

# Fractriángulos. Un enfoque geométrico al Teorema de Kummer

Adriana Lara y Jesús González\*

\* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I.P.N.

Departamento de Matemáticas

Apdo. Postal 14-740

07000 México, D.F.

jesus@math.cinvestav.mx

## 1 Introducción.

Desde un punto de vista global, las matemáticas constituyen la búsqueda de un lenguaje preciso para discutir relaciones espaciales y cuantitativas. Si bien la herramienta principal en esta aventura es el razonamiento lógico y sistemático, el sentido estético es siempre un aspecto distintivo. Una demostración se considera *elegante* si explica de forma concisa el mecanismo interno de un problema, especialmente si interrelaciona diversos fenómenos con un lenguaje unificado y *simple*. Por esta razón los enfoques combinatorios son particularmente atractivos. De hecho, muchos problemas en las distintas áreas matemáticas (álgebra, geometría o análisis) tienen solución parcial (y aún total) en términos de invariantes combinatorios sencillos. Tal es el caso de los llamados coeficientes binomiales<sup>1</sup>. Explicitamente, para  $0 \leq j \leq i$ , el coeficiente binomial  $\binom{i}{j}$  está dado por la fórmula

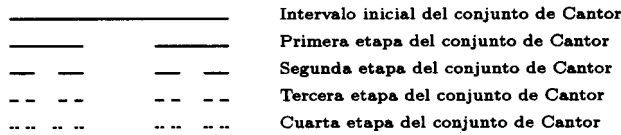
$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \quad (1)$$

donde la notación  $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \cdot m$  se usa para designar al producto de los  $m$  primeros enteros positivos. Es de observarse que, a

<sup>1</sup>Es decir, los coeficientes que aparecen del lado izquierdo en cada desarrollo de Newton del binomio:  $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{n-i} a^{n-i} b^i$ , donde  $n$  es un entero positivo dado.

pesar del aspecto de la fórmula anterior, cada coeficiente binomial es, invariablemente, un número *entero* positivo.

El cálculo explícito de un coeficiente binomial puede ser una tarea en extremo laboriosa, en virtud de la gran cantidad de operaciones involucradas en la fórmula (1). Sin embargo, muchos problemas requieren, únicamente, información *primaria* de los coeficientes binomiales, la cual, como veremos, es mucho más accesible de obtener en la práctica. Aquí, el adjetivo “primario” se refiere a la divisibilidad por números primos de un coeficiente binomial dado; por ejemplo, en el caso del número primo 2, a saber si un tal coeficiente binomial es par o impar, o más generalmente, a saber cuál es la máxima potencia de 2 que lo divide. La sorpresa es que esta información primaria tiene una naturaleza de tipo fractal similar a la del conjunto de Cantor, obtenido al remover de manera inductiva tercios centrales de un intervalo de la recta real. (Ver también la Figura 4, en donde se muestra la segunda etapa del proceso inductivo que elimina, de cada triángulo relleno, tres triángulos centrales invertidos).



El objetivo principal de esta nota es el de desarrollar un modelo que permita estudiar las propiedades primarias de los coeficientes binomiales. El formalismo matemático requerido se basa en la noción de *grupo*, generalmente accesible a un estudiante de licenciatura en Matemáticas. Este enfoque permite dar una interpretación geométrica del Teorema de Kummer, usado en Teoría de Números, y que se describe en la Sección 4.

## 2 El triángulo de Pascal.

Una manera conveniente de introducir los coeficientes binomiales es a través del Triángulo de Pascal, basado en la relación recursiva

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad (2)$$

con  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ , y cuya representación gráfica se muestra en la Figura 1, donde cada número es la suma de los dos inmediatos superiores a él.

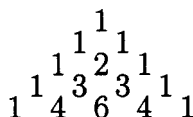


Figura 1

Por supuesto que la relación (2) se preserva al cambiar los coeficientes a su representación módulo 2. El Triángulo de Pascal se reduce entonces a un ordenamiento de ceros y unos como se muestra en la Figura 2A.

