  $k = 1$ , la afirmación es trivial porque la reflexión de  $A$  con respecto a la mediatriz de  $A$  y  $B$  es el punto  $B$ . Si  $k > 1$  entonces de la Figura 10 es fácil deducir que

$$\frac{d(Y, A)}{d(Y, B)} = \frac{d(Z, A)}{d(Z, B)} = k = \frac{d(O, A) - r}{r - d(O, B)} = \frac{d(O, A) + r}{r + d(O, B)}$$

y de ahí que  $d(O, A)d(O, B) = r^2$ .  $\square$

Termina aquí esta breve presentación de los espacios métricos de Barbilian. A continuación interesa demostrar que el disco de Poincaré no es más que uno de ellos: el que se obtiene al escoger al círculo unitario  $S^1$  como curva de Jordan.

## 5 Rudimentos del plano hiperbólico

En el disco de Poincaré la métrica hiperbólica causa un efecto sorprendente. Para acostumbrarse a este mundo y para desarrollar una

intuición adecuada, el lector puede consultar textos como [5] por A. I. Ramírez y G. Sienra y [7] por R. Trudeau. Aquí comenzaremos por considerar la Figura 11 que reproduce un dibujo de M. C. Escher [2]. Se trata del *Límite Circular I* (1958) y constituye una de las diversas ilustraciones que este artista hizo para visualizar el disco de Poincaré.

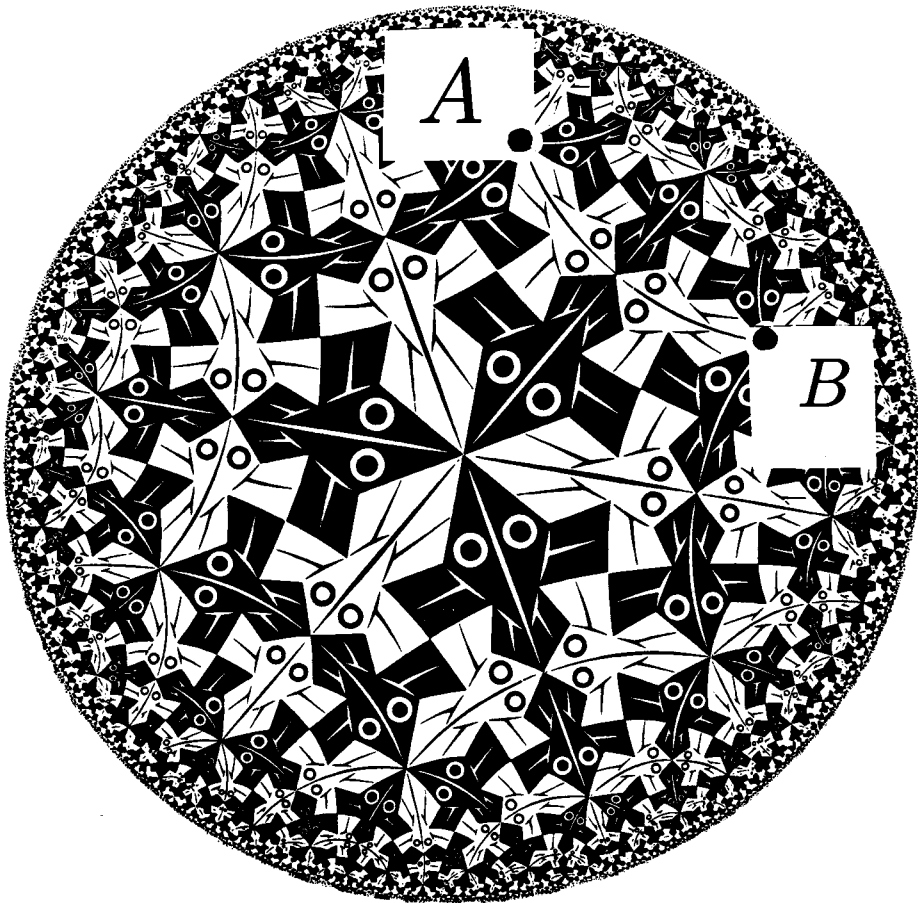


Figura 11.

