

Razones de peso en geometría

Alfinio Flores Peñafiel

Curriculum & Instruction

Arizona State University

Tempe, AZ 85287-0911

Utilizar argumentos físicos para descubrir o probar resultados geométricos no es desde luego algo nuevo. Arquímedes utilizó con gran éxito en El Método la idea de balancear figuras tales como parábolas y esferas para obtener su área o su volumen. El método le sirvió para investigar algunos problemas matemáticos por medio de la mecánica. Después probó los resultados de manera puramente geométrica. Varios autores han utilizado otras ideas físicas en matemáticas. Kogan utiliza fuerzas (vectores) asociadas a los vértices de triángulos para probar que las medianas se intersectan en un sólo punto, y resultados análogos para las alturas, las mediatrices, y las bisectrices de un triángulo. Lyúbich y Shor utilizan argumentos cinemáticos para probar también resultados geométricos. Pólya utiliza métodos ópticos y mecánicos para hacer plausibles algunos resultados geométricos.

En este artículo se presentan resultados geométricos acerca de triángulos, que se derivarán de considerar triángulos rígidos con ciertas masas asociadas a algunas de sus partes. En unos casos, las masas estarán concentradas en los vértices; en otras a lo largo de las aristas; o la masa estará distribuida homogéneamente en el interior del triángulo. Para tratamientos alternativos de los resultados presentados aquí ver por ejemplo Schiffer y Bowden (para el centro de gravedad); Honsberger (para los incisos 3 a 6); y Klamkin y Kung para los teoremas de Ceva y Menelao.

Los siguientes principios físicos serán utilizados en este artículo.

- (a) El centro de gravedad de dos masas de magnitud a y b suspendidas de una barra rígida (sin masa) corresponde al punto tal que las

distancias de este punto a las masas están en razón inversa a las masas (ver figura 1). Esto es, si las masas a y b se cuelgan de A y B respectivamente y C es el centro de gravedad, entonces $\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}$. En particular, el centro de gravedad de dos masas iguales suspendidas de una barra rígida es el punto medio.

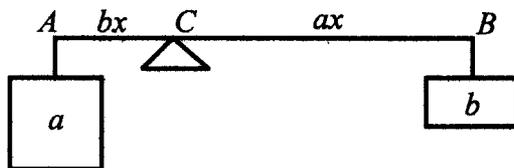


Fig. 1 Centro de gravedad de dos masas

- (b) El centro de gravedad de una barra homogénea es su punto medio.
- (c) El equilibrio de un sistema no se altera si se sustituyen dos masas a , b por una masa $a + b$ en el centro de gravedad de éstas dos.
- (d) Si todas las masas de un sistema se multiplican por la misma constante, la posición del centro de gravedad de las masas no se altera.

1 El centro de gravedad de un triángulo.

Considera un triángulo rígido, sin masa, en posición horizontal. En cada uno de sus vértices se cuelga una masa unitaria. Vamos a encontrar el punto del triángulo donde se puedan colgar las tres masas sin alterar el equilibrio.

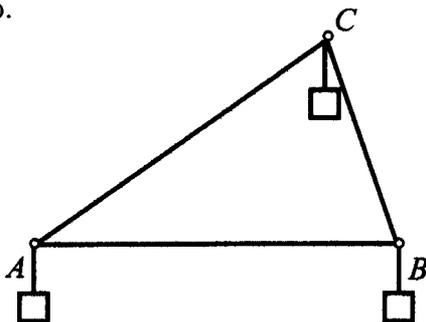


Fig. 2 Masas iguales suspendidas de los vértices

Si sustituimos las masas en A y en B por una masa igual a la suma de las dos en el punto medio del segmento AB el equilibrio no se altera.