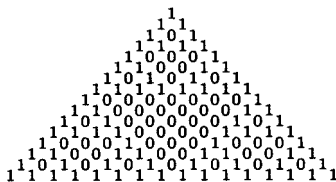


Figura 2A. Triángulo de Pascal módulo 2.

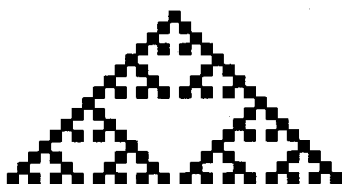


Figura 2B. 4ª etapa del Triángulo de Sierpinski.

Al reemplazar ceros por espacios blancos y unos por cuadrados relle- nos se genera una estructura fractal que se asemeja a la del Triángulo de Sierpinski (ver Figura 2B). Este fractal ha sido objeto de investigación de matemáticos tanto profesionales como aficionados. A continuación describiremos la estructura básica obtenida en el Triángulo de Pascal al considerar divisibilidad por un número primo  $p$ . Comencemos estableciendo el lenguaje necesario: A un arreglo triangular de enteros (módulo  $p$ ) con  $p^r$  filas (primera fila = fila cero) le llamaremos una *plantilla de orden  $r$* . La *plantilla principal* de orden  $r$  es la plantilla de orden  $r$  que aparece en la cúspide del Triángulo de Pascal (Ver Figuras 5 y 6). Por el momento no consideraremos los números que aparezcan en las casillas<sup>2</sup> de una plantilla. Una plantilla de orden  $r + 1$  puede ser

<sup>2</sup>Al espacio ocupado por el coeficiente binomial en una estructura de "Triángulo de Pascal"

dividida en  $\binom{p+1}{2}$  subplantillas de orden  $r$  dejando intercaladamente triángulos invertidos con  $p^r - 1$  filas. Ver Figura 3.

La casilla  $k$  en la fila  $n$  de una plantilla de orden  $r$  ( $0 \leq k \leq n < p^r$ ) será referida con la pareja ordenada  $(n, k)$ . A la casilla  $(0, 0)$  de una plantilla le llamaremos la *casilla líder*. El que la casilla  $(n, k)$  de una plantilla de orden  $r + 1$  esté dentro de una de las subplantillas de orden  $r$ , depende de las representaciones  $p$ -ádicas de  $n$  y  $k$ . En efecto, siendo

$$n = n_r p^r + n_{r-1} p^{r-1} + \dots + n_0 \text{ y } k = k_r p^r + k_{r-1} p^{r-1} + \dots + k_0 \quad (3)$$

las correspondientes representaciones  $p$ -ádicas, por una parte se tendrá que la casilla  $(n, k)$  está en el nivel  $n_r$  de subplantillas y, por la otra, que dicha casilla pertenece a la subplantilla  $k_r$  de ese nivel si, y sólo si,

$$k_{r-1} p^{r-1} + \dots + k_0 \leq n_{r-1} p^{r-1} + \dots + n_0, \quad (4)$$

de otro modo la casilla está dentro del triángulo invertido inmediato. Ver Figura 3.

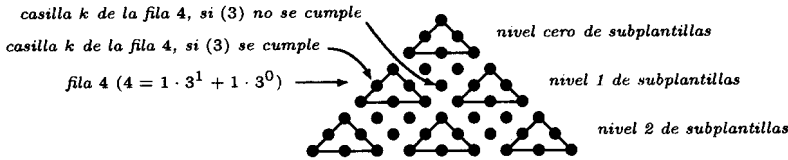


Figura 3. Plantilla de orden 2 y sus subplantillas de orden 1 para  $p = 3$ .