Se trata aquí de un disco *plano* en el cual todos los peces poseen *idénticas* dimensiones hiperbólicas. Nosotros como observadores externos y euclidianos tenemos la impresión de que los peces pierden tamaño conforme se acercan a la frontera del disco. Pero para los peces la realidad es la hiperbólica. Cada uno se percibe del mismo tamaño que los demás en cada una de sus partes. Y ninguno se siente limitado por la

frontera  $S^1$  ya que la distancia a ella es infinita para todo pez en todo momento.

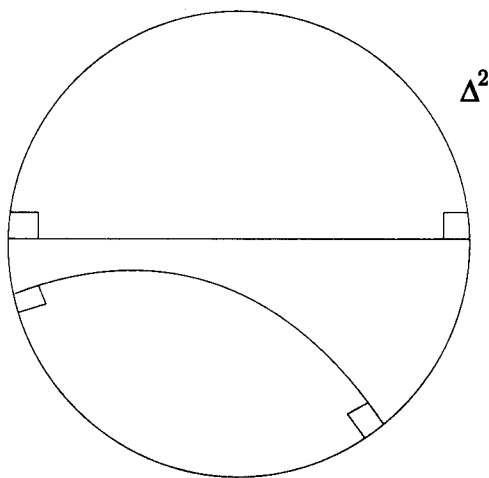


Figura 12.

Una primera consecuencia es que en  $\Delta^2$  la distancia hiperbólica más corta entre dos puntos dados no está dada necesariamente por una recta sino por las *líneas hiperbólicas* que presenta la Figura 12. Para aceptar este hecho, el lector puede considerar los puntos  $A$  y  $B$  marcados sobre la Figura 11. Dado que la longitud hiperbólica  $l$  de los peces es siempre la misma, podemos decir que en  $\Delta^2$  el segmento de recta euclidiana de  $A$  a  $B$  mide más de  $2l$  unidades hiperbólicas, mientras que el arco de círculo que Escher mismo traza de  $A$  a  $B$  mide exactamente  $2l$ .

**Definición 4.** Las *líneas hiperbólicas* en  $\Delta^2$  son los diámetros del disco y los arcos en  $\Delta^2$  de círculos ortogonales a  $S^1$ .

Para continuar se necesita el siguiente material.

**Definición 5.** En  $E^2$  se dice que dos círculos secantes son ortogonales entre sí cuando en los puntos de intersección la recta tangente a uno de ellos forma un ángulo recto con la recta tangente al otro.

**Lema 1.** Sean dos círculos  $C(O, r)$  y  $C'(O', r')$  en  $E^2$ . Entonces  $C \perp C'$  si y sólo si  $r^2 + r'^2 = d^2(O, O')$ .

La prueba no es más que el teorema de Pitágoras.

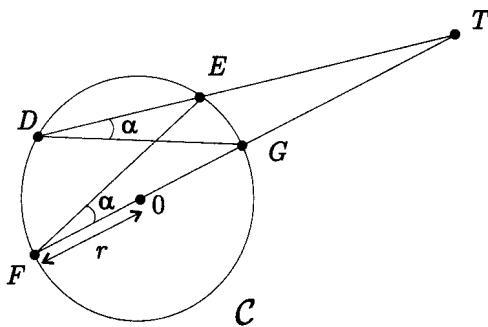


Figura 13.

**Lema 2.** Sea  $T$  un punto exterior a un círculo dado  $C(O, r)$  en  $E^2$ . Sean  $F$  y  $G$  los puntos de intersección del círculo con la recta  $OT$ . Considérese cualquier recta por  $T$  que intersekte al círculo en los puntos  $D$  y  $E$  (posiblemente coincidentes). Entonces  $d(T, D)d(T, E) = d^2(T, O) - r^2$ .

*Demostración:* Los ángulos  $\alpha$  indicados sobre la Figura 13 son iguales, de modo que los triángulos  $TDG$  y  $TFE$  son semejantes. Entonces  $d(T, D)d(T, E) = d(T, F)d(T, G) = [d(T, O) + r][d(T, O) - r]$ .  $\square$

**Teorema 3.** Si dos puntos distintos  $A$  y  $B$  son inversos entre sí con respecto a un círculo  $C(O, r)$  en  $E^2$  entonces todo círculo o recta que pase por ambos puntos es ortogonal a  $C$ .