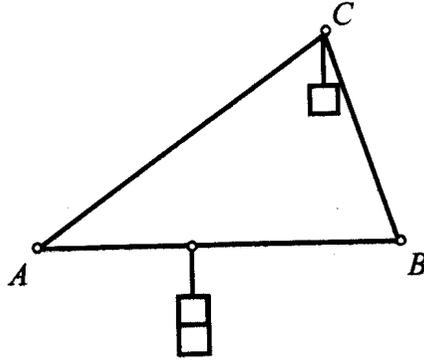


Fig. 3 Dos masas se juntan en el punto medio

El centro de gravedad de esta masa doble y la masa en el punto C estará sobre la mediana. La distancia a del centro de gravedad a C será el doble que su distancia al punto medio de AB . Esto es, el centro de gravedad corta a la mediana en proporción de 2 a 1.

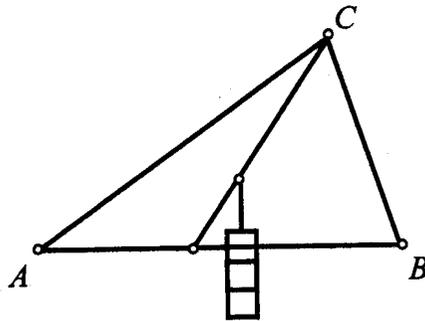


Fig. 4 El centro de gravedad de las tres masas

Del mismo modo se puede ver que el centro de gravedad de las tres masas unitarias se encuentra sobre las otras medianas. Esto muestra

que las tres medianas concurren en un punto que denotaremos G .

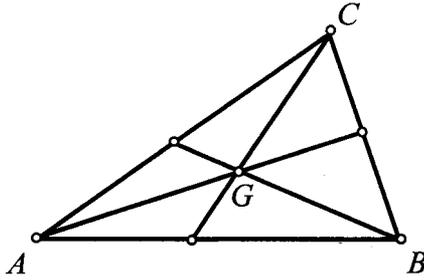


Fig. 5 El punto de intersección de las medianas

Ahora imagina que el triángulo está constituido por una lámina homogénea. Podemos pensar la lámina constituida de "alambres" paralelos a la base AB . Considera la mediana CC' y una línea paralela al lado AB . La mediana corta este segmento en dos partes iguales. Por lo tanto este segmento está en equilibrio sobre la mediana.

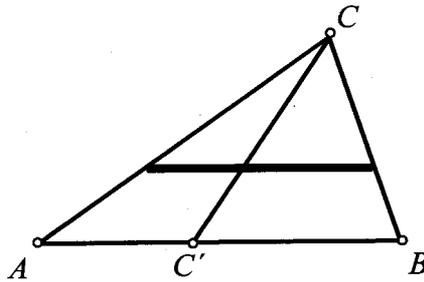


Fig. 6 Un *alambre* en equilibrio

Del mismo modo, todos los demás segmentos paralelos a AB están en equilibrio sobre la mediana. Por tanto el centro de gravedad del

triángulo homogéneo se encuentra sobre la mediana CC' . También podemos pensar la lámina constituida de alambres paralelos al lado BC y ver que el centro de gravedad se encuentra sobre la mediana AA' . Consideraciones semejantes hacen ver que el centro de gravedad se encuentra sobre la mediana BB' . Por lo tanto el centro de gravedad del triángulo está en la intersección de las medianas.

2 Las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Coloca masas a , b , y c respectivamente en los vértices A , B , y C , donde como es usual las letras minúsculas denotas las longitudes de los lados opuestos a los vértices de letras mayúsculas.

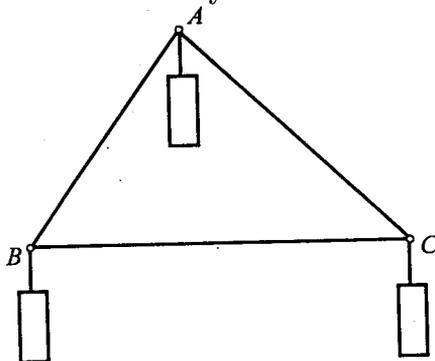


Fig. 7 Masas en los vértices proporcionales a las longitudes de los lados opuestos

Recordemos que la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en razón igual a los lados que lo forman (ver ejercicio 1). Podemos denotar los segmentos como bx y cx .