Al continuar este análisis vemos que la casilla  $(n, k)$  pertenece a una serie anidada de subplantillas si, y sólo si, en las expresiones  $p$ -ádicas (3) se tiene:

$$k_i \leq n_i, \quad \text{para } 0 \leq i \leq r. \quad (5)$$

### 3 La estructura fractal.

El Teorema de Lucas [8] afirma que la condición (5) es equivalente a que  $\binom{n}{k}$  no sea divisible por  $p$ . Este resultado es, de hecho, una consecuencia de uno más general atribuido a Kummer y que consideraremos en la siguiente sección. Por el momento observemos que, como consecuencia del Teorema de Lucas, si colocamos un triángulo relleno en la

---

le llamaremos *casilla*. Durante esta sección sólo trasciende el hecho de que la casilla esté vacía, o que sea rellena.

casilla  $(n, k)$  del Triángulo de Pascal cuando  $\binom{n}{k}$  no sea divisible por  $p$ , y dejamos la casilla vacía si  $\binom{n}{k} \equiv 0$  módulo  $p$ , el fractal obtenido en el límite se ajusta al formato descrito en la sección anterior. Más específicamente, la figura resultante sobre la plantilla principal de orden  $r$  corresponde a la  $r$ -ésima etapa del fractal obtenido a partir de un triángulo relleno en el que sucesivamente removemos, de cada triángulo completo,  $\binom{p}{2}$  triángulos invertidos simétricamente distribuidos. La Figura 4 muestra la tercera etapa del fractal correspondiente a  $p = 3$ . Obsérvese que los triángulos rellenos estarán anidados dentro de las series de plantillas descritas en la sección anterior, mientras que los espacios en blanco quedarán dentro de los triángulos invertidos.

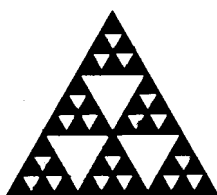


Figura 4. Divisibilidad por 3 en el Triángulo de Pascal.

En la siguiente sección reemplazaremos los triángulos rellenos por los correspondientes valores módulo  $p$  de los coeficientes binomiales, y estudiaremos los patrones formados por éstos.

## 4 Algebra en la estructura fractal.

Denotemos por  $P(r)$  al conjunto de plantillas de orden  $r$  rellenas con enteros módulo  $p$ , y sea  $H_r$  el subconjunto de  $P(r)$  formado por la plantilla que tiene ceros en todas sus casillas y por las plantillas de orden  $r$  que aparecen en la estructura fractal del Triángulo de Pascal módulo  $p$ . La plantilla principal de orden  $r$  en el Triángulo de Pascal módulo  $p$  es un elemento de  $H_r$  que denotaremos por  $\Delta_r$ . Definamos la suma de plantillas casilla a casilla. Resulta claro que, con esta operación,  $P(r)$  es un  $p$ -grupo abeliano isomorfo a la suma directa de  $\binom{p^r + 1}{2}$  copias de  $\mathbb{Z}/p$ . Puesto que cada plantilla de orden  $r$  en el Triángulo de Pascal está rodeada de ceros, la relación (2) implica que cada elemento de  $H_r$

está completamente determinado por el coeficiente de su casilla líder (Ver Figura 5). Esto tiene dos consecuencias inmediatas: por un lado, cualquier plantilla de orden  $r$  que se localice en el borde del Triángulo de Pascal debe de coincidir con  $\Delta_r$  (pues el coeficiente en su casilla líder es 1); por el otro,  $H_r$  tiene a lo más  $p$  elementos.

<i>Coficiente de la casilla líder</i>	<i>Plantilla de orden 1</i>
1	$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{array} = \Delta_1$
2	$\begin{array}{c} 2^2 \\ 2^2 \ 2^2 \\ 2^2 \ 3^1 \ 2^2 \\ 2^2 \ 4^2 \ 3^2 \ 2^2 \\ 2^2 \ 5^3 \ 4^3 \ 3^2 \ 2^2 \end{array} = \Delta_1 + \Delta_1 = 2\Delta_1$
3	$\begin{array}{c} 3^3 \\ 3^3 \ 3^3 \\ 3^3 \ 4^3 \ 3^3 \\ 3^3 \ 5^4 \ 4^3 \ 3^3 \\ 3^3 \ 6^5 \ 5^4 \ 4^3 \ 3^3 \end{array} = \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_1 = 3\Delta_1$
4	$\begin{array}{c} 4^4 \\ 4^4 \ 4^4 \\ 4^4 \ 5^4 \ 4^4 \\ 4^4 \ 6^5 \ 5^4 \ 4^4 \\ 4^4 \ 7^6 \ 6^5 \ 5^4 \ 4^4 \\ 4^4 \ 8^7 \ 7^6 \ 6^5 \ 5^4 \ 4^4 \end{array} = \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_1 = 4\Delta_1$

Figura 5. Plantillas de  $H_r$  para el caso  $r = 1$ ,  $p = 5$ .