*Demostración:* Véase la Figura 14. Por hipótesis, los puntos  $A$  y  $B$  se encuentran sobre un mismo rayo de origen  $O$ : uno adentro y uno afuera de  $C$  con  $d(O, A)d(O, B) = r^2$ . Si  $C'(O', r')$  es un círculo que pasa por  $A$  y  $B$  entonces  $O$  queda afuera de  $C'$  y por el lema anterior:  $d(O, A)d(O, B) = d^2(O, O') - r'^2$ . Entonces  $r^2 = d^2(O, O') - r'^2$  luego  $C \perp C'$  por el lema 1.

Finalmente, la recta  $AB$  pasa por el centro de  $C$  y por lo tanto es ortogonal a este círculo.  $\square$

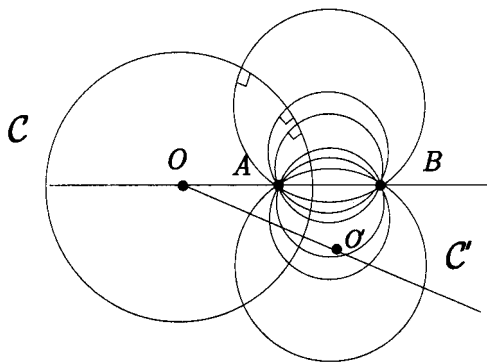


Figura 14.

**Teorema 4.** *En  $E^2$ , todo círculo o recta es invariante ante la inversión con respecto a cualquier círculo (o recta) que le sea ortogonal.*

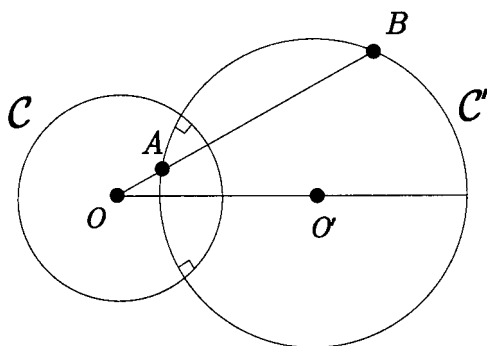


Figura 15.

*Demostración:* Sólo probaremos el caso de dos círculos ortogonales entre sí (Figura 15). Sea  $\tau$  la inversión en  $E^2$  con respecto a  $C$ . Escójase cualquier punto  $A$  sobre  $C'$ . Sea  $A^* = \tau(A)$ .

Si  $A \in C$  entonces  $A = A^* \in C'$  y  $OA$  es tangente a  $C'$ .

Si  $A \notin C$  entonces la recta  $OA$  corta a  $C'$  en un nuevo punto  $B$ . Como  $O$  es un punto exterior a  $C'$ , del lema 2 se sigue que  $d(O, A)d(O, B) = d^2(O, O') - r'^2$ . Pero por hipótesis  $C \perp C'$ , y por el lema 1  $r^2 + r'^2 = d^2(O, O')$ . Por lo tanto  $d(O, A)d(O, B) = r^2$  y así  $B = A^* \in C'$ . De modo que efectivamente  $\tau(C') = C'$ .  $\square$

**Teorema 5.** *Dos puntos distintos en  $\Delta^2$  determinan una y sólo una línea hiperbólica.*

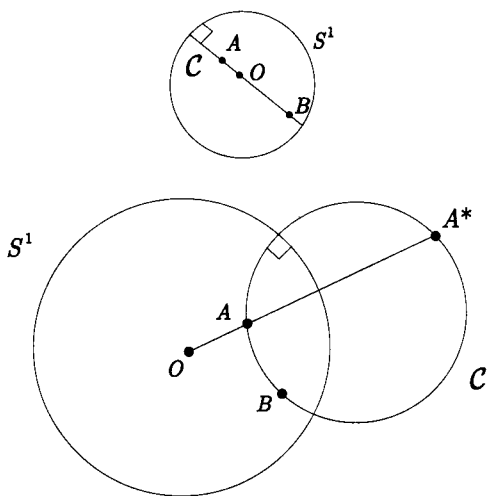


*Demostración: [Unicidad.]* Sean  $A$  y  $B$  dos puntos distintos en  $\Delta^2$  que se encuentran sobre una misma línea hiperbólica  $l$ . Por definición,  $l = \Delta^2 \cap \mathcal{C}$  para algún círculo o recta  $\mathcal{C}$  ortogonal a  $S^1$ . Uno de los puntos (digamos:  $A$ ) es distinto del origen.