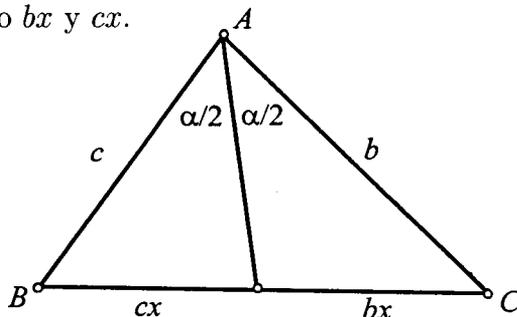


Fig. 8 La bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto

Por tanto el punto de equilibrio de las masas b y c se encuentra sobre el punto de intersección de la bisectriz del ángulo con el lado opuesto. Podemos colocar las masas b y c en este punto y el equilibrio no se altera. Así vemos que el centro de gravedad del sistema se encuentra sobre la bisectriz del ángulo A . Del mismo modo podemos hacer ver que se encuentra sobre la bisectriz del ángulo B , y sobre la bisectriz del ángulo C . Por tanto, el centro de gravedad de todo el sistema será el punto de intersección de las tres bisectrices. El lector recordará que este punto es el centro del círculo inscrito, que denotaremos por I .

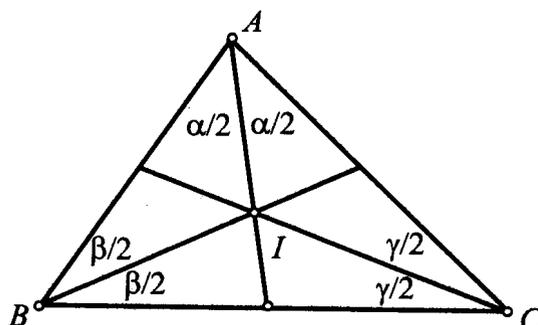


Fig. 9 El incentro de un triángulo

3 Un triángulo de alambre.

Considera ahora un triángulo cuyas aristas son de alambre rígido homogéneo. Cada arista tiene una masa igual a su longitud. Como el punto medio de un alambre homogéneo es su centro de gravedad, el sistema es equivalente al mismo triángulo ahora con las aristas sin masa y con tres masas de magnitudes a , b , c colgadas de los puntos medios A' , B' , y C' de los respectivos lados.

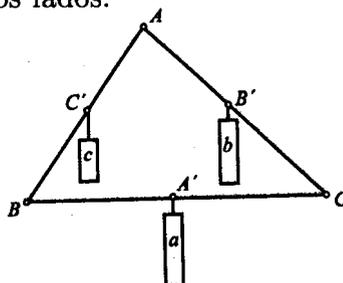


Fig. 10 Masas proporcionales a la longitud de los lados en sus puntos medios

Este triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo original, y los lados correspondientes miden la mitad.

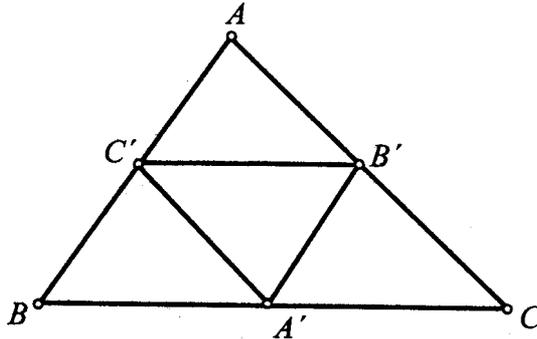


Fig. 11 El triángulo de los puntos medios

Como las masas colgadas de los vértices A' , B' , y C' son proporcionales a los lados opuestos (situación del inciso 2), el centro de gravedad será el incentro de $A'B'C'$. Denotaremos este punto por S .