A continuación mostraremos que  $H_r$  (el cuál sabemos, es un subgrupo de  $P(r)$  con necesariamente  $p$  elementos) está generado por  $\Delta_r$ . Para enteros no negativos  $n$  y  $k$ , con representaciones  $p$ -ádicas (3), el Teorema de Kummer [7] afirma que  $\binom{n}{k} \equiv \binom{n_r}{k_r} \binom{n_{r-1}}{k_{r-1}} \cdots \binom{n_0}{k_0}$  módulo  $p$ . Interpretemos este resultado en términos de la estructura fractal del Triángulo de Pascal módulo  $p$ . Consideremos la plantilla principal  $\Delta_N$  ( $N > 1$ ) y tomemos dos subplantillas adyacentes de orden  $r$  ( $r < N$ )  $\Delta$  y  $\Delta'$  en el nivel  $i$  de subplantillas (ver Figura 3). Digamos que  $\Delta$  es la subplantilla  $j$  y  $\Delta'$  la subplantilla  $j+1$  ( $0 \leq j < i$ ). Denotemos por  $\Delta(m, \ell)$  al coeficiente que aparece en la casilla  $\ell$  de la fila  $m$  de  $\Delta$  ( $0 \leq \ell \leq m < p^r$ ); similarmente  $\Delta'(m, \ell)$  será el correspondiente coeficiente en  $\Delta'$ . Del Teorema de Kummer tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(m, \ell) + \Delta'(m, \ell) &= \binom{ip^r + m}{jp^r + \ell} + \binom{ip^r + m}{(j+1)p^r + \ell} \\ &\equiv \binom{i}{j} \binom{m}{\ell} + \binom{i}{j+1} \binom{m}{\ell} \pmod{p} \\ &= \left[ \binom{i}{j} + \binom{i}{j+1} \right] \binom{m}{\ell} = \binom{i+1}{j+1} \binom{m}{\ell} \\ &\equiv \binom{(i+1)p^r + m}{(j+1)p^r + \ell} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Pero este último coeficiente es precisamente  $\Delta''(m, \ell)$ , donde  $\Delta''$  es la plantilla  $j + 1$  del nivel  $i + 1$ . Luego  $\Delta + \Delta' = \Delta''$ . Estas observaciones muestran que, si reemplazamos "casillas" por "plantillas" en el Triángulo de Pascal módulo  $p$ , la relación (2) se preserva, y el Triángulo de Pascal se puede construir de la forma usual a partir de estos bloques mayores (Ver Figura 6). En particular, las únicas plantillas de orden  $r$  que aparecen en la estructura fractal asociada son los múltiplos de  $\Delta_r$ , el cual es entonces un generador de  $H_r$ .

### 5 Conclusiones.

El siguiente proceso genera el fractal asociado al Triángulo de Pascal módulo  $p$ : Empezando con la plantilla principal de orden 1 ( $\Delta_1$ ), reemplazamos el coeficiente binomial  $c$  de cada casilla por la plantilla  $c \cdot \Delta_1$  (a una escala adecuada para que quepa en la casilla que sustituye) y repetimos. Ver Figura 6. Obsérvese que este proceso genera el mismo fractal si usamos cualquier otro  $\Delta_r$  en vez de  $\Delta_1$ , o aún si  $r$  varía en las etapas del proceso.