Sea  $\tau$  la inversión con respecto a  $S^1$  en  $E^2$ . Como  $A \in \mathcal{C}$  está adentro de  $S^1$  y es distinto del origen, sabemos que  $A^*$  existe, queda sobre  $\mathcal{C}$  y afuera de  $S^1$ . Entonces  $A, A^*$  y  $B \in \mathcal{C}$  son tres puntos distintos por los cuales no puede pasar otro círculo o recta:  $\mathcal{C}$  es el único y por lo tanto  $l$  es única para  $A$  y  $B$ .  $\square$

*Demostración: [Existencia.]* Si  $A, B$  y  $O$  son colineales entonces la recta  $AB$  ciertamente contiene un diámetro de  $\Delta^2$  que es una línea hiperbólica (Figura 16a).

Supóngase que  $A, B$  y  $O$  no son colineales. Como  $O, A$  y  $A^*$  (que existe) sí lo son, resulta que  $A, A^*$  y  $B$  no son colineales y definen así un círculo  $\mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}$  contiene a  $A$  y  $A^*$ , sabemos que  $\mathcal{C} \perp S^1$ . Así que el arco  $\mathcal{C} \cap \Delta^2$  es una línea hiperbólica por  $A$  y  $B$ . Véase la Figura 16b.  $\square$



Figuras 16a y 16b.

Aunque no es el centro de este trabajo, resulta irresistible añadir la siguiente consecuencia de los últimos teoremas.

**Corolario 1.** *La geometría del plano hiperbólico es no euclidiana.*

*Demostración:* En el quinto postulado de sus *Elementos*, Euclides exige que por un punto dado exterior a una recta dada pase una y sólo una recta paralela a la primera. Interesa mostrar aquí que el disco de Poincaré no satisface este postulado.

La Figura 17 muestra en  $\Delta^2$  a un punto  $A$  afuera de una línea hiperbólica (un diámetro del disco). Entonces la misma figura exhibe dos líneas hiperbólicas distintas que pasan por  $A$  y que son paralelas a la primera al no intersecarla en  $\Delta^2$ .  $\square$

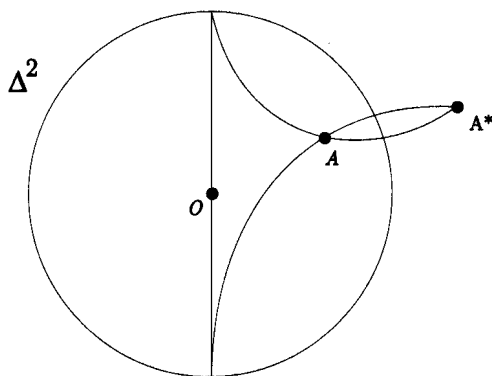


Figura 17.

En la siguiente sección se demuestra el punto central de este documento.

## 6 $\Delta^2$ es un espacio de Barbilian

Considérese el espacio de Barbilian que corresponde al caso particular en el cual la curva de Jordan elegida es el círculo  $S^1$ . Sean  $A$  y  $B$  dos puntos dados al interior de  $S^1$ . Desde que examinamos la Figura 3 sabemos que si  $A$ ,  $B$  y el origen son colineales entonces los puntos  $P^*$  y  $Q^*$  en  $S^1$  son los extremos del diámetro que definen  $A$  y  $B$ . Entonces, para Barbilian,

$$\delta(A, B) = \ln \frac{d(P^*, A)d(Q^*, B)}{d(P^*, B)d(Q^*, A)}$$

lo cual coincide con la Figura 1 e incluye el caso  $A = B$ .