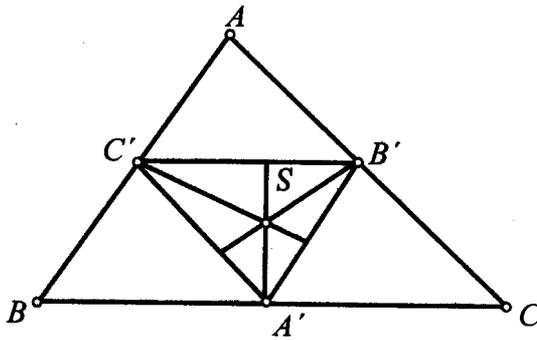


Fig. 12 El incentro del triángulo de los puntos medios

Una bisectriz del triángulo $A'B'C'$ tiene la propiedad de dividir el perímetro del triángulo original en dos partes iguales. Para ver esto nota que la bisectriz del ángulo en el vértice A' es paralela a la bisectriz del ángulo correspondiente en el triángulo ABC , ver figura 13. Traza una paralela a la bisectriz de A por el punto B . Extiende el lado AC

hasta que intersecte esta paralela en el punto F . El triángulo BAF tiene dos ángulos iguales y es por tanto isósceles. Por tanto AF es igual a AB . Como D es el punto medio de CF , $DF = DA + AF = DA + AB$.

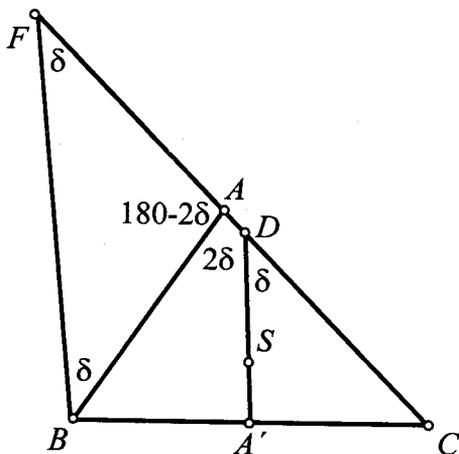


Fig. 13 La línea $A'S$ divide el perímetro a la mitad

4 Otras líneas que dividen al perímetro en dos.

Considera el punto de tangencia D del círculo excrito al lado BC . Entonces $AB + BD = DC + AC$ (ver ejercicio 2). Es decir, la línea AD divide al perímetro en dos partes iguales. Si s denota el semiperímetro, entonces $BD = s - c$, y $DC = s - b$.

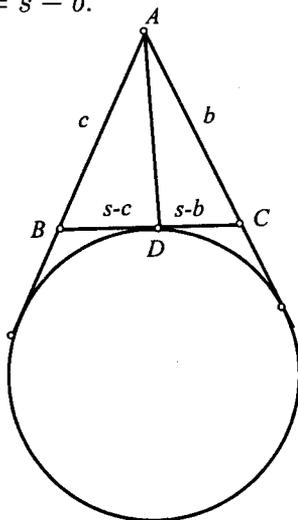


Fig. 14 AD divide el perímetro a la mitad

Si trazamos las otras líneas correspondientes desde los otros vértices a los puntos de tangencia de los otros círculos excritos tendremos tres líneas que se cortan en un sólo punto. Para ver esto, colocamos unas masas de magnitudes $s - a$, $s - b$, y $s - c$ en los vértices A , B , y C respectivamente. El centro de gravedad de las masas en B y C es precisamente D ya que los momentos son iguales $(s - b)(s - c) = (s - c)(s - b)$.

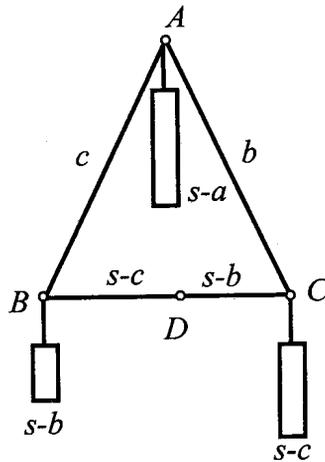


Fig. 15 Momentos iguales de las masas en B y C con respecto a D

Podemos sustituir las masas en B y C por una masa de magnitud $s - b + s - c = a$ en D . Como tenemos la otra masa de magnitud $s - a$ en A , el centro de gravedad de todo el sistema está en algún lugar sobre AD . Del mismo modo el centro de gravedad se encuentra en los otros segmentos que unen los otros vértices con el punto de contacto de los otros círculos excritos. Denotaremos por M este punto.