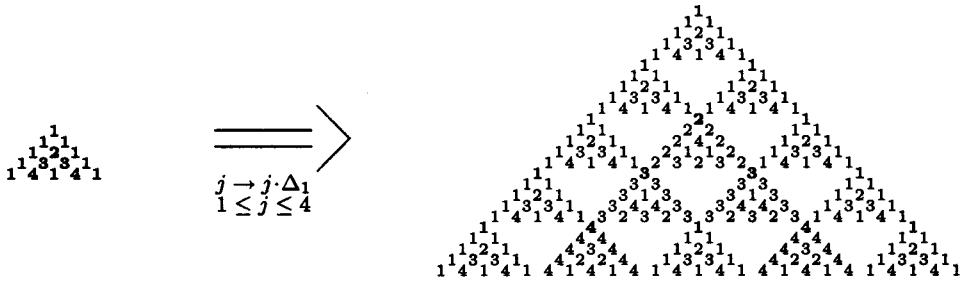


Figura 6. La plantilla principal de orden 1 genera la plantilla principal de orden 2  
(ceros omitidos,  $p = 5$ ).

La relevancia del Teorema de Kummer estriba en que para calcular el valor módulo  $p$  de un coeficiente binomial no es necesario recurrir a la fórmula inductiva (2). Desde el punto de vista geométrico, sólo hay que obtener las posiciones relativas<sup>3</sup> de dicho coeficiente dentro de las plantillas del Triángulo de Pascal: el valor módulo  $p$  del coeficiente es entonces el producto de tales posiciones.

Un problema interesante es el de considerar el Triángulo de Pascal módulo potencias de un primo. En este caso, la estructura del fractal

<sup>3</sup>La posición relativa de una plantilla  $\Delta$  de orden  $r$  dentro de una plantilla de orden  $r + 1$  es el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$ , si  $\Delta$  es la subplantilla  $k$  del nivel  $n$  de subplantillas de orden  $r$ .

asociado puede ser descrita [5]; sin embargo, hasta donde los autores saben, no hay descripción de una estructura algebraica asociada al mismo. El lector puede hacer algunos cálculos y verificar que, a pesar de que el Triángulo de Pascal módulo 4 presenta comportamientos interesantes, en el caso general módulo  $p^e$  el patrón algebraico (si es que lo hay) no parece ser tan sencillo como el descrito para  $e = 1$ .

## 6 Apéndice.

En esta última sección queremos dar un ejemplo concreto de un problema topológico-diferencial cuya solución completa aún no se ha determinado, pero para el cual, los resultados parciales que se conocen son expresados en términos de los coeficientes binomiales y de sus propiedades 2-primarias, discutidas en este artículo. Nuestra intención al introducir esta sección final, es la de motivar al alumno de Matemáticas para continuar sus estudios, profundizando su conocimiento en el área. Dado que los resultados involucran técnicas sofisticadas en Teoría de Homotopía, nos limitaremos a hacer una descripción cualitativa de los mismos. No obstante, los requisitos para entender el enunciado del problema en cuestión se cubren, generalmente, en los últimos semestres de una licenciatura.

El problema que tenemos en mente es determinar la menor dimensión del espacio euclideo en el que el espacio proyectivo real de dimensión  $n$  tenga una inmersión. Comencemos recordando al lector la definición de estos conceptos. El subconjunto  $S^n$  del espacio euclideo  $\mathbb{R}^{n+1}$  determinado por la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$$

es una variedad de dimensión  $n$  consistente de los vectores de norma unitaria en el espacio euclideo de dimensión  $n+1$ . El grupo (discreto) con dos elementos y generador  $\kappa$  actúa en esta variedad mediante la fórmula

$$\kappa \cdot u = -u$$

y el conjunto de órbitas hereda una estructura diferencial natural. La variedad resultante se llama el espacio proyectivo de dimensión  $n$  y se denota por  $P^n$ .

Una inmersión entre dos variedades es una función suave que, puntualmente, determina un monomorfismo en cada espacio tangente. Así, aunque quizás no globalmente inyectiva, una inmersión es, localmente, un encaje de una variedad en la otra.



El problema de inmersión de espacios proyectivos es el siguiente: para cada entero positivo  $n$ , determinar el menor entero  $m$  para el cual se tenga una inmersión de  $P^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . Denotemos a tal entero minimal por  $\iota(n)$ .