Si  $A$ ,  $B$  y el origen no son colineales, aplíquese a  $S^1$  la solución geométrica de la sección 3. Para obtener  $P^*$ , se requiere intersecar a  $S^1$  con el círculo de Apolonio más pequeño posible que esté del lado de

B. La Figura 18 muestra el resultado: se trata de  $\mathcal{A}_{k^*}$  que es tangente en  $P^*$  a  $S^1$ .

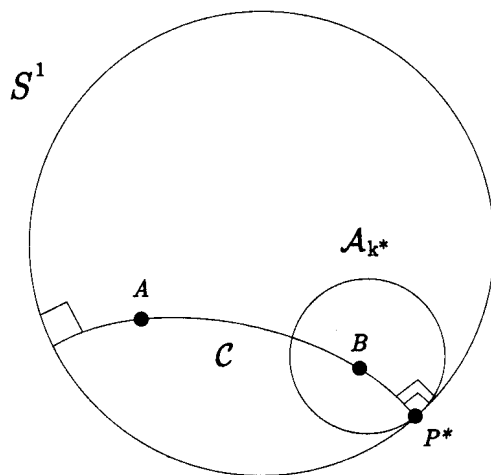


Figura 18.

Sea  $C$  el único círculo que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $P^*$ . Como  $A$  y  $B$  son inversos con respecto a  $\mathcal{A}_{k^*}$ , sabemos que  $C \perp \mathcal{A}_{k^*}$ . En particular, esta ortogonalidad entre  $C$  y  $\mathcal{A}_{k^*}$  se da en el punto de intersección  $P^*$ , donde  $\mathcal{A}_{k^*}$  es tangente a  $S^1$ :  $C \perp S^1$ .

Esto significa que  $C \cap \Delta^2$  es la línea hiperbólica que determinan  $A$  y  $B$ .

Para obtener el punto  $Q^*$ , el procedimiento es análogo. Se obtiene ahora un círculo  $C'$  ortogonal en  $Q^*$  a  $S^1$ . Y nuevamente  $C' \cap \Delta^2$  es la línea hiperbólica que determinan  $A$  y  $B$ . Como dicha línea es única,  $C' = C$  y este círculo pasa por  $A$  y  $B$  cortando a  $S^1$  en  $P^*$  (del lado de  $B$ ) y  $Q^*$  (del lado de  $A$ ).

Para Barbilian:

$$\delta(A, B) = \ln \frac{d(P^*, A)d(Q^*, B)}{d(P^*, B)d(Q^*, A)}$$

Por último, recuérdese que en el plano complejo se tiene que

$$\frac{d(P^*, A)d(Q^*, B)}{d(P^*, B)d(Q^*, A)} = \frac{(P^* - A)(Q^* - B)}{(P^* - B)(Q^* - A)}$$

debido a que  $Q^*$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $P^*$  se encuentran sobre un mismo círculo: el que indica la Figura 1.

Así, el disco de Poincaré coincide exactamente con este espacio de Barbilian. Y sabemos ahora que  $P^*$  y  $Q^*$  tienen la cualidad de ser los puntos de  $S^1$  relativamente más cercanos a  $B$  y a  $A$ , respectivamente, en la métrica euclidiana.

Sería interesante ir más allá de este caso particular. Seguiría considerar por ejemplo a los espacios de Barbilian dados por una elipse, un cuadrado, etc. En esta dirección, el lector puede consultar textos como [4] por A. Markushevich para familiarizarse con un resultado importante acerca del plano complejo: el teorema de existencia de la transformación de Riemann. Con dicha transformación, desde  $\Delta^2$  se podría inducir una métrica sobre el interior de cualquier curva de Jordan y sería interesante compararla con la métrica de Barbilian.

También podría valer la pena el esfuerzo no trivial de llevar este trabajo a más de dos dimensiones.

## Referencias

- [1] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [2] M. C. Escher, *M.C. Escher. Estampas y dibujos*. Taschen, 1991.
- [3] P. Kelly & G. Matthews, *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane. Its Structure and Consistency*. Springer-Verlag, 1981.
- [4] A. Markushevich, *Teoría de las funciones analíticas, tomo II*. Editorial Mir, 1978.
- [5] A. I. Ramírez & G. Sienra, *Invitación a la geometría no euclidiana*. Por aparecer.
- [6] J. Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry*. History of Mathematics, Vol. 10, AMS & London Mathematical Society, 1996.
- [7] R. Trudeau, *The Non-Euclidean Revolution*. Birkhäuser, 1987.
- [8] A. Verjovsky, *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas*. IPN, 1982.