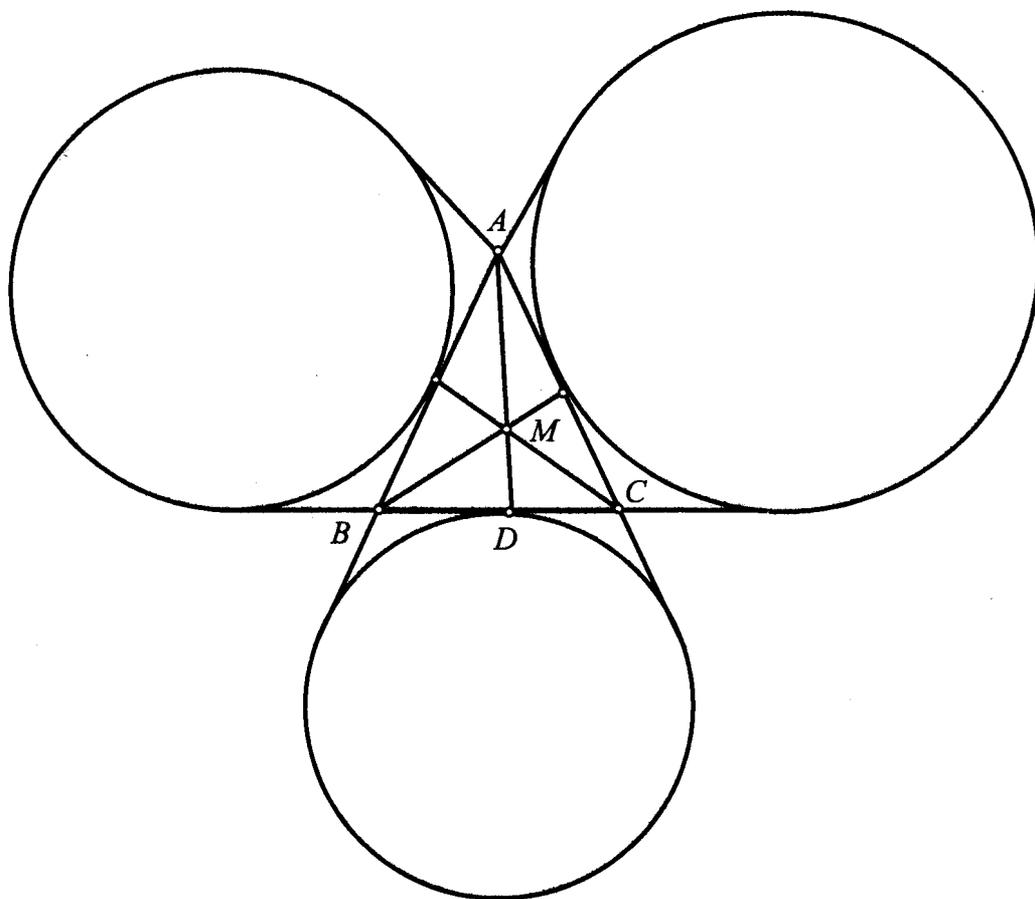


Fig. 16 Las tres líneas que unen los vértices con puntos de tangencia se cortan en el punto M

En los siguientes incisos veremos que los puntos I , G , S , y M están alineados y que guardan una relación interesante entre sí.

5 S es el punto medio de I y M .

Para ver esto considera los siguientes sistemas.

- (i) Las masas a , b , c suspendidas de los vértices A , B , C respectivamente. La masa total es $2s$. El centro de gravedad es I .
- (ii) Las masas $2(s - a)$, $2(s - b)$, $2(s - c)$ suspendidas de los vértices A , B , C respectivamente. La masa total es $2s$. El centro de gravedad es M .