Un resultado clásico de Whitney afirma que cualquier variedad de dimensión  $n$  admite una inmersión en  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . En particular, la función  $\iota$  está acotada superiormente por

$$\iota(n) \leq 2n - 1. \tag{6}$$

Utilizando técnicas homotópicas avanzadas, Cohen generaliza este resultado en [3] mostrando que, de hecho, cualquier variedad de dimensión  $n$  admite una inmersión en  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ , donde  $\alpha(n)$  denota la suma de los dígitos en la descomposición binaria (ecuación (3) con  $p = 2$ ) de  $n$ . De esta manera, (6) se especializa a

$$\iota(n) \leq 2n - \alpha(n). \tag{7}$$

Los mejores resultados que se conocen en la actualidad sobre el problema de inmersión de espacios proyectivos utilizan maquinaria topológica especializada y muy variada. La información que se conoce hasta el momento apenas es suficiente para dar el valor exacto de  $\iota(n)$  en casos muy particulares y "limitados". Sin embargo, todo apunta a indicar que el comportamiento general de la función  $\iota$  es en extremo complicado. Aún así, la función  $\iota$  esta "aproximadamente" acotada por

$$2n - 2\alpha(n) - \epsilon(n) \leq \iota(n) \leq 2n - 2\alpha(n),$$

donde  $\epsilon$  es una cierta función misteriosa que, en general, toma valores pequeños.

El problema de inmersión de espacios proyectivos puede ser enunciado de forma equivalente como sigue: dado un natural  $n$ , encontrar el mínimo natural  $k$  para el cual exista una función continua  $f : P^n \times P^n \rightarrow P^{n+k}$  cuya restricción a cada eje cartesiano sea la inclusión  $P^n \subset P^{n+k}$  [1]. Fué precisamente H. Hopf quien, utilizando técnicas de topología algebraica, obtuvo cotas inferiores para  $k$ . Su resultado [6] afirma que:

*una condición necesaria para la existencia de una tal función  $f$  es que los coeficientes binomiales  $\binom{n+k+1}{i}$  sean pares para  $k+1 \leq i \leq n$ .*

Con técnicas en principio de naturaleza similar, pero mucho mas finas, Davis generaliza estos resultados en [4], siguiendo ideas originalmente estudiadas en [2]. Los resultados obtenidos dependen no solamente de la paridad de determinados coeficientes binomiales clave, sino de la máxima potencia de 2 que los divide; es decir, de sus propiedades *2-primarias*.

## Referencias

- [1] J. Adem, S. Gitler and I. M. James. On axial maps of certain type. *Bol Soc. Mat. Mex.*, 17:59–62, 1972.
- [2] L. Astey. Geometric dimension of bundles over real projective spaces. *Quart. J. Math. Oxford*, 31:139–155, 1980.
- [3] R. Cohen. The immersion conjecture for differentiable manifolds *Annals of Math.*, 122:237–328, 1985.
- [4] D. M. Davis. A strong non-immersion theorem for real projective spaces. *Ann. of Math.*, 120:517–528, 1984.
- [5] F. V. Haeseler, H. O. Peitgen and G. Skordev. Pascal's triangle, dynamical systems and attractors. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 12:479–486, 1992.
- [6] H. Hopf. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. *Comment. Math. Helv.*, 13:219–239, 1940.
- [7] E. E. Kummer. Über die ergänzungssätze zu den allgemernen reciprocitätssätzen. *J. Reine Angew. Math.*, 44:93–146, 1852.
- [8] E. Lucas. Sur les congruences des nombres euleriennes et des coefficients différentiels des fonctions trigonometriques. *Bull. Soc. Math. France*, 6:49–54, 1878.
- [9] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1982.
- [10] H. O. Peitgen, H. Jurgens and D. Saupe. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [11] M. Sved. Divisibility – With visibility. *The Mathematical Intelligencer*, 10:56–64, 1988.
- [12] S. Wolfram. Geometry of binomial coefficients. *Am. Math. Monthly.*, 91:566–571, 1984.