- (iii) La suma de las masas de los sistemas i) y ii) (y por tanto el centro de gravedad será el punto medio de I y M). Esto es, la suma de los sistemas tiene las masas $(b + c)$, $(a + c)$, y $(a + b)$ suspendidas en los vértices A , B , C respectivamente. Esto es equivalente a que si las masas $2a$, $2b$, $2c$ se colocan en los puntos medios de los segmentos a , b , c respectivamente (ver ejercicio 3). El centro de gravedad es por tanto S , el incentro del triángulo $A'B'C'$.

6 G divide al segmento IM en relación 2 a 1.

Para ver la relación del punto G con I y M considera

- (i) Las masas a, b, c suspendidas de los vértices A, B, C respectivamente. La masa total es $2s$. El centro de gravedad es I .
- (iv) las masas $(s - a), (s - b), (s - b)$ suspendidas de los vértices A, B, C respectivamente. La masa total es s (la mitad del anterior). El centro de gravedad es M ; y
- (v) La suma de los sistemas i) y iv). El centro de gravedad de este sistema dividirá el segmento IM en relación 2 a 1. Este centro es G (la intersección de las medianas), pues en cada vértice hay una masa igual a s .

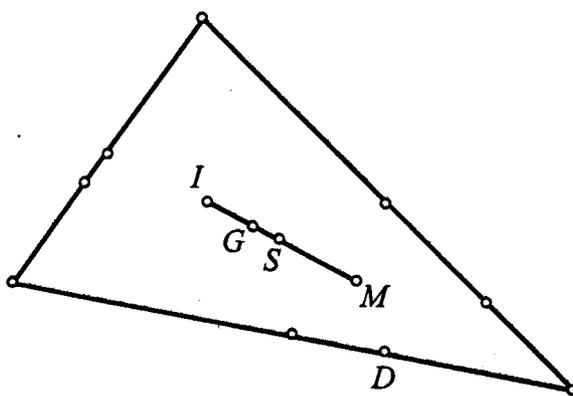


Fig. 17 Los puntos I, G, S, M están alineados

7 Concurrencia de rectas y centro de gravedad.

Se cuelgan masas arbitrarias m_1 , m_2 , y m_3 en los vértices. Si C_1 es el centro de gravedad de m_1 y m_2 , B_1 el de m_1 y m_3 y A_1 el de m_3 y m_2 , entonces las rectas AA_1 , BB_1 y CC_1 se intersectan en un solo punto G_1 (que es el centro de gravedad del sistema). Además se satisface la relación

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (1)$$

Si se colocan las masas m_1 y m_2 en C_1 podemos ver que el centro de gravedad se encuentra sobre la recta CC_1 . De igual modo se puede ver que se encuentra sobre AA_1 y sobre BB_1 . La relación (1) se deduce de las igualdades $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m_2}{m_1}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{m_3}{m_1}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{m_1}{m_2}$. Esta relación nos recuerda el teorema de Ceva, el cual se puede deducir utilizando este resultado (Ramírez y Flores; ver también ejercicio 5).

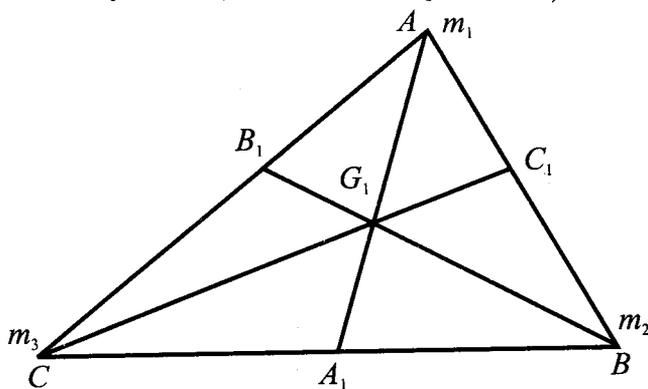


Fig. 18 Si G_1 es el centro de gravedad, $\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

8 El teorema de Menelao.

Si los puntos X, Y, Z son colineales en los lados del triángulo ABC (ver figura 19) entonces $\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = -1$.

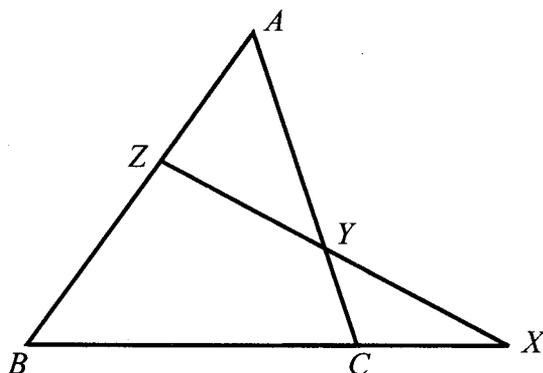


Fig. 19 Puntos colineales en los lados de un triángulo

Para probarlo, se escogen las masas k, m, n de modo que $\frac{AZ}{ZB} = \frac{m}{k}$, $-\frac{BX}{XC} = \frac{n}{m}$. Coloca la masa n en C , y k en A . El centro de gravedad del sistema está en la línea AC . Sustituye la masa n por masas m en B y $n - m$ en X (el centro de gravedad no cambia, ver ejercicio 6). Ahora coloca las masas m y k en Z (el equilibrio no se altera). El centro de gravedad está en la línea ZX , y por tanto en Y . De esto se sigue que $\frac{CY}{YA} = \frac{k}{n}$ y se tiene $\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = \frac{m}{k} \times \left(-\frac{n}{m}\right) \times \frac{k}{n} = -1$.

Ejercicios.

- (1) Prueba que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en razón igual a los lados que lo forman. (Sugerencia: Utiliza la ley de senos).
- (2) Sea D el punto de tangencia del círculo exscrito al lado BC . Muestra que $AB + BD = DC + AC$
- (3) Muestra que el sistema con masas $(b + c)$, $(a + c)$, y $(a + b)$ en los vértices A, B, C respectivamente se puede reemplazar por masas $2a, 2b, 2c$ colocadas en los puntos medios de los segmentos a, b, c respectivamente.
- (4) Coloca masas $2(s - a)$ en A , $2(s - b)$ en B , $2(s - c)$ en C . Muestra que estas masas se pueden sustituir por masas de magnitudes

a, b, c en los puntos de tangencia de los lados a, b, c respectivamente con los círculos excritos correspondientes.

- (5) El teorema de Ceva. Sean AA_1, BB_1, CC_1 tres líneas concurrentes en un triángulo (como se muestra en la figura 18). Entonces $\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Demuestra este teorema.

Sugerencia: Coloca masas m_1 en A , m_1 en B , y m_3 en C , de modo que C_1 sea el centro de gravedad de m_1 y m_2 , B_1 el de m_1 y m_3 y A_1 el de m_3 y m_2 .

- (6) Demuestra que si $\frac{BX}{CX} = \frac{n}{m}$ entonces $\frac{BX - CX}{CX} = \frac{n - m}{m}$.

Referencias

- [1] Arquímedes, *El método*, Alianza Editorial/SEP, 1988.
- [2] Honsberger, R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Mathematical Association of America, 1995.
- [3] Klamkin, M. S. y Kung, S. H. *Ceva's and Menelaus' theorems and their converses via centroids*, Mathematics Magazine, **69** (1995), 49–51.
- [4] Kogan, B. Yu. *The applications of mechanics to geometry*. University of Chicago Press, 1974.
- [5] Lyúbich, Yu. I. y Shor, L. A. *Método cinemático en problemas geométricos*. Editorial Mir, 1978.
- [6] Pólya, G. *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press, 1990.
- [7] Schiffer, M. M. y Bowden, L. *The role of mathematics in science*. Mathematical Association of America, 1984.